УДК 373: [512 + 517]
ББК 22.12я721 + 2.161я721
Н49

Рекомендовано Министерством образования и науки Украины
(письмо № 1/11–7731 от 28 декабря 2005 г.)

Переведено по изданию:
Є. П. Нелін, О. Є. Долгова. Алгебра і початки аналізу: Дворівневий підруч. для 11 кл. загальноосвіт. навч. закладів.— 2-ге вид., виправ. і доп.— Х.: Світ дитинства, 2006.— 416 с.

Рецензенты:

М. И. Бурда, член-корреспондент АПН Украины, доктор педагогических наук, профессор, заместитель директора Института педагогики АПН Украины

В. А. Золотарев, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой высшей математики и информатики Харьковского национального университета им. В. Н. Каразина

А. Н. Роганин, учитель математики высшей категории, учитель-методист Песочинского коллегиума Харьковского района Харьковской области

Художник *С. Э. Кулинич*

Условные обозначения в учебнике

- ▮ **главное в учебном материале**
- ▶ начало решения задачи
- ◁ окончание решения задачи
- ● начало обоснования утверждения
- ○ окончание обоснования утверждения

Нелин Е. П., Долгова О. Е.
Н49 Алгебра и начала анализа: Двухуровневый учеб. для 11 кл. общеобразоват. учеб. заведений/Пер. с укр. Е. П. Нелина.— Х.: Мир детства, 2006.— 416 с.
ISBN 966-544-383-6.

УДК 373: [512 + 517]
ББК 22.12я721 + 2.161я721

ISBN 966-544-383-6

Предисловие для учащихся

Предлагаемый учебник для 11 класса является продолжением учебника «Алгебра и начала анализа» для 10 класса. В 11 классе рассматривается принципиально новая часть курса — начала анализа. *Математический анализ* (или просто анализ) — отрасль математики, сформированная в XVIII в., которая сыграла значительную роль в развитии природоведения: появился мощный, достаточно универсальный метод исследования функций, которые возникают во время решения разнообразных прикладных задач. Также в 11 классе будут рассмотрены элементы комбинаторики, теории вероятностей и статистики, которые находят широкое применение в различных отраслях знаний.

Несколько замечаний о том, как пользоваться учебником.

Система учебного материала учебника по каждой теме представлена на двух уровнях. *Основной материал* приведен в параграфах, номера которых обозначены синим цветом. *Дополнительный материал* (номера параграфов обозначены серым цветом) предназначен для овладения темой на более глубоком уравне и может осваиваться учащимся самостоятельно или под руководством учителя при изучении математики в классах универсального или естественного профилей, а может использоваться для систематического изученния углубленного курса алгебры и начал анализа в классах, школах, лицеях и гимназиях физико-математического профиля.

В начале многих параграфов приводятся *справочные таблицы*, содержащие основные определения, свойства и *ориентиры* по поиску плана решения задач по теме. Для ознакомления с основными идеями решения задач приводятся примеры. В них, кроме самого решения, содержится также *комментарий*, который поможет составить план решения аналогичного задания.

С целью закрепления, контроля и самоконтроля усвоения учебного материала после каждого параграфа предлагается система вопросов и упражнений. Ответы на эти вопросы и примеры решения аналогичных упражнений можно найти в тексте параграфа. Система упражнений к основному материалу дана на трех уровнях. *Задачи среднего уровня* обозначены символом «°», более сложные *задачи достаточного уровня* даны без обозначений, а *задачи высокого уровня* сложности обозначены символом «*». Заметим, что в учебнике и для многих задач углубленного уровня предлагаются специальные ориентиры, которые позволяют освоить методы их решения. *Ответы и указания* для большинства упражнений приведены в соответствующем разделе. О происхождении понятий, терминов и символов вы сможете узнать, прочитав «Сведения из истории». В конце учебника приведен справочный материал.

Предисловие для учителя

Предлагаемый учебник направлен на реализацию основных положений концепции профильного обучения в старшей школе, на организацию личностно-ориентированного обучения математике. Учебник подготовлен в соответствии с действующей программой по алгебре и началам анализа для 10–11классов с учетом программы по алгебре и началам анализа для 10–12 классов.

Как известно, в обучении учебник выполняет две основные функции: 1) является источником учебной информации, которая раскрывает в доступной для учащихся форме предусмотренное образовательным стандартом содержание; 2) выступает средством обучения, с помощью которого осуществляется организация учебного процесса, в том числе и самообразование учащихся.

Укажем основные отличия предложенного учебника от других учебников по алгебре и началам анализа в выполнении этих функций.

Это *двухуровневый учебник*, который содержит общий материал для классов универсального, естественного и физико-математического профилей и дополнительный материал для классов физико-математического профиля. В каждом разделе наряду с параграфами, которые предназначены для овладения учениками стандартного математического образования на академическом уравне, есть систематический материал, предназначенный для организации индивидуальной работы с учениками, которые интересуются математикой. Предложенный дополнительный материал может использоваться и для организации обучения алгебре и началам анализа в классах физико-математического профиля или в специализированных школах и классах с углубленным изучением математики.

Основной материал, который должны усвоить ученики, структурирован в форме *справочных таблиц* в начале параграфа, которые содержат систематизацию теоретического материала и *способы деятельности* с этим материалом в форме специальных *ориентиров по решению задач*. ***В первую очередь ученики должны усвоить материал, который содержится в таблицах***. Поэтому при объяснении нового материала целесообразно применять работу с учебником по соответствующим таблицам и рисункам. Все необходимые объяснения и обоснования тоже приведены в учебнике, но каждый ученик может выбирать свой собственный уровень ознакомления с этими обоснованиями.

Подчеркнем, что любой учебник алгебры и начал анализа должен обеспечить не тольки ознакомление учащихся с основными алгебраическими понятиями и их свойствами (то есть дать возможность формировать у учащихся знания по алгебре и началам анализа). Учебник должен обспечить также формирование способов деятельности с этими понятиями (то есть дать возможность формировать у учащихся умения по алгебре и началам анализа). Систему условий, на которую реально опирается учащийся при выполнении действия, психологи называют ориентировочной основой деятельности. Если учащимся предлагают достаточно общие ориентировочные основы для выполнения соответствующих заданий в виде специальных правил и алгоритмов, то говорят, что им предлагаются ориентировочные основы второго и третьего типов. Как правило, в учебниках алгебры и начал анализа для 10–11 классов учащимся предлагаются тольки образцы выполнения заданий, а затем учащиеся приступают к самостоятельной деятельности, ориентируясь на эти образцы (то есть учащимся предлагаются ориентировочные основы первого типа). Такое обучение предполагает, что учащийся самостоятельно выполнит систематизацию и обобщение способов деятельности, ориентируясь на предложенные образцы, и выделит для себя ориентировочную основу выполнения рассмотренных заданий. Как правило, в этом случае ориентировочная основа, которая образуется у учащегося, неполная и, кроме того часто, не осознана, так как учащийся не может объяснить, почему при выполнении задания он выполнил именно такие преобразования, а не другие.

По этой причине одним из принципов построения данного учебника было выделение для учащихся ориентировочных основ соответствующей деятельности по выполнению алгебраических заданий непосредственно в учебнике.

В каждом разделе решению упражнений предшествует выделение общих ориентиров по решению таких задач. Поэтому важной составляющей работы с предложенным учебником является обсуждение выбора соответствующих ориентиров и планов решения задач. Объяснение методов решения ведется по схеме:

Решение	Комментарий
Как можно записать решение задачи	Как можно рассуждать при решении такой задачи

При такой подаче учебного материала комментарий, в котором объясняется решение, не мешает восприятию основной идеи и плана решения задач определенного вида. Это позволяет ученику, который уже усвоил способ решения, с помощью приведенного примера вспомнить, как решать задания, а ученику, которому необходима консультация по решению, — получить такую детальную консультацию, которая содержится в комментарии.

За счет четкого выделения общих ориентиров работы с практическими заданиями курса удается часть «нестандартных» (с точки зрения традиционных учебников) задач перевести в разряд «стандартных» (например, уравнения, для решения которых приходится применить свойства функций). Это позволяет уменьшить разрыв между уровнем требований государственной аттестации по алгебре и началам анализа и уровнем требований по этому курсу на вступительных экзаменах в вузы, а также ознакомить учеников с методами решения задач, которые предлагаются на вступительных экзаменах в вузы.

Заметим, что детальная систематизация по содержательным линиям учебного материала и соответствующих способов деятельности по решению задач курса содержится также в пособии Е. П. Нелина «Алгебра в таблицах. Учебное пособие для учащихся 7–11 классов».— Харьков: Мир детства, 1998–2006, которое целесообразно использовать в учебном процессе в комплекте с учебником.

Раздел 1
Производная и ее применение

§1 ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА И ИХ СВОЙСТВА

Таблица 1

1. Числовые множества

Действительные числа* R

Числа, которые можно представить в виде бесконечной десятичной дроби

Рациональные числа Q

Можно представить в виде несократимой дроби $\frac{m}{n}$, где m — целое, n — натуральное число.

Записываются в виде бесконечной периодической дроби

$$\left(\frac{1}{3}=0{,}333\ldots=0{,}(3)\right)$$

Иррациональные числа

Нельзя представить в виде несократимой дроби $\frac{m}{n}$, где m — целое, n — натуральное число.

Записываются в виде бесконечной непериодической дроби

$$\left(\sqrt{2}=1{,}4142135\ldots\right)$$

Целые числа Z

Включают натуральные числа, числа, противоположные им, и число нуль

Дробные числа

Числа, состоящие из целого числа частей единицы $\left(\frac{2}{5}\right.$ — обыкновенная дробь, $1{,}23$ — десятичная дробь: $\left.1{,}23=\frac{123}{100}\right)$

Натуральные числа N (целые положительные)

Для школьного курса математики натуральное число — основное неопределяемое понятие

Число 0

Такое число, при сложении с которым любое число не изменяется

$$(a+0=0+a=a)$$

Целые отрицательные числа

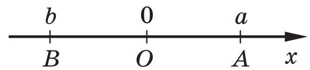
Числа, противоположные натуральным

---

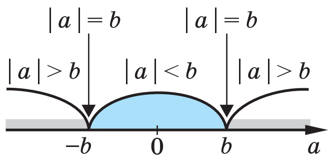
* В разделе 3 § 22 будет рассмотрено еще одно числовое множество — комплексные числа, которое включает в себя множество действительные чисел.

Продолж. табл. 1

2. Модуль действительного числа и его свойства

Определение	Геометрический смысл модуля
***Модулем* положительного числа называется само это число, модулем отрицательного числа называется число, противоположное ему, модуль нуля равен нулю** $\lvert a \rvert = \begin{cases} a \text{ при } a > 0, \\ 0 \text{ при } a = 0, \\ -a \text{ при } a < 0 \end{cases}$	 $\lvert a \rvert = OA, \ \lvert b \rvert = OB$ $\lvert a - b \rvert = AB$ **На координатной прямой модуль — это расстояние от начала координат до точки, изображающей это число.** *Модуль разности двух чисел a и b — это расстояние между точками a и b на координатной прямой*

Свойства

1.	$\boxed{\lvert a \rvert \geqslant 0}$	*Модуль любого числа — неотрицательное число*
2.	$\boxed{\lvert -a \rvert = \lvert a \rvert}$	*Модули противоположных чисел равны*
3.	$\boxed{a \leqslant \lvert a \rvert}$, то есть $\boxed{-\lvert a \rvert \leqslant a \leqslant \lvert a \rvert}$	*Каждое число не больше своего модуля*
4.	$\boxed{\text{При } b > 0 \quad \lvert a \rvert \leqslant b \Leftrightarrow -b \leqslant a \leqslant b}$	
5.	$\boxed{\text{При } b > 0 \quad \lvert a \rvert \geqslant b \Leftrightarrow a \leqslant -b \text{ или } a \geqslant b}$	
6.	$\boxed{\lvert a \cdot b \rvert = \lvert a \rvert \cdot \lvert b \rvert}$	*Модуль произведения равен произведению модулей множителей*
7.	$\boxed{\left\lvert \dfrac{a}{b} \right\rvert = \dfrac{\lvert a \rvert}{\lvert b \rvert} \ (b \neq 0)}$	*Модуль дроби равен модулю числителя, деленному на модуль знаменателя (если знаменатель не равен нулю)*
8.	$\boxed{\lvert a^n \rvert = \lvert a \rvert^n}$ $\lvert a \rvert^2 = a^2$ $\lvert a \rvert^{2k} = a^{2k}$	
9.	$\boxed{\lvert a + b \rvert \leqslant \lvert a \rvert + \lvert b \rvert}$ $\boxed{\lvert a_1 + a_2 + \ldots + a_n \rvert \leqslant \lvert a_1 \rvert + \lvert a_2 \rvert + \ldots + \lvert a_n \rvert}$	*Модуль суммы не превышает суммы модулей слагаемых*
10.	$\boxed{\lvert \lvert a \rvert - \lvert b \rvert \rvert \leqslant \lvert a \pm b \rvert \leqslant \lvert a \rvert + \lvert b \rvert}$	

Объяснение и обоснование

1. Числовые множества. В курсе математики вы встречались с разными числами: натуральными, целыми, рациональными, иррациональными, действительными. Представление о числах у человечества складывалось постепенно, под воздействием требований практики. Например, *натуральные числа* появились в связи с необходимостью подсчета предметов. Но для того чтобы дать ответ на вопрос «Сколько спичек в пустой коробке из-под спичек?», множества натуральных чисел $\boldsymbol{N} = \{1;\ 2;\ 3;\ \ldots\}$ недостаточно — для этого необходимо иметь еще и число нуль. Присоединяя к множеству $\boldsymbol{N}$ натуральных чисел число 0, получаем множество *неотрицательных целых чисел*. Его часто обозначают $\boldsymbol{Z}_0 = \{0;\ 1;\ 2;\ 3;\ \ldots\}$. Одних только неотрицательных целых чисел оказалось недостаточно для решения задач практики (а следовательно, и математических задач, отображающих заданную реальную ситуацию). Так, для того чтобы охарактеризовать температуру воздуха выше и ниже нуля или движение тела в противоположных направлениях, необходимы противоположные натуральным числа, то есть *отрицательные числа*. Для натурального числа n противоположным считается число $-n$, а для числа $-n$ противоположным считается число n. Нуль считают противоположным самому себе.

Натуральные числа, числа, противоположные натуральным, и число нуль составляют множество $\boldsymbol{Z}$ *целых чисел*.

Измерение величин привело к необходимости расширения множества целых чисел и введения рациональных чисел. Например, средняя многолетняя температура воздуха в январе месяце в г. Харкове $-7{,}3\ ^\circ$С, длительность урока — 45 минут, или $\frac{3}{4}$ часа.

Таким образом, выбирая какую-либо единицу измерения, мы получаем числовое значение величин, которое может выражаться с помощью разных рациональных чисел — целых и дробных, положительных и отрицательных.

Целые и дробные числа составляют множество $\boldsymbol{Q}$ *рациональных чисел*.

Любое рациональное число можно записать в виде дроби $\frac{m}{n}$, где $m \in \boldsymbol{Z}$, $n \in \boldsymbol{N}$ (то есть числитель m является целым числом, а знаменатель n — натуральным).

Рациональное число может быть записано разными дробями. Например,

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{10}{20},\quad -\frac{2}{7} = \frac{-2}{7} = \frac{-8}{28} = \frac{-10}{35},\quad 1{,}2 = \frac{12}{10} = \frac{6}{5} = \frac{120}{100},\quad 5 = \frac{5}{1} = \frac{10}{2} = \frac{50}{10}.$$

Как видно из приведенных примеров, среди дробей, которые изображают данное рациональное число, всегда есть единственная несократимая дробь (для целых чисел — это дробь, знаменатель которой равен 1).

Обратим внимание, что рациональное число, записанное в виде дроби $\frac{m}{n}$, где $m \in \boldsymbol{Z}$, $n \in \boldsymbol{N}$, можно также записать в виде конечной или бесконечной периодической десятичной дроби, разделив числитель на знаменатель. Например, $\frac{3}{4} = 0{,}75$, $\frac{1}{3} = 0{,}3333\ldots$

Договоримся, что конечную десятичную дробь можно изображать в виде бесконечной, у которой после последнего десятичного знака, отличного от нуля, на месте следующих десятичных знаков записываются нули, например, $\frac{3}{4}=0{,}75=0{,}75000\ldots$.

Целые числа также договоримся записывать в виде бесконечной десятичной дроби, у которой справа от запятой на месте десятичных знаков стоят нули, например, $13 = 13{,}000\ldots$. Таким образом, любое рациональное число может быть записано как бесконечная периодическая дробь. Напомним, что у бесконечной периодической дроби, начиная с некоторого разряда, все десятичные знаки начинают повторяться. Группу цифр, которая повторяется, называют *периодом*. При записи периодической дроби период записывают в скобках. Например, $\frac{1}{3}=0{,}3333\ldots=0{,}(3)$, $\frac{3}{22}=0{,}136363636\ldots=0{,}1(36)$.

Таким образом, *каждое рациональное число может быть записано в виде бесконечной периодической десятичной дроби и наоборот, каждая бесконечная периодическая дробь задает рациональное число*.

Обратим внимание, что любая периодическая десятичная дробь с периодом девять равна бесконечной десятичной дроби с периодом нуль, у которой десятичный разряд, предшествующий периоду, увеличен на единицу по сравнению с разрядом первой дроби. Например, бесконечные периодические дроби $0{,}2(9)$ и $0{,}3(0)$ являются записью одного и того же рационального числа $\frac{3}{10}$. Действительно, учитывая, что сумма бесконечной убывающей геометрической прогрессии с первым членом a_1 и знаменателем q вычисляется по формуле

$$S=\frac{a_1}{1-q}, \text{ имеем } 0{,}2(9)=0{,}2999\ldots=0{,}2+\frac{9}{100}+\frac{9}{1000}+\frac{9}{10000}+\ldots=0{,}2+\frac{\frac{9}{100}}{1-\frac{1}{10}}=$$

$$=0{,}2+\frac{1}{10}=0{,}3=0{,}3(0).$$

В дальнейшем, записывая рациональные числа с помощью бесконечных периодических десятичных дробей, договоримся исключить из рассмотрения бесконечные периодические дроби, период которых равен девяти.

Каждое рациональное число можно изобразить точкой на координатной прямой (то есть прямой, на которой выбраны начало отсчета, положительное направление и единица измерения). Например, на рисунке 1 изображены несколько рациональных чисел $\left(0;\ 1;\ -\frac{1}{2};\ 2{,}5\right)$.

Однако на координатной прямой есть точки, изображающие числа, которые не являются рациональными.

Рис. 1

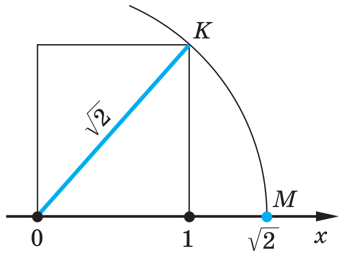


Рис. 2

Например, из курса алгебры известно, что число $\sqrt{2}$ не является рациональным. Это так называемое иррациональное число (см. также пример 2 на с. 15). Если построить квадрат со стороной, равной 1, на координатной прямой x (рис. 2), то его диагональ будет равна $\sqrt{2}$. Тогда, проведя дугу окружности радиуса $OM = \sqrt{2}$ с центром в точке O, получим точку M, координата которой равна $\sqrt{2}$. Кроме числа $\sqrt{2}$, вы также встречались с иррациональными числами $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{10}$, π, e, $\lg 2$ и др.

Рациональные и иррациональные числа составляют множество действительных чисел* $\boldsymbol{R}$. На координатной прямой каждому действительному числу соответствует единственная точка и наоборот, каждой точке координатной прямой соответствует единственное действительное число (в этом случае говорят, что между множеством действительных чисел и множеством точек координатной прямой устанавливается взаимно однозначное соответствие).

Каждое действительное число может быть записано в виде бесконечной десятичной дроби: рациональные числа — в виде бесконечной периодической десятичной дроби, а иррациональные — в виде бесконечной непериодической десятичной дроби.

Напомним, что для сравнения действительных чисел и выполнения действий над ними (в случае, когда хотя бы одно из них не является рациональным) используются приближенные значения этих чисел. В частности, *для сравнения двух действительных чисел последовательно рассматриваем их приближенные значения с недостатком с точностью до целых, десятых, сотых и т. д. до тех пор, пока не получим, что какое-то приближенное значение одного числа больше соответствующего приближенного значения второго. Тогда то число, у которого приближенное значение больше, и считается большим*. Например, если $\alpha = \sqrt{3} = 1{,}7320508\ldots$, $\beta = 1\frac{3}{4} = 1{,}7500000\ldots$, то $\alpha < \beta$ (поскольку $1{,}73 < 1{,}75$).

Для выполнения сложения или умножения рассмотренных чисел α и β последовательно записывают их приближенные значения с недостатком и с избытком (с точностью до целых, десятых, сотых и т. д.) и выполняют действиями над полученными рациональными числами. В результате последовательно получаем значение суммы или произведения с необходимой точностью.

α	β	$\alpha+\beta$	$\alpha\beta$
$1 < \alpha < 2$	$1 < \beta < 2$	$2 < \alpha+\beta < 4$	$1 < \alpha\beta < 4$
$1{,}7 < \alpha < 1{,}8$	$1{,}7 < \beta < 1{,}8$	$3{,}4 < \alpha+\beta < 3{,}6$	$2{,}89 < \alpha\beta < 3{,}24$
$1{,}73 < \alpha < 1{,}74$	$1{,}75 < \beta < 1{,}76$	$3{,}48 < \alpha+\beta < 3{,}50$	$3{,}0275 < \alpha\beta < 3{,}0624$
$1{,}732 < \alpha < 1{,}733$	$1{,}750 < \beta < 1{,}751$	$3{,}482 < \alpha+\beta < 3{,}484$	$3{,}031 < \alpha\beta < 3{,}034483$
...	...	...	...

* Более детально о множестве действительных чисел см. на с. 183. Свойства действий над действительными числами рассматриваются также в § 22 (см. с. 359 и с. 362).

Как видим, $\alpha + \beta = 3{,}48\ldots$, $\alpha\beta = 3{,}03\ldots$.

В курсе математического анализа доказывается, что в случае, когда приближенные значения чисел α и β последовательно берутся с точностью до целых, десятых, сотых и т. д., то значения суммы $\alpha + \beta$ с недостатком и с избытком стремятся к одному и тому же числу, которое и принимается за значение суммы $\alpha + \beta$ (аналогично определяется и произведение $\alpha\beta$).

2. Модуль действительного числа и его свойства. Напомним определение модуля.

Модулем **положительного числа называется само это число, модулем отрицательного числа называется число, противоположное ему, модуль нуля равен нулю.**

Это определение можно коротко записать несколькими способами.

$$|a| = \begin{cases} a \text{ при } a > 0, \\ 0 \text{ при } a = 0, \\ -a \text{ при } a < 0, \end{cases} \quad \text{или} \quad |a| = \begin{cases} a \text{ при } a \geqslant 0, \\ -a \text{ при } a < 0, \end{cases} \quad \text{или} \quad |a| = \begin{cases} a \text{ при } a > 0, \\ -a \text{ при } a \leqslant 0, \end{cases} \quad \text{или}$$

$$|a| = \begin{cases} a \text{ при } a \geqslant 0, \\ -a \text{ при } a \leqslant 0. \end{cases}$$ При необходимости мы будем пользоваться любой из этих записей определения модуля. Для нахождения $|a|$ по определению необходимо знать знак числа a и использовать соответствующую формулу. Например, $|5| = 5$, $|-3| = -(-3) = 3$, $\left|\sqrt{3} - 2\right| = -\left(\sqrt{3} - 2\right) = 2 - \sqrt{3}$.

На координатной прямой модуль числа — это расстояние от начала координат до точки, изображающей это число.

Действительно, если $a > 0$ (рис. 3), то расстояние $OA = a = |a|$. Если $b < 0$, то расстояние $OB = -b = |b|$.

Модуль разности двух чисел a и b — это расстояние между точками a и b на координатной прямой.

Для доказательства можно воспользоваться тем, что при параллельном переносе вдоль оси координат на b единиц абсцисса соответствующей точки изменяется на b: к абсциссе данной точки прибавляется число b, то есть при $b > 0$ точка переносится вправо, а при $b < 0$ — влево. Обозначим на координатной прямой числа a, b, $a - b$ соответственно точками A, B, C. На рисунке 4 эти точки изображены для случая $a > 0$ и $b < 0$, хотя приведенное далее обоснование не зависит от знаков a и b.

При параллельном переносе вдоль оси Ox на b единиц точка O перейдет в точку B, а точка C (с координатой $a - b$) в точку с координатой $a - b + b = a$, то

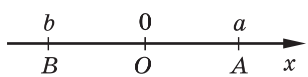


Рис. 3

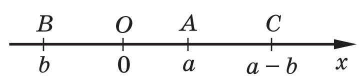


Рис. 4

есть в точку A. Тогда $CO = AB$. Но расстояние CO — это расстояние от точки $a - b$ до начала координат, следовательно, $CO = |a - b|$, а значит, и $AB = |a - b|$ ◯.

Используя определение модуля и его геометрический смысл, можно обосновать свойства модуля, приведенные в таблице 1.

Например, учитывая, что $|a|$ — это расстояние от точки a до точки O, а расстояние может выражаться только неотрицательным числом, получаем

$$|a| \geqslant 0,$$

то есть *модуль любого числа является неотрицательным числом.*

Учитывая, что точки a и $-a$ находятся на одинаковом расстоянии от точки O, получаем

$$|-a| = |a|,$$

Это означает, что *модули противоположных чисел равны.*

Если $a \geqslant 0$, то $|a| = a$, а если $a < 0$, то $a < |a|$. Следовательно, всегда

$$a \leqslant |a|,$$

то есть *каждое число не превышает его модуль.*

Если в последнее неравенство вместо a подставить $-a$ и учесть, что $|-a| = |a|$, то получаем неравенство $-a \leqslant |a|$. Отсюда $a \geqslant -|a|$, что вместе с неравенством $a \leqslant |a|$ свидетельствует о том, что для любого действительного числа a выполняется двойное неравенство

$$-|a| \leqslant a \leqslant |a|. \qquad (1)$$

При $b > 0$ неравенство $|a| \leqslant b$ означает, что число a на координатной прямой находится от точки O на расстоянии, которое не превышает b (рис. 5), то есть в промежутке $[-b; b]$. Наоборот, если число a находится в этом промежутке, то есть $-b \leqslant a \leqslant b$, то $|a| \leqslant b$. Следовательно,

$$\text{при } b > 0 \quad |a| \leqslant b \Leftrightarrow -b \leqslant a \leqslant b. \qquad (2)$$

Обратим внимание, что последнее утверждение справедливо и при $b = 0$ (тогда двум неравенствам удовлетворяет только одно значение $a = 0$).

Аналогично при $b > 0$ неравенство $|a| \geqslant b$ означает, что число a на координатной прямой находится от точки O на расстоянии, которое больше или равно b (рис. 5), то есть в этом случае $a \leqslant -b$ или $a \geqslant b$. Наоборот, если число a удовлетворяет одному из этих неравенств, то $|a| \geqslant b$. Следовательно, при $b > 0$ неравенство $|a| \geqslant b$ равносильно совокупности неравенств $a \leqslant -b$ или $a \geqslant b$, что можно записать так:

$$\text{при } b > 0 \quad |a| \geqslant b \Leftrightarrow a \leqslant -b \text{ или } a \geqslant b.$$

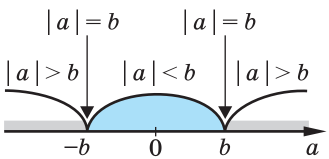


Рис. 5

Свойства модуля произведения и модуля дроби фиксируют известные правила действий над числами с одинаковыми и разными знаками:

модуль произведения равен произведению модулей множителей, то есть

$$|a \cdot b| = |a| \cdot |b|;$$

модуль дроби равен модулю числителя, деленному на модуль знаменателя (если знаменатель не равен нулю), то есть

$$\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|} \ (b \neq 0).$$

Формулу для нахождения модуля произведения можно обобщить для случая нескольких множителей

$$|a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n| = |a_1| \cdot |a_2| \cdot \ldots \cdot |a_n| \qquad (3)$$

и обосновать с помощью метода математической индукции*.

Действительно, формула (3) справедлива при $n = 2$:

$$|a_1 \cdot a_2| = |a_1| \cdot |a_2| \qquad (4)$$

(как отмечалось выше, это следует из правил действий над числами с одинаковыми и разными знаками). Предположим, что эта формула справедлива при $n = k$, то есть допустим, что

$$|a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_k| = |a_1| \cdot |a_2| \cdot \ldots \cdot |a_k|. \qquad (5)$$

С помощью формул (4) и (5) получаем, что и для следующего значения $n = k + 1$ формула (3) также выполняется, поскольку

$$|a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_k \cdot a_{k+1}| = |(a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_k) \cdot a_{k+1}| = |a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_k| \cdot |a_{k+1}| =$$
$$= |a_1| \cdot |a_2| \cdot \ldots \cdot |a_k| \cdot |a_{k+1}|.$$

Тогда согласно методу математической индукции формула (3) справедлива для всех натуральных значений n, больших или равных 2.

Если в формуле (3) взять $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = a$, получаем формулу

$$|a^n| = |a|^n.$$

Используя последнюю формулу справа налево при $n = 2k$ и учитывая, что $a^{2k} \geqslant 0$ при всех значениях a, получаем $|a|^{2k} = |a^{2k}| = a^{2k}$. Следовательно,

$$|a|^{2k} = a^{2k}.$$

Для обоснования неравенства

$$|a + b| \leqslant |a| + |b| \qquad (6)$$

запишем неравенство (1) для чисел a и b:

$$-|a| \leqslant a \leqslant |a|; \ -|b| \leqslant b \leqslant |b|.$$

Складывая почленно эти неравенства, получаем

$$-(|a| + |b|) \leqslant a + b \leqslant |a| + |b|.$$

Учитывая неравенство (2), имеем

$$|a + b| \leqslant |a| + |b|,$$

то есть *модуль суммы не превышает суммы модулей слагаемых*.

---

* См. учебник для 10 класса, с. 111.

С помощью метода математической индукции это свойство можно доказать и для случая n слагаемых (где $n \geqslant 2$):

$$|a_1 + a_2 + \ldots + a_n| \leqslant |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n|.$$

Если в неравенстве (6) заменить b на $-b$ и учесть, что $|-b| = |b|$, то получим неравенство

$$|a - b| \leqslant |a| + |b|. \qquad (7)$$

Если записать число a так: $a = b + (a - b)$ и использовать неравенство (6), то получим неравенство $|a| \leqslant |b| + |a - b|$. Отсюда

$$|a| - |b| \leqslant |a - b|. \qquad (8)$$

Если в неравенстве (8) заменить b на $-b$ и учесть, что $|-b| = |b|$, то получим неравенство

$$|a| - |b| \leqslant |a + b|, \qquad (9)$$

то есть *модуль суммы двух чисел не меньше разности их модулей.*

Меняя местами буквы a и b в неравенствах (8) и (9) и учитывая, что $|a - b| = |b - a|$, имеем также неравенства

$$|b| - |a| \leqslant |a \pm b|. \qquad (10)$$

Полученные неравенства (6) – (10) можно коротко записать так:

$$\big||a| - |b|\big| \leqslant |a \pm b| \leqslant |a| + |b|.$$

Примеры решения задач

Задача 1 Докажите, что **сумма** (разность, произведение, натуральная степень и частное, если делитель не равен нулю) **двух рациональных чисел всегда является рациональным числом.**

Решение

Пусть заданы два рациональных числа $r_1 = \frac{m_1}{n_1}$ и $r_2 = \frac{m_2}{n_2}$, где m_1 и m_2 — целые, а n_1 и n_2 — натуральные числа. Поскольку сумма, разность, произведение, натуральная степень и частное двух обыкновенных дробей всегда являются обыкновенными дробями, то полученный результат всегда будет рациональным числом. Например,

$$r_1 + r_2 = \frac{m_1}{n_1} + \frac{m_2}{n_2} = \frac{m_1 n_2 + n_1 m_2}{n_1 n_2},$$

где $m_1 n_2 + n_1 m_2$ — целое число, а $n_1 n_2$ — натуральное. ◁

Комментарий

Любое рациональное число может быть записано как дробь $\frac{m}{n}$, где m — целое, n — натуральное число. Чтобы доказать утверждение задачи, достаточно доказать, что сумма, разность, произведение и частное двух дробей вида $\frac{m}{n}$ также будет дробью такого вида.

Задача 2 Докажите, что **для любого натурального числа n число $\sqrt[m]{n}$ ($m \in N$)* или натуральное, или иррациональное.**

Комментарий

Для доказательства утверждения задачи можно использовать метод от противного: предположить, что заданное действительное положительное число является рациональным не натуральным (то есть дробью), и получить противоречие с условием или с каким-либо известным фактом.

Записывая $\sqrt[m]{n}$ в виде несократимой дроби, следует учесть, что при натуральных значениях n это число всегда будет положительным.

Решение

▶ Допустим, что $\sqrt[m]{n}$ не является иррациональным числом (тогда это число рациональное) и не является натуральным числом. Следовательно, это число может быть только рациональной несократимой дробью $\sqrt[m]{n}=\frac{p}{q}$, где p и q — натуральные числа ($q \neq 1$). По определению корня m-й степени имеем $n=\frac{p^m}{q^m}$, то есть $n=\frac{p\cdot p\cdot\ldots\cdot p}{\underbrace{q\cdot q\cdot\ldots\cdot q}_{m\text{ раз}}}$. Учитывая, что $q \neq 1$, получаем, что дробь $\frac{p\cdot p\cdot\ldots\cdot p}{q\cdot q\cdot\ldots\cdot q}$, равная натуральному числу n, должна быть сократимой. Следовательно, у натуральных множителей, которые стоят в числителе и знаменателе этой дроби, должен быть общий натуральный делитель, отличный от 1. Но в числителе стоят только множители p, а в знаменателе — только множители q. Тогда числа p и q имеют натуральный делитель, отличный от 1, то есть дробь $\frac{p}{q}$ является сократимой дробью, что противоречит условию. Таким образом, наше предположение неверно, и для любого натурального числа n число $\sqrt[m]{n}$ ($m \in N$) или натуральное, или иррациональное. ◁

Например, поскольку числа $\sqrt{3}$ и $\sqrt[3]{10}$ не являются натуральными числами $\left(1<\sqrt{3}<2,\ 2<\sqrt[3]{10}<3\right)$, то $\sqrt{3}$ и $\sqrt[3]{10}$ — иррациональные числа.

Задача 3* Докажите, что $\sqrt{3}+\sqrt[3]{5}$ — число иррациональное.

Решение

▶ Допустим, что число $\sqrt{3}+\sqrt[3]{5}=r$ — рациональное. Тогда $\sqrt[3]{5}=r-\sqrt{3}$. Возведя обе части последнего равенства в куб, имеем $5=r^3-3\sqrt{3}r^2+9r-3\sqrt{3}$. Отсюда

Комментарий

Для доказательства утверждения задачи можно использовать метод от противного: допустить, что заданное действительное число является рациональным и получить противоречие с каким-либо известным фактом,

* При $m=1$ условимся, что $\sqrt[m]{n}=\sqrt[1]{n}=n$.

$\sqrt{3}(3r^2+3)=r^3+9r-5$. Следовательно, $\sqrt{3}=\frac{r^3+9r-5}{3r^2+3}$. Но правая часть этого равенства рациональное число (поскольку по предположению r — рациональное число), а левая — иррациональное. Полученное противоречие означает, что наше предположение неверно и число $\sqrt{3}+\sqrt[3]{5}$ — иррациональное. ◁

например, с тем, что $\sqrt{3}$ — иррациональное число. При анализе полученных выражений используем результат задачи 1: *если число r — рациональное, то числа r^3+9r-5 и $3r^2+3$ и их частное тоже будут рациональными.*

Заметим, что при любом рациональном r знаменатель полученной дроби $3r^2+3\neq 0$.

Задача 4 Решите уравнение* $|2x+5|=7$.

Решение

I способ

▶ $2x+5=7$ или $2x+5=-7$,
$2x=2$ или $2x=-12$,
$x=1$ или $x=-6$.
Ответ: 1; –6. ◁

Комментарий

Заданное уравнение имеет вид $|t|=7$ (в данном случае $t=2x+5$). Его удобно решать, используя геометрический смысл модуля: $|2x+5|$ — это расстояние от точки 0 до точки $2x+5$. Но расстояние 7 может быть отложено от 0 как вправо (получаем число 7), так и влево (получаем число –7). Следовательно, равенство $|2x+5|=7$ возможно тогда и только тогда, когда $2x+5=7$ или $2x+5=-7$.

II способ

Решение

▶ $|2x-(-5)|=7$,

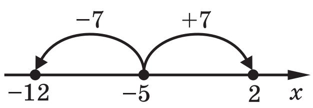


Рис. 6

$2x=2$ или $2x=-12$,
$x=1$ или $x=-6$.
Ответ: 1; –6.

Комментарий

С геометрической точки зрения $|a-b|$ — это расстояние между точками a и b на координатной прямой. Запишем заданное уравнение так: $|2x-(-5)|=7$. Тогда равенство $|2x-(-5)|=7$ означает, что расстояние от точки $2x$ до точки –5 равно 7. На расстоянии 7 от точки –5 находятся точки 2 и –12 (рис. 6). Следовательно, заданное равенство выполняется тогда и только тогда, когда $2x=2$ или $2x=-12$, то есть заданное уравнение равносильно этой совокупности уравнений.

* Решение уравнений и неравенств с модулями рассмотрено в учебнике для 10 класса — табл. 40 на с. 240 (см. также с. 392 учебника для 11 класса).

Задача 5 Решите неравенство $|x^2 - 5x| \leqslant 6$.

Решение

$-6 \leqslant x^2 - 5x \leqslant 6$,

$$\begin{cases} x^2 - 5x \leqslant 6, \\ x^2 - 5x \geqslant -6, \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 - 5x - 6 \leqslant 0, \\ x^2 - 5x + 6 \geqslant 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x+1)(x-6) \leqslant 0, \\ (x-2)(x-3) \geqslant 0. \end{cases}$$

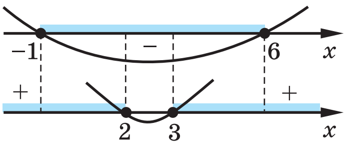


Рис. 7

Решая эти неравенства (рис. 7), получаем

$$\begin{cases} -1 \leqslant x \leqslant 6, \\ x \leqslant 2 \text{ или } x \geqslant 3. \end{cases}$$

Следовательно,

$-1 \leqslant x \leqslant 2$ или $3 \leqslant x \leqslant 6$.

Ответ: $[-1; 2] \cup [3; 6]$.

Комментарий

Заданное неравенство имеет вид $|t| \leqslant 6$ (в данном случае $t = x^2 - 5x$), и его можно решить, используя геометрический смысл модуля. С геометрической точки зрения, $|t|$ — это расстояние от точки 0 до точки t. На расстоянии 6 от 0 находятся числа 6 и −6. Тогда неравенству $|t| \leqslant 6$ удовлетворяют те и только те точки, которые находятся в промежутке $[-6; 6]$, то есть в промежутке $6 \leqslant t \leqslant 6$. Для решения полученного двойного неравенства его удобно заменить соответствующей системой.

Вопросы для контроля

1. Объясните, какие числа входят в множества целых, рациональных и действительных чисел. Приведите примеры. Изобразите соответствующие точки на координатной прямой.
2. Объясните, чем отличаются записи в виде бесконечной десятичной дроби рационального и иррационального чисел.
3. а) Дайте определение модуля действительного числа. Сформулируйте свойства модуля.
   б*) Обоснуйте свойства модуля действительного числа.

Упражнения

1. Объясните, почему заданное число не может быть рациональным:
   1) $1+\sqrt{2}$; 2) $\sqrt{3}-5$; 3) $\sqrt[3]{10}$.

2*. Докажите, что сумма (разность, произведение и частное) рационального и иррационального чисел всегда есть число иррациональное (произведение и частное только в том случае, когда заданное рациональное число не равно нулю).

3*. Докажите, что заданное число является иррациональным:
   1) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$; 2) $\sqrt{5}+\sqrt[3]{2}$; 3) $\lg 2$; 4) $\log_2 3$.

4. Пользуясь геометрическим смыслом модуля, изобразите на координатной прямой множество чисел, удовлетворяющих неравенству:

1°) $|x| \leqslant 2$; 2°) $|x| > 5$;

3) $|x-3| \leqslant 0{,}5$; 4) $|x+1| < 0{,}3$.

5. Решите уравнение:

1) $|3x+1| = 4$; 2) $|4x-2| = 6$;

3*) $||x-1|-2| = 1$; 4*) $||2x+3|-5| = 3$.

6. Решите неравенство:

1) $|2x-7| \leqslant 1$; 2) $|3x+5| > 7$;

3*) $||2x-1|+3| \geqslant 5$; 4*) $||4x+7|-11| < 4$.

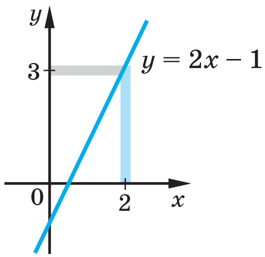
§2 ПОНЯТИЯ ПРЕДЕЛА ФУНКЦИИ В ТОЧКЕ И НЕПРЕРЫВНОСТИ ФУНКЦИИ

Таблица 2

1. Понятие предела функции в точке

Пусть задана некоторая функция, например $f(x) = 2x - 1$.

Рассмотрим график этой функции и таблицу ее значений в точках, которые на числовой прямой расположены достаточно близко к числу 2.



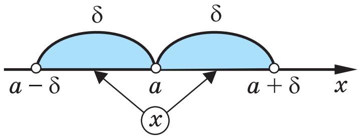
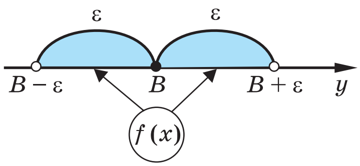
x	1,9	1,99	1,999	2,001	2,01	2,1
$f(x)$	2,8	2,98	2,998	3,002	3,02	3,2

Из таблицы и графика видно, что чем ближе аргумент x к числу 2 (это обозначают так: $x \to 2$ и говорят, что x *стремится к* 2), тем ближе значение функции $f(x) = 2x - 1$ к числу 3 (обозначают $f(x) \to 3$ и говорят, что $f(x)$ стремится к 3). Это записывают также так: $\lim\limits_{x\to 2}(2x-1) = 3$ (читается: «Лимит $2x - 1$ при x, стремящемся к 2, равен 3») и говорят, что предел функции $2x - 1$ при x, стремящемся к 2 (или *предел функции в точке* 2), равен 3.

В общем случае запись $\lim\limits_{x\to a} f(x) = B$ обозначает, что **при $x \to a$ $f(x) \to B$**, то есть B — число, к которому стремится значение функции $f(x)$, когда x стремится к a.

Продолж. табл. 2

2. Запись обозначений $x \to a$ и $f(x) \to B$ с помощью знака модуля

Обозначение и его смысл	Иллюстрация	Запись с помощью знака модуля
$x \to a$ На числовой прямой точка x находится от точки a на малом расстоянии (меньше δ).		$\lvert x-a \rvert < \delta$*
$f(x) \to B$ Значение $f(x)$ на числовой прямой находится на малом расстоянии от B (меньше ε).		$\lvert f(x)-B \rvert < \varepsilon$

3. Определение предела функции в точке**

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = B$	*Число B называется пределом функции $f(x)$ в точке a (при x, стремящемся к a), если для любого положительного числа ε найдется такое положительное число δ, что при всех $x \neq a$, удовлетворяющих неравенству $\lvert x-a \rvert < \delta$, выполняется неравенство $\lvert f(x)-B \rvert < \varepsilon$.*

4. Свойства предела функции

Смысл правил предельного перехода	Запись и формулировка правил предельного перехода
Если $f(x) = c$, то при $x \to a$ $f(x) \to c$	$\lim\limits_{x \to a} c = c$ *Предел постоянной функции равен самой постоянной.*
Если при $x \to a$ $f(x) \to A$ и $g(x) \to B$, то: $f(x) \pm g(x) \to A \pm B$	$\lim\limits_{x \to a}(f(x) \pm g(x)) = \lim\limits_{x \to a} f(x) \pm \lim\limits_{x \to a} g(x)$ *Предел суммы (разности) двух функций равен сумме (разности) их пределов, если пределы слагаемых существуют.*
$f(x) \cdot g(x) \to A \cdot B$	$\lim\limits_{x \to a}(f(x) \cdot g(x)) = \lim\limits_{x \to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to a} g(x)$ *Предел произведения двух функций равен произведению их пределов, если пределы множителей существуют.*

* Если значение x удовлетворяет неравенству $\lvert x-a \rvert < \delta$, то говорят, что точка x находится в δ-окрестности точки a.

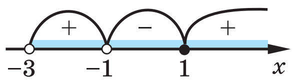
** Это определение обязательно только для классов физико-математического профиля.

Продолж. табл. 2

Смысл правил предельного перехода	Запись и формулировка правил предельного перехода
$c \cdot f(x) \to c \cdot A$	$\lim\limits_{x \to a}(c \cdot f(x)) = c \cdot \lim\limits_{x \to a} f(x)$ ***Постоянный множитель можно выносить за знак предела.***
$\dfrac{f(x)}{g(x)} \to \dfrac{A}{B}$ (где $B \neq 0$)	$\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)}$ $\left(\text{где } \lim\limits_{x \to a} g(x) \neq 0\right)$ ***Предел частного двух функций равен частному их пределов, если пределы числителя и знаменателя существуют и предел знаменателя не равен нулю.***
5. Непрерывность функции в точке	
Определение. *Функция $f(x)$ называется* ***непрерывной в точке a****, если при $x \to a$ $f(x) \to f(a)$*, то есть $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.	
Если функция $f(x)$ непрерывна в каждой точке некоторого промежутка I, то ее называют ***непрерывной на промежутке I****.*	
Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке a, то **сумма, произведение и частное непрерывных в точке a функций непрерывны в точке a** (*частное в случае, когда делитель $g(a) \neq 0$*).	
График функции, непрерывной на промежутке, — неразрывная линия на этом промежутке.	
Все элементарные функции непрерывны в каждой точке своей области определения, поэтому на каждом промежутке из области определения их графики — неразрывные линии.*	
Если на интервале (a, b) функция $f(x)$ непрерывна и не обращается в нуль, то она сохраняет постоянный знак на этом интервале.	

* Элементарными функциями обычно называют функции: $y = c$ ($c = const$); $y = x^n$, $n \in N$; $y = \sqrt[n]{x}$, $n \in N$; $y = a^x$ ($a > 0$); $y = \log_a x$ ($a > 0$, $a \neq 1$); $y = \sin x$; $y = \cos x$; $y = \operatorname{tg} x$; $y = \operatorname{ctg} x$; $y = \arcsin x$; $y = \arccos x$; $y = \operatorname{arctg} x$; $y = \operatorname{arcctg} x$ и все функции, которые получаются из перечисленных выше с помощью конечного количества действий сложения, вычитания, умножения, деления и образования сложной функции (функции от функции).

Продолж. табл. 2

6. Метод интервалов (решение неравенств вида $f(x) \gtrless 0$)	
План	Пример
1. Найти ОДЗ неравенства. **2. Найти нули функции:** $f(x)=0$. **3. Отметить нули на ОДЗ и найти знак функции $f(x)$ в каждом из промежутков, на которые разбивается ОДЗ.** **4. Записать ответ, учитывая знак данного неравенства.**	Решите неравенство $\frac{\log_2(x+3)-2}{\sqrt{x+5}-2}<0$. ▶ Пусть $f(x)=\frac{\log_2(x+3)-2}{\sqrt{x+5}-2}$. Поскольку функция $f(x)$ непрерывна на каждом из промежутков своей области определения (как частное двух непрерывных функций), то можно использовать метод интервалов. 1. ОДЗ: $\begin{cases} x+3>0, \\ x+5\geqslant 0, \\ \sqrt{x+5}-2\neq 0, \end{cases}$ $\begin{cases} x>-3, \\ x\geqslant -5, \\ \sqrt{x+5}\neq 2. \end{cases}$ Тогда $\begin{cases} x>-3, \\ x\neq -1. \end{cases}$ 2. Нули функции: $f(x)=0$. $\frac{\log_2(x+3)-2}{\sqrt{x+5}-2}=0$, $\log_2(x+3)-2=0$, $\log_2(x+3)=2$, $x+3=2^2$, $x=1$ (входит в ОДЗ). 3.  *Ответ:* $(-1;\ 1)$. ◁

Объяснение и обоснование

1. Понятие предела функции в точке. Простейшее представление о пределе функции можно получить, рассматривая график функции $y=2x-1$ (рис. 8). Из этого графика видно: чем ближе выбираются на оси Ox значения аргумента к числу 2 (это обозначается $x \to 2$ и читается: «x стремится к 2»), тем ближе будет значение $f(x)$ на оси Oy к числу 3.

Это можно записать так:

$f(x) \to 3$ при $x \to 2$, или $\lim\limits_{x\to 2}(2x-1)=3$.

Знак lim (читается: «Лимит») — краткая запись латинского слова *limes* (лимес), что в переводе означает «предел».

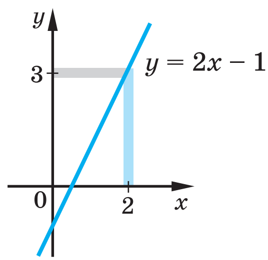


Рис. 8

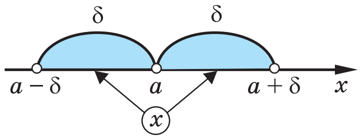


Рис. 9

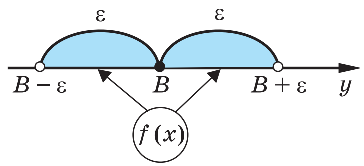


Рис. 10

В общем виде **запись $\lim\limits_{x\to a} f(x)=B$ означает, что при $x \to a$ значение $f(x) \to B$**, то есть B — число, к которому стремится значение функции $f(x)$, когда x стремится к a.

Чтобы дать определение предела функции $f(x)$ в точке a, напомним, что расстояние между точками x и a на координатной оси Ox — это модуль разности $|x-a|$, а расстояние между точками $f(x)$ и B на координатной оси Oy — это модуль разности $|f(x)-B|$.

Тогда запись $x \to a$ означает, что на числовой прямой точка x находится от точки a на малом расстоянии — например, меньше какого-то положительного числа δ (рис. 9). Это можно записать так: $|x-a|<\delta$. Обратим внимание, что запись $x \to a$ означает, что x стремится к a, но не обязательно x достигает значения a, поэтому в определении предела функции в точке a рассматриваются значения $x \neq a$. Также обратим внимание, что в этом случае, когда значение x удовлетворяет неравенству $|x-a|<\delta$, говорят, что точка x находится в δ-*окрестности точки* a.

Аналогично запись $f(x) \to B$ означает, что значение $f(x)$ на числовой прямой находится на малом расстоянии от B — например, меньше какого-то положительного числа ε (рис. 10). Это можно записать так: $|f(x)-B|<\varepsilon$.

Тогда можно дать следующее определение предела функции в точке: *число B называется пределом функции $f(x)$ в точке a (при x, стремящемся к a), если для любого положительного числа ε найдется такое положительное число δ, что при всех $x \neq a$, удовлетворяющих неравенству $|x-a|<\delta$, выполняется неравенство $|f(x)-B|<\varepsilon$.*

Нахождение числа B по функции f называют *предельным переходом*. При выполнении предельных переходов можно пользоваться такими правилами*:

Если нам известны пределы функций $f(x)$ и $g(x)$, то для выполнения предельного перехода над суммой, произведением или частным этих функций достаточно выполнить соответствующие операции над пределами этих функций (для частного только в том случае, когда предел знаменателя не равен нулю).

То есть если **при $x \to a$ $f(x) \to A$ и $g(x) \to B$**, то

$$\boxed{f(x)+g(x) \to A+B} \quad \boxed{f(x)\cdot g(x) \to A\cdot B} \quad \boxed{\frac{f(x)}{g(x)} \to \frac{A}{B}} \quad (\text{где } B \neq 0).$$

* Обоснование правил предельного перехода приведены в § 7, там же приведены примеры использования определения для доказательства того, что число B является пределом функции $f(x)$ при $x \to a$.

Отметим также, что в случае, когда функция $f(x)$ является постоянной, то есть $f(x) = c$, то при всех значениях x значение $f(x)$ равно c, следовательно, и при $x \to a$ значение $f(x) \to c$. То есть *предел постоянной равен самой постоянной*.

Обратим внимание, что, согласно определению предел функции $f(x)$, при x, стремящемся к a, можно вычислить и в том случае, когда значение $x = a$ не входит в область определения функции $f(x)$. Например, областью определения функции $f(x)=\frac{x}{x}$ являются все действительные числа, кроме числа 0. Для всех $x \neq 0$ выполняется равенство $\frac{x}{x}=1$. Тогда при $x \to 0$ значение $\frac{x}{x} \to 1$, то есть $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{x}=1$.

2. Понятие непрерывности функции. Если значение $x = a$ входит в область определения функции $f(x)$, то для многих функций при $x \to a$ значение $f(x) \to f(a)$, то есть $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$. Такие функции называются *непрерывными в точке a**. Если функция $f(x)$ непрерывна в каждой точке некоторого промежутка I, то ее называют непрерывной на промежутке I. Графики непрерывных функций изображаются непрерывными (неразрывными) кривыми на каждом промежутке, который полностью входит в область определения. На этом и основывается способ построения графиков «по точкам», которым мы постоянно пользовались. Строго говоря, при этом необходимо предварительно выяснить, действительно ли рассматриваемая функция является непрерывной. Все известные вам элементарные функции непрерывны в каждой точке своей области определения (см. также § 8), и это можно использовать при построении графиков и при вычислении пределов функций.

Например, поскольку многочлен является непрерывной функцией, то

$$\lim_{x\to 2}(x^3-3x+1)=f(2)=2^3-3\cdot 2+1=3.$$

Из правил предельного перехода следует, что в случае, когда ***функции f (x) и g (x) непрерывны в точке a***, **сумма, произведение и частное непрерывных в точке *a* функций непрерывны в точке *a*** (частное $\frac{f(x)}{g(x)}$ в случае, когда $g(a) \neq 0$).

Например, функция $f(x)=x^2+\sqrt[3]{x}$ непрерывна как сумма двух непрерывных функций.

(Действительно, $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a}(x^2+\sqrt[3]{x})=\lim\limits_{x\to a}x^2+\lim\limits_{x\to a}\sqrt[3]{x}=a^2+\sqrt[3]{a}=f(a)$, из этого следует, что функция $f(x)$ — непрерывная.)

Отметим еще одно важное свойство непрерывных функций, полное доказательство которого приводится в курсах математического анализа.

Если на интервале (a, b) функция $f(x)$ непрерывна и не обращается в нуль, то она на этом интервале сохраняет постоянный знак.

---

* Если в точке $x = a$ не выполняется условие $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$, то функция $f(x)$ называется разрывной в точке a (а сама точка a называется точкой разрыва функции $f(x)$).

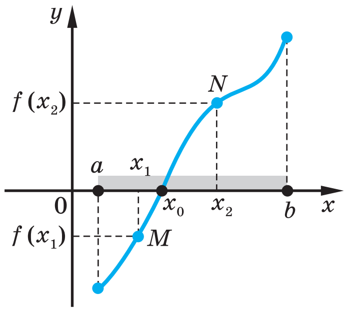


Рис. 11

Это свойство имеет простую наглядную иллюстрацию. Допустим, что функция $f(x)$ на заданном интервале изменила свой знак (например, «$-$» на «$+$»). Это означает, что в какой-то точке x_1 значение функции отрицательно ($f(x_1) < 0$), и тогда соответствующая точка M графика функции находится ниже оси Ox. В некоторой точке x_2 значение функции положительно ($f(x_2) > 0$), и соответствующая точка N графика находится выше оси Ox.

Но если график функции (который является неразрывной линией) перешел из нижней полуплоскости относительно оси Ox в в верхнюю, то он обязательно хотя бы один раз на заданном интервале пересек ось Ox, например в точке x_0 (рис. 11). Тогда $f(x_0) = 0$, что противоречит условию. Следовательно, наше предположение неверно, и на заданном интервале функция не может изменить свой знак.

На последнем свойстве непрерывных функций основывается метод решения неравенств с одной переменной, называемый *методом интервалов*, который мы применяли в 10 классе.

Действительно, если функция f непрерывна на интервале I и обращается в нуль в конечном числе точек этого интервала, то по сформулированному выше свойству непрерывных функций интервал I разбивается этими точками на интервалы, в каждом из которых непрерывная функция f сохраняет постоянный знак. Чтобы определить этот знак, достаточно вычислить значение функции f в любой точке каждого из таких интервалов.

Схема решения неравенств вида $f(x) \gtrless 0$ методом интервалов приведена в учебнике для 10 класса (с. 237) и в пункте 6 таблицы 2.

Примеры решения задач

Задача 1 Является ли функция непрерывной в каждой точке данного промежутка:

1) $f(x) = x^5 - 3x^2 + 2$, $(-\infty; +\infty)$;

2) $g(x) = \dfrac{x^3 - x}{2x - 6}$, $[5; +\infty)$; 3) $g(x) = \dfrac{x^3 - x}{2x - 6}$. $(0; +\infty)$?

Решение

▶ 1) Областью определения функции $f(x)$ является множество всех действительных чисел $\boldsymbol{R}$. Многочлен является непрерывной функцией в каждой точке своей области определения, поэтому в каждой точке промежутка $(-\infty; +\infty)$ функция $f(x)$ непрерывна.

Комментарий

Многочлен $f(x)$ и дробно-рациональная функция $g(x)$ являются непрерывными в каждой точке их области определения (в частности, функция $g(x)$ непрерывна как частное двух многочленов — непрерывных функций, при условии, что зна-

2), 3) Область определения функции $g(x)$: $x \neq 3$, то есть

$$D(g) = (-\infty; 3) \cup (3; +\infty).$$

Дробно-рациональная функция $g(x)$ является непрерывной в каждой точке ее области определения.

Промежуток $[5; +\infty)$ полностью входит в область определения этой функции, поэтому в каждой точке промежутка $[5;+\infty)$ функция $g(x)$ непрерывна.

Промежуток $(0; +\infty)$ содержит точку 3, которая не входит в область определения функции $g(x)$. Следовательно, в этой точке функция $g(x)$ не может быть непрерывной (не существует значение $g(3)$), поэтому функция $g(x)$ не является непрерывной в каждой точке промежутка $(0; +\infty)$. ◁

менатель дроби не равен нулю). Поэтому в каждом из заданий необходимо найти область определения данной функции и сравнить ее с заданным промежутком.

Если этот промежуток полностью входит в область определения соответствующей функции, то эта функция будет непрерывной в каждой точке заданного промежутка, а если нет, то функция не будет непрерывной в тех точках, которые не входят в ее область определения.

Задача 2 Выясните, к какому числу стремится функция $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 5}$ при $x \to 0$.

Решение

▶ Дробно-рациональная функция $f(x)$ является непрерывной в каждой точке ее области определения ($x \neq 5$). Число 0 входит в область определения этой функции, поэтому при $x \to 0$ значение

$$f(x) \to f(0) = \frac{0^2 - 1}{0 - 5} = \frac{1}{5}.$$

Ответ: $\frac{1}{5}$. ◁

Комментарий

Фактически в условии задачи говорится о нахождении предела функции $f(x)$ при $x \to 0$. Учитывая, что дробно-рациональная функция $f(x)$ является непрерывной в каждой точке ее области определения: $x \neq 5$ (как частное двух непрерывных функций — многочленов), получаем, что при $x \to 0$ значение $f(x) \to f(0)$. То есть $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0)$.

Задача 3* Найдите: 1) $\lim\limits_{x \to 3}(x^3 + 2x - 1)$; 2) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2 - 9}{x - 5}$; 3) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$.

Решение

▶ 1) Многочлен $f(x) = x^3 + 2x - 1$ является непрерывной функцией в каждой точке числовой прямой, поэтому $\lim\limits_{x \to 3}(x^3 + 2x - 1) = f(3) = 3^3 + 2 \cdot 3 - 1 = 32$;

Комментарий

Многочлены и дробно-рациональные функции являются непрерывными в каждой точке их областей определения. Это означает, что

2) Дробно-рациональная функция $f(x) = \frac{x^2-9}{x-5}$ является непрерывной в каждой точке ее области определения ($x \neq 5$). Число 1 входит в область определения этой функции, поэтому

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-9}{x-5} = f(1) = \frac{1^2-9}{1-5} = 2;$$

3) При $x \neq 1$

$\frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = x+1 = \varphi(x)$. Тогда

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x\to 1}(x+1) =$$
$$= \varphi(1) = 1+1 = 2. \quad \triangleleft$$

в том случае, когда число a (к которому стремится x) входит в область определения функции $f(x)$ (задания 1 и 2), получаем: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Если же число a не входит в область определения функции $f(x)$ (задание 3), то пытаемся выполнить тождественные преобразования выражения $f(x)$ при $x \neq a$, получить функцию, определенную при $x = a$, далее использовать непрерывность полученной функции при $x = a$ (в данном случае функции $\varphi(x) = x+1$ при $x = 1$).

Напомним, что обозначение $x \to a$ означает только то, что x стремится к a (но не обязательно x принимает значение a), и поэтому при $x \to 1$ значение $x+1 \to 1+1 = 2$.

Задача 4* Решите неравенство $\frac{\log_{x+3}(x^2+3)}{\log_{x+3}(x+5)} \geqslant 1$.

Решение

▶ Заданное неравенство равносильно неравенству $\frac{\log_{x+3}(x^2+3)}{\log_{x+3}(x+5)} - 1 \geqslant 0$.

Поскольку функция

$f(x) = \frac{\log_{x+3}(x^2+3)}{\log_{x+3}(x+5)} - 1$ непрерывна в каждом из промежутков своей области определения, то можно применить метод интервалов.

1. ОДЗ. Поскольку $x^2+3>0$ всегда, то ОДЗ задается условиями:

$$\begin{cases} x+3>0, \\ x+3\neq 1, \\ x+5>0, \\ \log_{x+3}(x+5)\neq 0. \end{cases} \quad \text{Тогда} \quad \begin{cases} x>-3, \\ x\neq -2, \\ x>-5, \\ x+5\neq 1. \end{cases}$$

То есть $x > -3$, $x \neq -2$.

Комментарий

Заданное неравенство можно решить или с помощью равносильных преобразований, или методом интервалов. Если мы выберем метод интервалов, то сначала неравенство необходимо привести к виду $f(x) \geqslant 0$.

Для того чтобы решить неравенство методом интервалов, достаточно убедиться, что функция $f(x)$ непрерывна (это требование всегда выполняется для всех элементарных функций $f(x)$), и использовать известную схему решения:

1) *Найти ОДЗ неравенства.*
2) *Найти нули функции:* $f(x) = 0$.
3) *Отметить нули на ОДЗ и найти знак функции* $f(x)$ *в каждом из промежутков, на которые разбивается ОДЗ.*

2. Нули $f(x)$: $\frac{\log_{x+3}(x^2+3)}{\log_{x+3}(x+5)}-1=0$. На ОДЗ это уравнение равносильно уравнениям:
$\log_{x+3}(x^2+3)=\log_{x+3}(x+5)$,
$x^2+3=x+5$, $x^2-x-2=0$,
$x_1=-1$, $x_2=2$ (оба корня входят в ОДЗ).
3. Отмечаем нули функции на ОДЗ и находим знак $f(x)$ в каждом из промежутков, на которые разбивается ОДЗ (рис. 12).

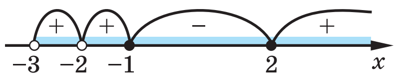


Рис. 12

4. *Ответ*:
$(-3; -2) \cup (-2; -1] \cup [2; +\infty)$. ◁

4) *Записать ответ, учитывая знак данного неравенства.*

При нахождении нулей $f(x)$ можно следить за равносильностью выполненных (на ОДЗ) преобразований полученного уравнения, а можно использовать уравнения-следствия и в конце выполнить проверку найденных корней.

Записывая ответ к нестрогому неравенству, следует учесть, что все нули функции должны войти в ответ
(в данном случае — числа -1 и 2).

Чтобы найти знак функции $f(x)$ в каждом из полученных промежутков, достаточно сравнить величину дроби $\frac{\log_{x+3}(x^2+3)}{\log_{x+3}(x+5)}$ с единицей в любой точке из выбранного промежутка. (Для этого можно использовать график функции $y=\log_a t$ при $a>1$ и при $0<a<1$.)

Вопросы для контроля

1. Объясните, что обозначают записи $x \to a$ и $f(x) \to B$.
2. Объясните, что обозначает запись $\lim\limits_{x\to a} f(x)=B$.
3. Если при $x \to a$ $f(x) \to A$ и $g(x) \to B$, то к каким числам при $x \to a$ будут стремиться функции: $f(x) \pm g(x)$; $f(x) \cdot g(x)$; $\frac{f(x)}{g(x)}$ (если $B \neq 0$)?
4. Когда функция $f(x)$ называется непрерывной в точке a? Приведите примеры.
5. Какая функция называется непрерывной на промежутке? Что можно сказать о графике такой функции на рассмотренном промежутке?
6. На каком свойстве непрерывной функции основывается метод решения неравенств вида $f(x) \gtrless 0$? Объясните, опираясь на графическую иллюстрацию, справедливость этого свойства.
7. Охарактеризуйте план решения неравенства вида $f(x) \gtrless 0$ методом интервалов. Приведите пример решения неравенства методом интервалов.

Упражнения

1°. Является ли непрерывной в каждой из точек $x = -1$, $x = 1$, $x = 3$ функция, график которой изображен на рисунке 13?

2. Является ли функция непрерывной в каждой точке данного промежутка:

1) $f(x) = x^2 - 3x$, $(-\infty; +\infty)$; 2) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 2}$, $(0; +\infty)$;

3) $f(x) = \dfrac{x - 3}{x - 1}$, $[2; +\infty)$?

3. Выясните, к какому числу стремится функция $f(x)$, если:

1) $f(x) = x^2 - 5x + 1$ при $x \to 1$; 2) $f(x) = \dfrac{2x + 5}{x^3 - 7}$ при $x \to 2$;

3) $f(x) = \dfrac{x^2 + x}{x^3}$ при $x \to -1$; 4) $f(x) = \dfrac{2x}{x^2 - x}$ при $x \to 3$.

4*. Найдите:

1) $\lim\limits_{x \to 2} (x^2 + x + 5)$; 2) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3 + 2x}{4x + 1}$; 3) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x - 3}{x^2 - 9}$; 4) $\lim\limits_{x \to -4} \dfrac{x^2 - 16}{x + 4}$.

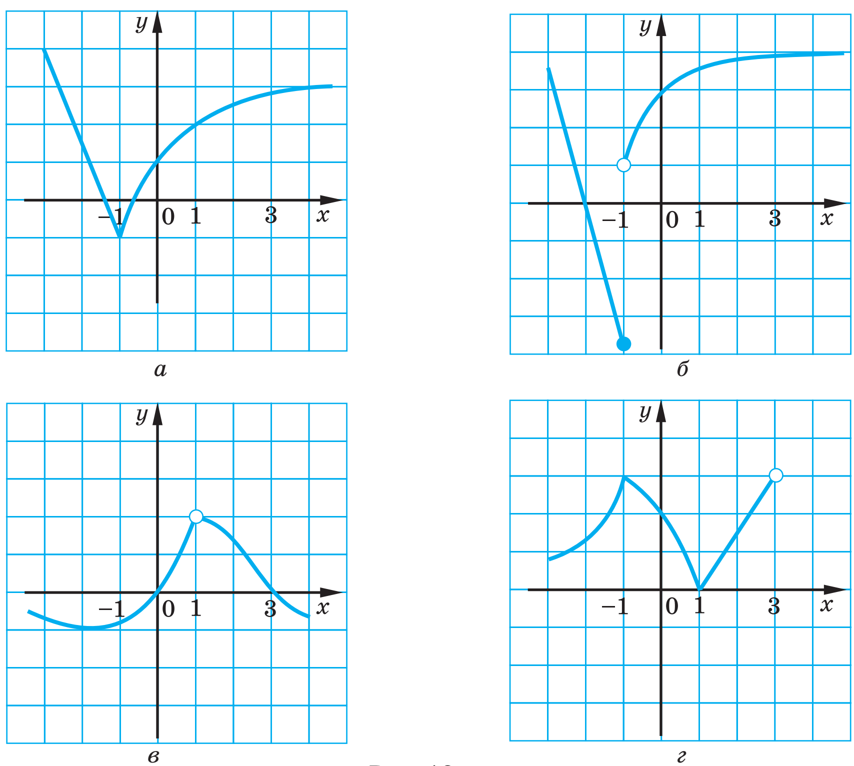


Рис. 13

5. Решите неравенство методом интервалов:

1) $(x^2-4)\log_{\frac{1}{2}} x \leqslant 0$; 2) $\dfrac{2^x-1}{2x-1} > 0$; 3) $\dfrac{3x^2-2x-1}{\log_3(x-1)} < 0$; 4) $\dfrac{\sqrt{2x-2}-2}{x^2-16} \geqslant 0$.

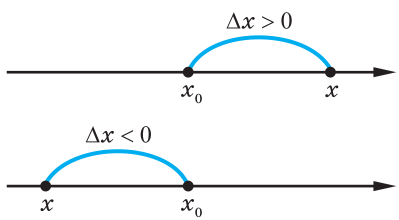
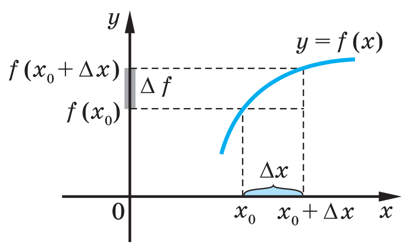
6. Найдите область определения функции:

1) $y=\sqrt{\dfrac{\log_3(x+1)}{x-1}}$; 2) $y=\log_5\left(x-\sqrt{2x-1}\right)$;

3) $y=\sqrt{(x^4-4x^2+3)|2x-3|}$; 4) $y=\left(\dfrac{\log_{0,4}(x-1)}{2-x}\right)^{\frac{1}{2}}$.

§3 ПОНЯТИЕ ПРОИЗВОДНОЙ, ЕЕ МЕХАНИЧЕСКИЙ И ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ

Таблица 3

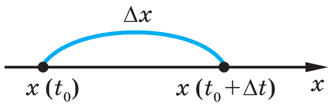
<table>
<tr><td colspan="2">1. Понятия приращения аргумента и приращения функции в точке x_0</td></tr>
<tr><td colspan="2">**Пусть x — произвольная точка, лежащая в некоторой окрестности фиксированной точки x_0 из области определения функции $f(x)$**</td></tr>
<tr><td>Приращение аргумента</td><td>Приращение функции</td></tr>
<tr><td>$\Delta x = x - x_0$
</td><td>$\Delta f = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$
</td></tr>
<tr><td colspan="2">2. Запись непрерывности функции через приращения аргумента и функции</td></tr>
<tr><td colspan="2">*Функция $f(x)$ будет непрерывной в точке x_0 тогда и только тогда, когда малому изменению аргумента в точке x_0 отвечают малые изменения значений функции, то есть*

Функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 $\Leftrightarrow$ При $\Delta x \to 0$ $\Delta f \to 0$</td></tr>
</table>

Продолж. табл. 3

3. Задачи, приводящие к понятию производной

I. Мгновенная скорость движения точки по прямой

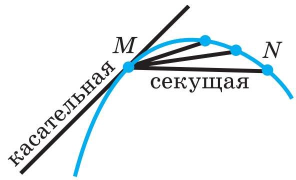


($x\,(t)$ — координата x точки в момент времени t)

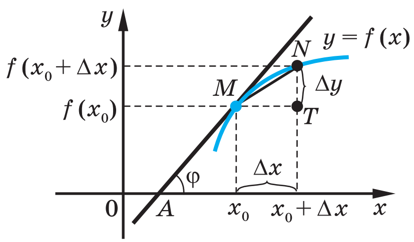
$$v_{ср} = \frac{x(t_0+\Delta t)-x(t_0)}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t};$$

$$\boxed{v_{мгн} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t}}.$$

II. Касательная к графику функции



Касательной к графику функции в данной точке M называется предельное положение секущей MN.



Когда точка N приближается к точке M (двигаясь по графику функции $y = f\,(x)$), то величина угла NMT приближается к величине угла φ наклона касательной MA к оси Ox.

Поскольку $\operatorname{tg}\angle NMT = \frac{NT}{MT} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$, то

$$\boxed{\operatorname{tg}\varphi = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}}$$

4. Определение производной

$$y = f\,(x)$$

$$y' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$\boxed{y' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}}$$

Производной функции $y = f\,(x)$ в точке x_0 **называется предел отношения приращения функции в точке x_0 к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю.**

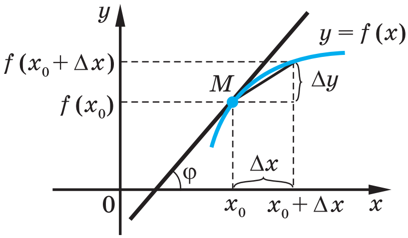
Операция нахождения производной называется *дифференцированием*.

5. Производные некоторых элементарных функций

$c' = 0$ (c — постоянная)	$(x)' = 1$	$(x^2)' = 2x$	$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$ $(x \neq 0)$	$\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ $(x > 0)$

Продолж. табл. 3

6. Геометрический смысл производной и уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$



$f'(x_0) = \operatorname{tg} \varphi$

k — угловой коэффициент касательной

$\boxed{k = \operatorname{tg} \varphi = f'(x_0)}$

$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ — уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0

Значение производной в точке x_0 равно тангенсу угла наклона касательной к графику функции в точке с абсциссой x_0 и угловому коэффициенту этой касательной.

(*Угол отсчитывается от положительного направления оси Ox против часовой стрелки.*)

7. Механический смысл производной

Производная характеризует скорость изменения функции при изменении аргумента

$s = s(t)$ — зависимость пройденного пути от времени

$v = s'(t)$ — **скорость** прямолинейного движения

$a = v'(t)$ — **ускорение** прямолинейного движения

В частности, *производная по времени является мерой скорости изменения соответствующей функции. Производную по времени используют для описания различных физических величин.*

Например, **мгновенная скорость v неравномерного прямолинейного движения — это производная функции, выражающей зависимость пройденного пути s от времени t.**

8. Зависимость между дифференцируемостью и непрерывностью функции

Если функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то она непрерывна в этой точке.

Если функция $f(x)$ дифференцируема на промежутке (то есть в каждой его точке), то она непрерывна на этом промежутке.

Объяснение и обоснование

1. Понятия приращения аргумента и приращения функции. Часто нас интересует не значение какой-то величины, а ее приращение. Например, сила упругости пружины пропорциональна удлинению пружины, работа — это изменение энергии и т. д.

Приращение аргумента или функции традиционно обозначают большой буквой греческого алфавита Δ (дельта). Дадим определение приращения аргумента и приращения функции.

Пусть x — произвольная точка, лежащая в некоторой окрестности фиксированной точки x_0 из области определения функции $f(x)$.

Разность $x - x_0$ называется *приращением независимой переменной* (или приращением аргумента) в точке x_0 и обозначается Δx (читается: «Дельта икс»). Таким образом,

$$\Delta x = x - x_0.$$

Из этого равенства имеем

$$x = x_0 + \Delta x, \qquad (1)$$

то есть первоначальное значение аргумента x_0 получило приращение Δx. Отметим, что при $\Delta x > 0$ значение x больше, чем x_0, а при $\Delta x < 0$ значение x меньше, чем x_0 (рис. 14).

Тогда значение функции изменилось на величину $\Delta f = f(x) - f(x_0)$.

Учитывая равенство (1), получаем, что функция изменилась на величину

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \qquad (2)$$

(рис. 15), которая **называется *приращением функции f в точке x_0*, что соответствует приращению аргумента Δx** (символ Δf читается: «Дельта еф»).

Из равенства (2) получаем $f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \Delta f$.

Обратим внимание на то, что при фиксированном x_0 приращение Δf является функцией от приращения Δx.

Если функция задается формулой $y = f(x)$, то Δf называют также приращением зависимой переменной y и обозначают через Δy.

Например, если $y = f(x) = x^2$, то приращение Δy, соответствующее приращению Δx, равно:

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = (x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2 = x_0^2 + 2x_0 \cdot \Delta x + (\Delta x)^2 - x_0^2 = 2x_0 \cdot \Delta x + (\Delta x)^2.$$

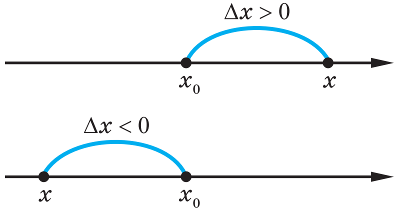


Рис. 14

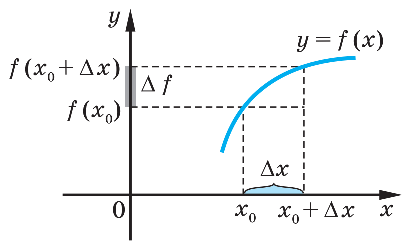


Рис. 15

2. Запись непрерывности функции через приращения аргумента и функции. Напомним, что функция $f(x)$ является непрерывной в точке x_0, если при $x \to x_0$ $f(x) \to f(x_0)$, то есть $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. Но если $x \to x_0$, то $x - x_0 \to 0$, то есть $\Delta x \to 0$ (и наоборот, если $\Delta x \to 0$, то $x - x_0 \to 0$, то есть $x \to x_0$). Следовательно, условие $x \to x_0$ эквивалентно условию $\Delta x \to 0$. Аналогично утверждение $f(x) \to f(x_0)$ эквивалентно условию $f(x) - f(x_0) \to 0$, то есть $\Delta f \to 0$. Таким образом, *функция* $f(x)$ *будет непрерывной в точке* x_0 *тогда и только тогда, когда при* $\Delta x \to 0$ $\Delta f \to 0$, *то есть если малым изменениям аргумента в точке* x_0 *соответствуют малые изменения значений функции*. Именно вследствие этого свойства графики непрерывных функций изображаются непрерывными (неразрывными) кривыми на каждом из промежутков, которые полностью входят в область определения функции.

3. Задачи, приводящие к понятию производной.

I. Мгновенная скорость движения точки по прямой. Рассмотрим задачу, известную из курса физики, — движение материальной точки по прямой. Пусть координата x точки в момент времени t равна $x(t)$. Как и в курсе физики, будем считать, что движение происходит непрерывно (как это мы наблюдаем в реальной жизни). Попробуем по известной зависимости $x(t)$ определить скорость, с которой точка движется в момент времени t_0 (так называемую мгновенную скорость). Рассмотрим промежуток времени от t_0 до $t = t_0 + \Delta t$ (рис. 16). Определим среднюю скорость на промежутке $[t_0; t_0 + \Delta t]$ как отношение пройденного пути к времени движения:

$$v_{\text{ср}} = \frac{x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t}.$$

Для определения мгновенной скорости точки в момент времени t_0 сделаем так, как вы делали на уроках физики: возьмем промежуток времени продолжительности Δt, вычислим среднюю скорость на этом промежутке и начнем уменьшать промежуток Δt до нуля (то есть уменьшать отрезок $[t_0; t]$ и приближать t к t_0). Мы заметим, что значение средней скорости при стремлении Δt к нулю будет стремиться к некоторому числу, которое и считается значением скорости в момент времени t_0. Иными словами, *мгновенной скоростью* в момент времени t_0 называется предел отношения $\frac{\Delta x}{\Delta t}$, если $\Delta t \to 0$, то есть

$$\boxed{v_{\text{мгн}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}.}$$

Например, рассмотрим свободное падение тела. Из курса физики известно, что в этом случае зависимость пути от времени задается формулой

$$s(t) = \frac{gt^2}{2}.$$

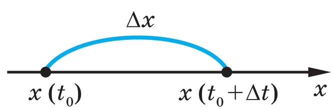


Рис. 16

1) Найдем сначала Δs:

$$\Delta s = s(t_0+\Delta t)-s(t_0)=\frac{g(t_0+\Delta t)^2}{2}-\frac{gt_0^2}{2}=\frac{g(t_0^2+2t_0\Delta t+(\Delta t)^2-t_0^2)}{2}=\frac{g(2t_0\Delta t+(\Delta t)^2)}{2}.$$

2) Найдем среднюю скорость: $v_{\text{ср}}(t_0)=\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{g(2t_0\Delta t+(\Delta t)^2)}{2\Delta t}=gt_0+\frac{g\Delta t}{2}.$

3) Выясним, к какому числу стремится отношение $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ при $\Delta t\to 0$: это и будет мгновенная скорость в момент времени t_0.

   Если $\Delta t\to 0$, то $\frac{g\Delta t}{2}=\frac{g}{2}\cdot\Delta t\to 0,$ а поскольку величина gt_0 постоянная, то $gt_0+\frac{g\Delta t}{2}\to gt_0$. Последнее число и является значением мгновенной скорости точки в момент времени t_0. Мы получили известную из физики формулу $v = gt$ (тогда $v(t_0) = gt_0$). Используя понятие предела, это можно записать так: $v(t_0)=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=gt_0$.

II. Касательная к графику функции. Наглядное представление о касательной к кривой можно получить, изготовив кривую из плотного матириала (например, из проволоки) и прикладывая к кривой линейку в выбраной точке (рис. 17). Если мы изобразим кривую на бумаге, а затем будем вырезать фигуру, ограниченную этой кривой, то ножницы также будут направлены по касательной к кривой.

Попробуем перевести наглядное представление о касательной на более точный язык.

Пусть задана некоторая кривая и точка M на ней (рис. 18). Возьмем на этой прямой другую точку N и проведем прямую через точки M и N. Эту прямую обычно называют *секущей*. Начнем приближать точку N к точке M. Положение секущей MN будет изменяться, но при приближении точки N к точке M оно начнет стабилизироваться.

Касательной **к кривой в данной точке M называется предельное положение секущей MN.**

Чтобы записать это определение с помощью формул, будем считать, что кривая — это график функции $y = f(x)$, а точка M, находящаяся на графике, задана своими координатами $(x_0; y_0) = (x_0; f(x_0))$. Касательной является не-

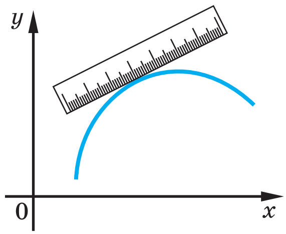


Рис. 17

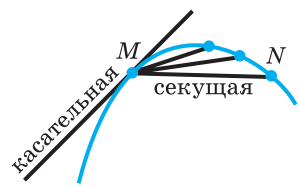


Рис. 18

которая прямая, проходящая через точку M (рис. 19).

Чтобы построить эту прямую, достаточно знать угол φ наклона касательной* к оси Ox.

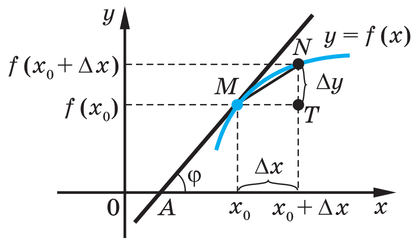


Рис. 19

Пусть точка N (через которую проходит секущая MN) имеет абсциссу $x_0 + {}$ $+ \Delta x$. Когда точка N, двигаясь по графику функции $y = f(x)$, приближается к точке M (это будет при $\Delta x \to 0$), то величина угла NMT приближается к величине угла φ наклона касательной MA к оси Ox. Поскольку $\operatorname{tg} \angle NMT = \frac{NT}{MT} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$, то при $\Delta x \to 0$ значение $\operatorname{tg} \angle NMT$ приближается к $\operatorname{tg} \varphi$, то есть

$$\boxed{\operatorname{tg} \varphi = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}}.$$

Фактически мы пришли к той же задаче, что и при нахождении мгновенной скорости: найти предел отношения выражения вида $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ (где $y = f(x)$ — заданная функция) при $\Delta x \to 0$. Найденное таким образом число называют *производной* функции $y = f(x)$ в точке x_0.

4. Определение производной.

***Производной функции $y = f(x)$ в точке x_0* называется предел отношения приращения функции в точке x_0 к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю.**

Производная функции $y = f(x)$ в точке x_0 обозначается $f'(x_0)$ (или $y'(x_0)$) и читается: «Еф штрих в точке x_0». Коротко определение производной функции $y = f(x)$ можно записать так:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Учитывая определение приращения функции $y = f(x)$ в точке x_0, соответствующего приращению Δx, определение производной можно записать также следующим образом:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Функцию $f(x)$, имеющую производную в точке x_0, называют *дифференцируемой* в этой точке. Если функция $f(x)$ имеет производную в каждой точке некоторого промежутка, то говорят, что эта функция *дифференцируема на этом промежутке*. Операция нахождения производной называется *дифференцированием*.

* Будем рассматривать невертикальную касательную (то есть $\varphi \neq 90^\circ$).

Для нахождения производной функции $y = f(x)$ по определению можно пользоваться такой *схемой*:

1. *Найти приращение функции* $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$, *соответствующее приращению аргумента* Δx.
2. *Найти отношение* $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.
3. *Выяснить, к какому пределу стремится отношение* $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ *при* $\Delta x \to 0$. *Это и будет производной данной функции.*

5. Производные некоторых элементарных функций. Обоснуем, пользуясь предложенной схемой, формулы, приведенные в пункте 5 таблицы 3.

1. Вычислим производную функции $y = c$ (то есть $f(x) = c$), где c — постоянная.

1) Найдем приращение функции, соответствующее приращению аргумента Δx:
$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = c - c = 0.$$
2) Найдем отношение $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{0}{\Delta x} = 0.$
3) Поскольку отношение $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ постоянно и равно нулю, то и предел этого отношения при $\Delta x \to 0$ также равен нулю. Следовательно, $y' = 0$, то есть
$$c' = 0.$$

2. Вычислим производную функции $y = x$ (то есть $f(x) = x$).

1) $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = x_0 + \Delta x - x_0 = \Delta x.$
2) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{\Delta x}{\Delta x} = 1.$
3) Поскольку отношение $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ постоянно и равно 1, то и предел этого отношения при $\Delta x \to 0$ также равен единице. Следовательно, $y' = 1$, то есть
$$x' = 1.$$

3. Вычислим производную функции $y = x^2$ (то есть $f(x) = x^2$).

1) $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = (x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2 = x_0^2 + 2x_0 \cdot \Delta x + (\Delta x)^2 - x_0^2 =$
$$= 2x_0 \cdot \Delta x + (\Delta x)^2.$$
2) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{2x_0 \cdot \Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = 2x_0 + \Delta x.$
3) При $\Delta x \to 0$ значение $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 2x_0 + \Delta x \to 2x_0$. Это означает, что $y'(x_0) = 2x_0$. Тогда производная функции $y = x^2$ в произвольной точке x равна: $y'(x) = 2x$. Таким образом,
$$(x^2)' = 2x.$$

4. Вычислим производную функции $y=\frac{1}{x}$ (то есть $f(x)=\frac{1}{x}$).

1) $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=\frac{1}{x_0+\Delta x}-\frac{1}{x_0}=\frac{x_0-(x_0+\Delta x)}{(x_0+\Delta x)x_0}=\frac{-\Delta x}{(x_0+\Delta x)x_0}$.

2) $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{-\Delta x}{(x_0+\Delta x)x_0\cdot\Delta x}=\frac{-1}{(x_0+\Delta x)x_0}$.

3) При $\Delta x\to 0$ значение $x_0+\Delta x\to x_0$. Тогда $\frac{\Delta y}{\Delta x}\to\frac{-1}{x_0\cdot x_0}=-\frac{1}{x_0^2}$. Это означает, что $y'(x_0)=-\frac{1}{x_0^2}$. Тогда производная функции $y=\frac{1}{x}$ в произвольной точке x из ее области определения (то есть при $x\neq 0$) равна: $y'(x)=-\frac{1}{x^2}$. Следовательно,

$$\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}.$$

5. Вычислим производную функции $y=\sqrt{x}$ (то есть $f(x)=\sqrt{x}$).

1) $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=\sqrt{x_0+\Delta x}-\sqrt{x_0}$. Умножим и разделим полученное выражение на сумму $\sqrt{x_0+\Delta x}+\sqrt{x_0}$ и запишем Δy следующим образом:

$$\Delta y=\frac{\left(\sqrt{x_0+\Delta x}-\sqrt{x_0}\right)\left(\sqrt{x_0+\Delta x}+\sqrt{x_0}\right)}{\sqrt{x_0+\Delta x}+\sqrt{x_0}}=\frac{x_0+\Delta x-x_0}{\sqrt{x_0+\Delta x}+\sqrt{x_0}}=\frac{\Delta x}{\sqrt{x_0+\Delta x}+\sqrt{x_0}}.$$

2) $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta x}{\left(\sqrt{x_0+\Delta x}+\sqrt{x_0}\right)\cdot\Delta x}=\frac{1}{\sqrt{x_0+\Delta x}+\sqrt{x_0}}$.

3) При $\Delta x\to 0$ значение $x_0+\Delta x\to x_0$. Тогда $\frac{\Delta y}{\Delta x}\to\frac{1}{\sqrt{x_0}+\sqrt{x_0}}=\frac{1}{2\sqrt{x_0}}$.

Это означает, что $y'(x_0)=\frac{1}{2\sqrt{x_0}}$ (при $x_0\neq 0$). Тогда производная функции $y=\sqrt{x}$ в произвольной точке x из области определения функции, кроме $x=0$ (то есть при $x>0$), равна: $y'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$. Следовательно,

$$\left(\sqrt{x}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

6. Геометрический смысл производной и уравнение касательной к графику функции $y=f(x)$. Учитывая определение производной функции $y=f(x)$, запишем результаты, полученные при рассмотрении касательной к графику функции (с. 35).

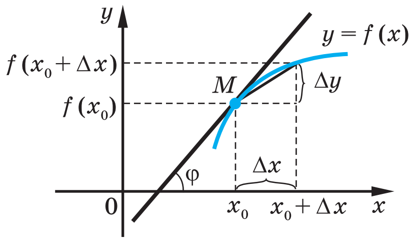


Рис. 20

Как было обосновано выше, тангенс угла φ наклона касательной в точке M с абсциссой x_0 (рис. 20) вычисляется по формуле $\operatorname{tg}\varphi=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$. С другой стороны, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0)$, тогда

$$f'(x_0)=\operatorname{tg}\varphi.$$

Напомним, что в уравнении прямой $y = kx + b$ угловой коэффициент k равен тангенсу угла φ наклона прямой к оси Ox (угол отсчитывается от положительного направления оси Ox против часовой стрелки). Следовательно, если k — угловой коэффициент касательной, то $k = \operatorname{tg}\varphi = f'(x_0)$. То есть

значение производной в точке x_0 равно тангенсу угла наклона касательной к графику функции в точке с абсциссой x_0 и равно угловому коэффициенту этой касательной

(*угол отсчитывается от положительного направления оси Ox против часовой стрелки*).

Таким образом, если $y = kx + b$ — уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке M с абсциссой x_0 (и ординатой $f(x_0)$), то $k = f'(x_0)$. Тогда уравнение касательной можно записать так: $y = f'(x_0)\cdot x + b$. Чтобы найти значение b, учтем, что эта касательная проходит через точку $M(x_0; f(x_0))$. Следовательно, координаты точки M удовлетворяют последнему уравнению, то есть $f(x_0) = f'(x_0)\cdot x_0 + b$. Отсюда $b = f(x_0) - f'(x_0)\cdot x_0$, и уравнение касательной имеет вид $y = f'(x_0)\cdot x + f(x_0) - f'(x_0)\cdot x_0$. Его удобно записать так:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Это уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0.

Замечание. Угол φ, который образует невертикальная касательная к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0 с положительным направлением оси Ox, может быть нулевым, острым или тупым. Учитывая геометрический смысл производной, получаем, что *в случае, когда* $f'(x_0) > 0$ (то есть $\operatorname{tg}\varphi > 0$), угол φ будет острым, *а в случае, когда* $f'(x_0) < 0$ (то есть $\operatorname{tg}\varphi < 0$), угол φ будет тупым. *Если* $f'(x_0) = 0$ (то есть $\operatorname{tg}\varphi = 0$), то $\varphi = 0$ (то есть *касательная параллельна оси Ox или совпадает с ней*). И наоборот, *если касательная к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0 образует с положительным направлением оси Ox острый угол φ, то* $f'(x_0) > 0$, *если тупой угол* — то $f'(x_0) < 0$, *а если касательная параллельна оси Ox или совпадает с ней* ($\varphi = 0$), то $f'(x_0) = 0$.

Если же касательная образует с осью Ox прямой угол ($\varphi = 90^\circ$), *то функция $f(x)$ производной в точке x_0 не имеет* ($\operatorname{tg}90^\circ$ не существует).

7. Механический смысл производной. Записывая определение производной в точке t_0 для функции $x(t)$:

$$x'(t_0)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t}$$

и сопоставляя полученный результат с понятием мгновенной скорости прямолинейного движения:

$$v_{\text{мгн}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t},$$

можно сделать вывод, что *производная характеризует скорость изменения функции при изменении аргумента*.

В частности, *производная по времени является мерой скорости изменения соответствующей функции, что может применяться к разнообразнейшим физическим величинам*. Например, мгновенная скорость v неравномерного прямолинейного движения является производной функции, выражающей зависимость пройденного пути s от времени t; ускорение a неравномерного прямолинейного движения является производной функции, выражающей зависимость скорости v от времени t.

Если $s = s(t)$ — зависимость пройденного пути от времени, то
$v = s'(t)$ — *скорость* прямолинейного движения $(v = v(t))$;
$a = v'(t)$ — *ускорение* прямолинейного движения.

8. Связь между дифференцируемостью и непрерывностью функции.

Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то в этой точке существует ее производная $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$. То есть при $\Delta x \to 0$ значение $\frac{\Delta y}{\Delta x} \to f'(x_0)$.

Для обоснования непрерывности функции $y = f(x)$ достаточно обосновать, что при $\Delta x \to 0$ значение $\Delta y \to 0$.

Действительно, при $\Delta x \to 0$ получаем: $\Delta y = \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \Delta x \to f'(x_0) \cdot 0 = 0$. Из этого следует, что функция $y = f(x)$ непрерывна в точке x_0. Таким образом, **если функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то она непрерывна в этой точке.**

Из этого утверждения следует:

если функция $f(x)$ дифференцируема на промежутке (то есть в каждой его точке), то она непрерывна на этом промежутке.

Отметим, что *обратное утверждение неверно*. Функция, непрерывная на промежутке, может не иметь производной в некоторых точках этого промежутка.

Например, функция $y = |x|$ (рис. 21) непрерывна при всех значениях x, но она не имеет производной в точке $x = 0$. Действительно, если $x_0 = 0$ и $y = f(x) = |x|$, то

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{|0 + \Delta x| - |0|}{\Delta x} = \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \begin{cases} 1, \text{ если } \Delta x > 0, \\ -1, \text{ если } \Delta x < 0. \end{cases}$$

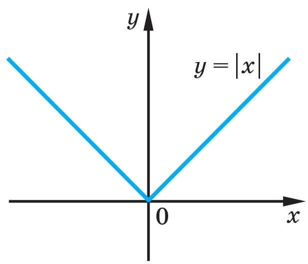


Рис. 21

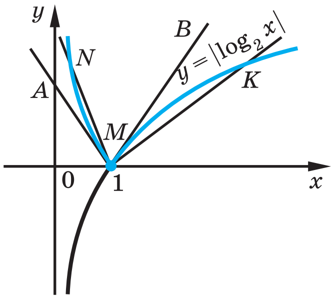


Рис. 22

Поэтому при $\Delta x \to 0$ отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ не имеет предела, а значит, и функция $y = |x|$ не имеет производной в точке 0.

Замечание. Тот факт, что непрерывная функция $f(x)$ не имеет производной в точке x_0, означает, что к графику этой функции в точке с абсциссой x_0 нельзя провести касательную (или соответствующая касательная перпендикулярна к оси Ox). График в этой точке будет иметь излом.

Например, к графику непрерывной функции $y = |\log_2 x|$ (рис. 22) в точке M с абсциссой $x = 1$ нельзя провести касательную (а значит, эта функция не имеет производной в точке 1). Действительно, по определению касательная — это предельное положение секущей. Если точка N будет приближаться к точке M по левой части графика, то секущая MN займет предельное положение MA. Если же точка K будет приближаться к точке M по правой части графика, то секущая MK займет предельное положение MB. Но это две разные прямые, следовательно, в точке M касательной к графику данной функции не существует.

Примеры решения задач

Задача 1 Найдите тангенс угла φ наклона касательной, проведенной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0, к оси Ox, если:
1) $f(x)=\frac{1}{x}$, $x_0 = 1$; 2) $f(x)=\sqrt{x}$, $x_0 = 25$.

Решение	Комментарий
1) ▶ По геометрическому смыслу производной $\operatorname{tg}\varphi = f'(x_0)$. Учитывая, что $f'(x)=\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$, получаем $$f'(x_0)=f'(1)=-\frac{1}{1^2}=-1.$$ Следовательно, $\operatorname{tg}\varphi = f'(1) = -1$. ◁ 2) ▶ Поскольку $f'(x)=\left(\sqrt{x}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$, то $f'(x_0)=f'(25)=\frac{1}{2\sqrt{25}}=\frac{1}{10}$. По геометрическому смыслу производной $\operatorname{tg}\varphi = f'(x_0)$. Следовательно, $\operatorname{tg}\varphi = f'(25) = 0{,}1$. ◁	По геометрическому смыслу производной **$f'(x_0) = \operatorname{tg}\varphi$**, где φ — угол наклона касательной, проведенной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0, к оси Ox. Поэтому для нахождения $\operatorname{tg}\varphi$ достаточно найти производную функции $f(x)$, а затем найти значение производной в точке x_0. Для нахождения производных заданных функций отметим, что соответствующие формулы производных приведены в пункте 5 таблицы 3 (и обоснованы на с. 36–37). Поэтому далее при решении задач мы будем использовать эти формулы как табличные значения.

Задача 2 Используя формулу $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$, запишите уравнение касательной к графику функции $y = \frac{1}{x}$ в точке с абсциссой $x_0 = \frac{1}{2}$.

Решение

► Если $f(x) = \frac{1}{x}$, то $f(x_0) = f\left(\frac{1}{2}\right) = 2$. Тогда $f'(x_0) = f'\left(\frac{1}{2}\right) = -4$. Подставляя эти значения в уравнение касательной $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, получаем $y = 2 - 4\left(x - \frac{1}{2}\right)$. То есть $y = -4x + 4$ — искомое уравнение касательной. ◁

Комментарий

Уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0 в общем виде записывается так:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Чтобы записать это уравнение для заданной функции, необходимо найти значение $f(x_0)$, производную $f'(x)$ и значение $f'(x_0)$. Для выполнения соответствующих вычислений удобно обозначить заданную функцию через $f(x)$ и использовать табличное значение производной:

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}.$$

Вопросы для контроля

1. Объясните на примерах и дайте определения приращения аргумента и приращения функции в точке x_0.
2. а) Охарактеризуйте понятие непрерывности функции в точке, пользуясь понятиями приращения аргумента и функции. б*) Обоснуйте запись непрерывности функции в точке через приращение аргумента и функции.
3. Объясните, как можно вычислить мгновенную скорость точки при движении точки по прямой.
4. Объясните, какая прямая считается касательной к графику функции.
5. Как вычислить тангенс угла наклона секущей, проходящей через две точки графика некоторой функции, к оси Ox?
6. Объясните, как можно определить тангенс угла φ наклона касательной к оси Ox.
7. а) Дайте определение производной. Как обозначается производная функции f в точке x_0?

   б*) Опишите схему нахождения производной функции $y = f(x)$.
8. а) Запишите, чему равна производная функции:

   1) c (где c — постоянная); 2) x; 3) x^2; 4) $y = \frac{1}{x}$; 5) $y = \sqrt{x}$.

   б*) Обоснуйте формулы для нахождения производных функций, приведенных в пункте а).
9. Что такое производная с геометрической точки зрения?

10. Что такое производная с механической точки зрения?
11. а) Запишите уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0.
б*) Обоснуйте уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0.
12. а) Объясните связь между дифференцируемостью и непрерывностью функции.
б*) Обоснуйте связь между дифференцируемостью и непрерывностью функции.

Упражнения

1°. Для функции $y = 2x$ найдите приращение Δy, соответствующее приращению аргумента Δx в точке x_0, если:
1) $x_0 = 2$ и $\Delta x = 3$; 2) $x_0 = 1{,}5$ и $\Delta x = 3{,}5$; 3) $x_0 = 0{,}5$ и $\Delta x = 2{,}5$.

2. Найдите приращение Δy, соответствующее приращению аргумента Δx в точке x_0 для функции:
1) $y = 3x$; 2) $y = x^3$; 3) $y = x^2 - x$; 4) $y = x + \frac{1}{x}$.

3. Закон движения точки по прямой задается формулой $x = x(t)$, где x — координата точки в момент времени t. Найдите:
а) среднюю скорость движения точки на отрезке [2; 4];
б) мгновенную скорость движения точки при $t = 2$; если:
1) $x(t) = 3t + 4$; 2) $x(t) = -2t + 1$; 3) $x(t) = 5t - 7$; 4) $x(t) = -3t - 2$.

4. Пользуясь схемой вычисления производной, приведенной на с. 36, найдите производную функции:
1) $y = 3x$; 2) $y = -5x$; 3*) $y = x^3$; 4*) $y = x^2 - 2x$.

5°. На рисунке 23, *а–г* изображен график функции $y = f(x)$ и касательные к нему в точках с абсциссами x_1 и x_2. Пользуясь геометрическим смыслом производной, запишите значения $f'(x_1)$ и $f'(x_2)$.

6. Используя формулы, приведенные в пункте 5 таблицы 3, и геометрический смысл производной, запишите угловой коэффициент касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0, если:
1) $f(x) = x^2$, $x_0 = 3$; 2) $f(x) = x$, $x_0 = 8$;
3) $f(x) = \frac{1}{x}$, $x_0 = -1$; 4) $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = \frac{1}{4}$.

7. Используя формулу $(x^2)' = 2x$, запишите уравнение касательной к графику функции $y = x^2$ в точке с абсциссой x_0, если:
1) $x_0 = 1$; 2) $x_0 = 0$; 3) $x_0 = 0{,}5$; 4) $x_0 = -3$.
Изобразите график данной функции и соответствующую касательную.

8. Используя формулу $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, запишите уравнение касательной к графику функции $y = \sqrt{x}$ в точке с абсциссой x_0, если:

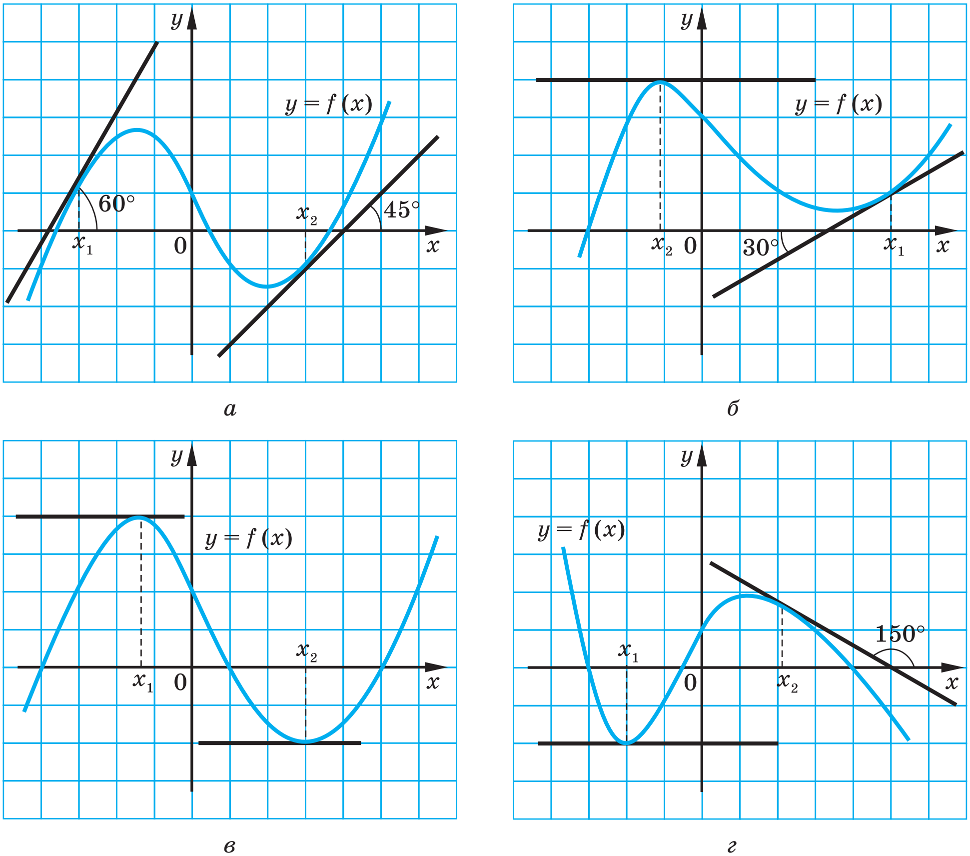


Рис. 23

1) $x_0 = 1$; 2) $x_0 = 0,25$;
3) $x_0 = 4$; 4) $x_0 = 9$.

9. Используя механический смысл производной, найдите скорость тела, которое движется по закону $s = s\,(t)$, в момент времени t, если: 1) $s\,(t) = t$, $t = 7$; 2) $s\,(t) = t^2$, $t = 6,5$; 3) $s\,(t) = t^3$, $t = 5$; 4) $s(t) = \sqrt{t}$, $t = 4$.

10. Закон движения точки задан графиком зависимости пути s от времени t (рис. 24).

1) Найдите среднюю скорость точки с момента $t = 2$ до $t = 3$.

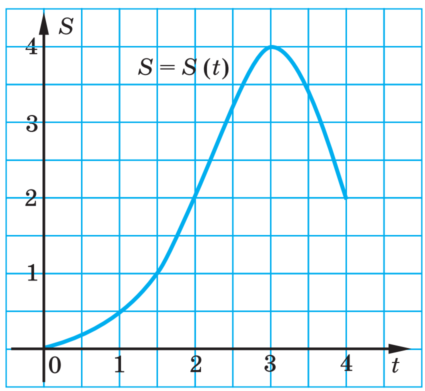


Рис. 24

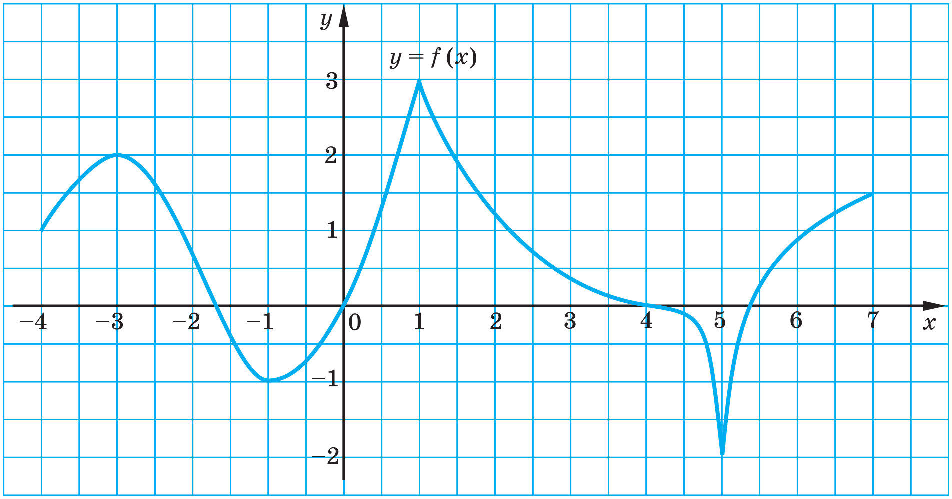


Рис. 25

2) Сравните скорости точки в моменты времени $t_1 = 2$ и $t_2 = 3$.

3) Изменяла ли точка направление движения? Если изменяла, то в какой момент времени?

11. На рисунке 25 изображен график функции $y = f(x)$ на промежутке $[-4;\ 7]$. Используя геометрический смысл производной, укажите на промежутке $(-4;\ 7)$:

1) значения аргумента, в которых производная $f'(x)$ равна нулю.

2) значения аргумента, в которых производная $f'(x)$ не существует. Существует ли в каждой точке с найденными абсциссами касательная к графику функции $y = f(x)$?

3*) промежутки, в которых производная $f'(x)$ положительна. Охарактеризуйте поведение функции на каждом из этих промежутков.

4*) промежутки, в которых производная $f'(x)$ отрицательна. Охарактеризуйте поведение функции на каждом из этих промежутков.

§4 ПРАВИЛА ВЫЧИСЛЕНИЯ ПРОИЗВОДНЫХ. ПРОИЗВОДНАЯ СЛОЖНОЙ ФУНКЦИИ

Таблица 4

1. Производные некоторых элементарных функций

$c' = 0$ (c — постоянная)	$(x)' = 1$	$(x^n)' = nx^{n-1}$	$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$ $(x \neq 0)$	$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ $(x > 0)$

2. Правила дифференцирования

Правило	Пример
$(cu)' = cu$ *Постоянный множитель можно выносить за знак производной*	$(5x^3)' = 5(x^3)' = 5 \cdot 3x^{3-1} = 15x^2$
$(u + v)' = u' + v'$ *Производная суммы дифференцируемых функций равна сумме их производных*	$(x+\sqrt{x})' = (x)' + (\sqrt{x})' = 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$(uv)' = u'v + v'u$	$((x + 2)x^2)' = (x + 2)'x^2 + (x^2)'(x + 2) =$ $= (x' + 2')x^2 + 2x(x + 2) =$ $= (1 + 0)x^2 + 2x(x + 2) = 3x^2 + 4x$
$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$	$\left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{1' \cdot x - x' \cdot 1}{x^2} = \frac{0 \cdot x - 1 \cdot 1}{x^2} = \frac{-1}{x^2} = -\frac{1}{x^2}$

3. Производная сложной функции (функции от функции)

Если $y = f(u)$ и $u = u(x)$, то есть $y = f(u(x))$, то $(f(u(x)))' = f'_u(u) \cdot u'_x(x).$ Коротко это можно записать так*: $\boxed{y'_x = f'_u \cdot u'_x}$	$((3x - 1)^5)' = 5(3x - 1)^4(3x - 1)' =$ $= 5(3x - 1)^4((3x)' - 1') =$ $= 5(3x - 1)^4(3 - 0) = 15(3x - 1)^4.$ (Если $u = 3x - 1$, тогда $(u^5)'_x = 5u^4 u'_x$.)

* В обозначениях y'_x, f'_u, u'_x нижний индекс указывает, по какому аргументу берется производная.

Объяснение и обоснование

1. Правила дифференцирования. Используя определение производной, в пункте 5 § 3 были найдены производные некоторых элементарных функций:

$$\boxed{c' = 0}\ (c \text{ — постоянная}),\ \boxed{(x)' = 1},\ \boxed{\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}},\ \boxed{\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}}.$$

Для нахождения производных в более сложных случаях целесообразно помнить *правила дифференцирования* — специальные правила нахождения производной от суммы, произведения и частного тех функций, для которых мы уже знаем значения производных, и правило нахождения производной сложной функции (функции от функции).

Обоснуем эти правила. Для сокращения записей используем такие обозначения функций и их производных в точке x_0:

$$u(x_0) = u,\ v(x_0) = v,\ u'(x_0) = u',\ v'(x_0) = v'.$$

П р а в и л о 1. *Если функции u и v дифференцируемы в точке x_0, то их сумма дифференцируема в этой точке и*

$$(u + v)' = u' + v'.$$

Коротко говорят:

производная суммы равна сумме производных.

Для доказательства обозначим $y(x) = u(x) + v(x)$ и используем план нахождения y' по определению производной в точке x_0 (с. 36).

1) Приращение функции в точке x_0:

$$\Delta y = y(x_0 + \Delta x) - y(x_0) = u(x_0 + \Delta x) + v(x_0 + \Delta x) - (u(x_0) + v(x_0)) =$$
$$= (u(x_0 + \Delta x) - u(x_0)) + (v(x_0 + \Delta x) - v(x_0)) = \Delta u + \Delta v.$$

2) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{\Delta u + \Delta v}{\Delta x} = \dfrac{\Delta u}{\Delta x} + \dfrac{\Delta v}{\Delta x}$.

3) Выясним, к какому пределу стремится отношение $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ при $\Delta x \to 0$.

Поскольку функции u и v дифференцируемы в точке x_0, то при $\Delta x \to 0$

$$\frac{\Delta u}{\Delta x} \to u'(x_0) = u',\ \text{а}\ \frac{\Delta v}{\Delta x} \to v'(x_0) = v'\ \left(\text{то есть}\ \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} = u'\ \text{и}\ \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x} = v'\right).$$

Учитывая, что предел суммы равен сумме пределов слагаемых, получаем, что при $\Delta x \to 0$ $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{\Delta u}{\Delta x} + \dfrac{\Delta v}{\Delta x} \to u' + v'$. Из этого следует, что $y' = u' + v'$

$$\left(\text{то есть}\ y' = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x} = u' + v'\right).$$

Следовательно, $(u + v)' = u' + v'$.

Правило 1 можно расширить на любое конечное количество слагаемых* ($n \in N$):

$$\boxed{(u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n)' = u_1' + u_2' + u_3' + \ldots + u_n'}.$$

* Для обоснования того, что эта формула верна для любого натурального n, необходимо применить метод математической индукции (см. учебник для 10 класса, с. 111).

П р а в и л о 2. *Если функции u и v дифференцируемы в точке x_0, то их произведение дифференцируемо в этой точке и*

$$(uv)' = u'v + v'u.$$

1) Обозначим $y(x) = u(x) \cdot v(x)$). Сначала запишем приращения функций u и v в точке x_0: $\Delta u = u(x_0 + \Delta x) - u(x_0)$, $\Delta v = v(x_0 + \Delta x) - v(x_0)$. Из этих равенств получаем:

$$u(x_0 + \Delta x) = u(x_0) + \Delta u = u + \Delta u, \quad v(x_0 + \Delta x) = v(x_0) + \Delta v = v + \Delta v. \quad (1)$$

Учитывая равенства (1), имеем

$$\Delta y = y(x_0 + \Delta x) - y(x_0) = u(x_0 + \Delta x)\, v(x_0 + \Delta x) - u(x_0) v(x_0) =$$
$$= (u + \Delta u)(v + \Delta v) - uv = uv + v\Delta u + u\Delta v + \Delta u \cdot \Delta v - uv =$$
$$= v\Delta u + u\Delta v + \Delta u \Delta v.$$

2) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{v\Delta u + u\Delta v + \Delta u \cdot \Delta v}{\Delta x} = v \cdot \dfrac{\Delta u}{\Delta x} + u \cdot \dfrac{\Delta v}{\Delta x} + \dfrac{\Delta u}{\Delta x} \cdot \Delta v.$

3) Поскольку функции u и v дифференцируемы в точке x_0, то при $\Delta x \to 0$

$$\frac{\Delta u}{\Delta x} \to u'(x_0) = u', \text{ а } \frac{\Delta v}{\Delta x} \to v'(x_0) = v' \ \left(\text{то есть } \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = u' \text{ и } \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = v'\right).$$

Поскольку функция v дифференцируема в точке x_0, а значит и непрерывна в этой точке, то при $\Delta x \to 0$ значение $\Delta v \to 0$.

Учитывая, что предел суммы равен сумме пределов слагаемых (и постоянные множители u и v можно выносить за знак предела), получаем, что при

$$\Delta x \to 0 \qquad \frac{\Delta y}{\Delta x} = v \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} + u \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x} + \frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot \Delta v \to v \cdot u' + u \cdot v' + u' \cdot 0 = v \cdot u' + u \cdot v'.$$

Из этого следует, что $y' = u'v + v'u$ (то есть

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = v \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + u \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \Delta v = u'v + v'u\Big).$$

Следовательно, $(uv)' = u'v + v'u$.

С л е д с т в и е (п р а в и л о 3). *Если функция u дифференцируема в точке x_0, а c — постоянная ($c = const$), то функция cu дифференцируема в этой точке и*

$$(cu)' = cu'.$$

Коротко говорят:

постоянный множитель можно выносить за знак производной.

Для доказательства используем правило 2 и известный из § 3 факт, что $c' = 0$:

$$(cu)' = c'u + u'c = 0 \cdot u + u'c = cu'.$$

П р а в и л о 4. *Если функции u и v дифференцируемы в точке x_0 и функция v не равна нулю в этой точке, то их частное $\dfrac{u}{v}$ также дифференцируемо в точке x_0 и*

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}.$$

Эту формулу можно получить аналогично производной произведения. Но можно использовать более простые рассуждения, если принять без доказательства, что производная данного частного существует. Обозначим функцию $\frac{u}{v}$ через t. Тогда $\frac{u}{v}=t,\ u = vt$. Найдем производную функции u по правилу дифференцирования произведения: $u' = v't + t'v$.

Выразим из этого равенства t', а вместо t подставим его значение $\frac{u}{v}$. Получим: $t'=\frac{u'-v't}{v}=\frac{u'-v'\cdot\frac{u}{v}}{v}=\frac{u'v-v'u}{v^2}$. Следовательно, $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-v'u}{v^2}$.

Используя правило нахождения производной произведения и формулу $x' = 1$, обоснуем, что **производная функции** $y = x^n$ при натуральном $n > 1$ вычисляется по формуле

$$(x^n) = nx^{n-1}. \qquad (2)$$

При $n = 2$ получаем: $(x^2)' = (x \cdot x)' = x' \cdot x + x' \cdot x = 1 \cdot x + 1 \cdot x = 2x$. Тот же результат дает и применение формулы (2): $(x^2)' = 2x^{2-1} = 2x^1 = 2x$.
При $n = 3$ получаем: $(x^3)' = (x^2 \cdot x) = (x^2)' \cdot x + x' \cdot x^2 = 2x \cdot x + 1 \cdot x^2 = 3x^2$.
Тот же результат дает и применение формулы (2): $(x^3)' = 3x^{3-1} = 3x^2$.
Как видим, приведенные соображения позволяют, опираясь на предыдущий результат, обосновать формулу для следующего значения n.
Допустим, что формула (2) выполняется для $n = k$ ($k > 1$), то есть

$$(x^k)' = kx^{k-1}.$$

Покажем, что тогда формула (2) верна и для следующего значения $n = k + 1$. Действительно,
$(x^{k+1})' = (x^k \cdot x)' = (x^k)' \cdot x + x' \cdot x^k = kx^{k-1} \cdot x + 1 \cdot x^k = k \cdot x^k + x^k = (k + 1)x^k$.
То есть, если формула (2) выполняется при $n = 2$, то она выполняется и для следующего значения $n = 3$. Но тогда формула (2) выполняется и для следующего значения $n = 4$, а следовательно, и для $n = 5$ и т. д. для любого* натурального $n > 1$.

Можно обосновать (см. с. 56), что *формула* $(x^n)' = nx^{n-1}$ *верна для любого действительного показателя степени n (но только при тех значениях x, при которых определена ее правая часть)*.

Например, если $n = 1$ или $n = 0$, то при $x \neq 0$ эта формула также верна. Действительно, если $x \neq 0$, то по формуле (2):

$$(x^1)' = 1 \cdot x^{1-1} = 1 \cdot x^0 = 1,$$
$$(x^0)' = 0 \cdot x^{0-1} = 0,$$

что совпадает со значениями производных функций x и 1, полученных в пункте 1.3.

* В приведенном обосновании фактически неявно использован метод математической индукции (см. учебник для 10 класса, с. 111), который позволяет аргументированно сделать вывод, что рассмотренное утверждение выполняется для любого натурального n (в данном случае $n > 1$).

Если n — целое отрицательно число, то $n = -m$, где m — натуральное число. Тогда при $x \neq 0$

$$(x^n)' = (x^{-m})' = \left(\frac{1}{x^m}\right)' = \frac{1' \cdot x^m - (x^m)' \cdot 1}{(x^m)^2} = \frac{0 \cdot x^m - mx^{m-1}}{x^{2m}} = \frac{-mx^{m-1}}{x^{2m}} =$$

$$= -m \cdot \frac{1}{x^{m+1}} = -m \cdot x^{-m-1} = n \cdot x^{n-1}.$$

Следовательно, формула (2) выполняется и для любого целого показателя степени.

Если $n = \frac{1}{2}$, то при $x > 0$ имеем $x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$. Как известно из § 3, $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ (при $x > 0$). Но по формуле (2): $\left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. То есть формула (2) верна и при $n = \frac{1}{2}$.

2. Производная сложной функции. Сложной функцией обычно называют функцию от функции. Если переменная y является функцией от u: $y = f(u)$, а u, в свою очередь, — функцией от x: $u = u(x)$, то *y является сложной функцией* от x, то есть $y = f(u(x))$.

В таком случае говорят, что y является сложной функцией независимого аргумента x, а u называют *промежуточным аргументом*.

Например, если $y = f(u) = \sqrt{u}$, $u = u(x) = x - 2$, то $y(x) = f(u(x)) = \sqrt{x-2}$ — сложная функция, которая определена только при тех значениях x, для которых $x - 2 \geqslant 0$, то есть при $x \geqslant 2$ (промежуточный аргумент $u = x - 2$).

Правило 5 (*производная сложной функции*). *Если функция $u(x)$ имеет производную в точке x_0, а функция $f(u)$ — производную в точке $u_0 = u(x_0)$, то сложная функция $y = f(u(x))$ также имеет производную в точке x_0, причем*

$$\left(f(u(x))\right)' = f'_u(u) \cdot u'_x(x).$$

Поскольку по условию функция $u(x)$ имеет производную в точке x_0, то она является непрерывной в этой точке (с. 31), и тогда малому изменению аргумента в точке x_0 соответствуют малые изменения значений функции, то есть при $\Delta x \to 0$ $\Delta u \to 0$ (с. 29).

Из равенства $\Delta u = u(x_0 + \Delta x) - u(x_0)$ имеем

$$u(x_0 + \Delta x) = u(x_0) + \Delta u = u_0 + \Delta u.$$

Тогда

$$\Delta y = y(x_0 + \Delta x) - y(x_0) = f(u(x_0 + \Delta x)) - f(u(x_0)) =$$

$$= f(u_0 + \Delta u) - f(u_0) = \Delta f.$$

Дальнейшее доказательство проведем только для таких функций $u(x)$, в которых $\Delta u \neq 0$ в некоторой окрестности точки x_0. При $\Delta u \neq 0$ представим $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ следующим образом: $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{\Delta f}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}$. Учитывая, что при $\Delta x\to 0$ $\frac{\Delta u}{\Delta x}\to u'(x_0)=u'_x$, а при $\Delta u\to 0$ $\frac{\Delta f}{\Delta u}\to f'(u_0)=f'_u$, получаем, что при $\Delta x\to 0$ (и, соответственно, $\Delta u\to 0$)

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta f}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}\to f'_u\cdot u'_x.$$ Из этого следует, что

$$\boxed{y'_x=f'_u\cdot u'_x},$$

то есть

$$\left(f\left(u(x)\right)\right)'=f'_u(u)\cdot u'_x(x).$$

Следовательно, *производная сложной функции $y = f(u(x))$ равна произведению производной данной функции $y = f(u)$ по промежуточному аргументу u* (обозначается f'_u) *на производную промежуточного аргумента $u = u(x)$ по независимому аргументу x* (обозначается u'_x).

Примеры решения задач

Задача 1 Найдите производную функции:

1) $y = x^7 + x^3$; 2) $y = x^8(2x + x^4)$; 3) $y=\frac{x+2}{5-x}$.

Решение

1) ▶ $y' = (x^7 + x^3)' = (x^7)' + (x^3)' = 7x^6 + 3x^2$. ◁

2) ▶ $y' = (x^8(2x + x^4))' = (x^8)'\cdot(2x + x^4) + (2x + x^4)'\cdot x^8$.
Учитывая, что $(x^8)' = 8x^7$; $(2x+x^4)'=(2x)'+(x^4)'=2\cdot x'+4x^3=2+4x^3$, имеем $y'=8x^7(2x+x^4)+(2+4x^3)x^8 = 16x^8 + 8x^{11} + 2x^8 + 4x^{11} = 18x^8 + 12x^{11}$. ◁

3) ▶ $y'=\left(\frac{x+2}{5-x}\right)'=\frac{(x+2)'\cdot(5-x)-(5-x)'(x+2)}{(5-x)^2}$.
Учитывая, что $(x + 2)' = x' + 2' = 1 + 0 = 1$, $(5 - x)' = 5' - x' = 0 - 1 = -1$, имеем

$$y'=\frac{1\cdot(5-x)-(-1)\cdot(x+2)}{(5-x)^2}=\frac{5-x+x+2}{(5-x)^2}=\frac{7}{(5-x)^2}.$$ ◁

Комментарий

Напомним, что *алгебраическое выражение* (формулу, задающую функцию) *называют по результату последнего действия, которое необходимо выполнить при нахождении значения заданного выражения*. Следовательно, в задании 1 сначала необходимо найти производную суммы:

$$(u + v)' = u' + v'$$

в задании 2 — производную произведения:

$$(uv)' = u'v + u'v,$$

в задании 3 — производную частного:

$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-v'u}{v^2}.$$

Также в заданиях 1 и 2 следует использовать формулу $(x^n)' = nx^{n-1}$, а в задании 2 учесть, что при вычислении производной $2x$ постоянный множитель 2 можно вынести за знак производной. Можно заметно упростить решение задания 2, если сначала раскрыть скобки, а затем взять производную суммы.

Задача 2 Вычислите значение производной функции $f(x)=x^2-5\sqrt{x}$ в указанных точках: $x = 4$, $x = 0{,}01$.

Решение

▶ $f'(x)=\left(x^2-5\sqrt{x}\right)'=\left(x^2\right)'-5\left(\sqrt{x}\right)'=$

$$=2x-5\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}=2x-\frac{5}{2\sqrt{x}}.$$

$$f'(4)=2\cdot 4-\frac{5}{2\sqrt{4}}=8-\frac{5}{4}=6\frac{3}{4}.$$

$$f'(0{,}01)=2\cdot 0{,}01-\frac{5}{2\sqrt{0{,}01}}=0{,}02-\frac{5}{2\cdot 0{,}1}=$$

$$=0{,}02-\frac{5}{0{,}2}=0{,}02-25=-24{,}98.$$

Ответ: $6\frac{3}{4}$; $-24{,}98$. ◁

Комментарий

Для нахождения значения производной в указанных точках достаточно найти производную данной функции и в полученное выражение подставить заданные значения аргумента. При вычислении производной следует учесть, что заданную разность можно рассматривать как алгебраическую сумму выражений x^2 и $\left(-5\sqrt{x}\right)$, а при нахождении производной $\left(-5\sqrt{x}\right)$ за знак производной вынести постоянный множитель (-5). В результате мы получаем разность производных функций x^2 и $5\sqrt{x}$.

Задача 3 Найдите значения x, при которых производная функции $f(x) = x^4 - 32x$ равна нулю.

Решение

▶ $f'(x) = (x^4 - 32x)' =$

$$= (x^4)' - 32x' - 4x^3 - 32.$$

$f'(x) = 0$. Тогда $4x^3 - 32 = 0$,

$x^3 = 8$, $x = 2$.

Ответ: 2. ◁

Комментарий

Чтобы найти соответствующие значения x, достаточно найти производную данной функции, приравнять ее к нулю и решить полученное уравнение.

Задача 4 Найдите производную функции f:

1) $f(x) = (x^3 - 1)^{-7}$; 2) $f(x)=\sqrt{5x^2+x}$;

3*) $f(x)=\left(1+\sqrt{2x+3}\right)^3+\dfrac{1}{(3x-2)^4}$.

Решение

1) ▶ $f'(x) = -7(x^3 - 1)^{-7-1}\cdot(x^3 - 1)'$.

Учитывая, что

$(x^3 - 1)' = (x^3)' - 1' = 3x^2 - 0 = 3x^2$,

получаем

$f'(x) = -7(x^3 - 1)^{-8}\cdot 3x^2 =$

$$= -21x^2(x^3 - 1)^{-8} = -\frac{21x^2}{(x^3-1)^8};$$ ◁

Комментарий

В заданиях 1 и 2 необходимо найти соответственно производную степени и корня, но в основании степени и под знаком корня стоит не аргумент x, а выражения с этим аргументом (тоже функции от x). Следовательно, необходимо найти производные сложных функций.

2) ▶ $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{5x^2+x}}\cdot(5x^2+x)'.$

Учитывая, что
$(5x^2+x)'=5(x^2)'+x'=$
$=5\cdot 2x+1=10x+1$, получаем

$$f'(x)=\frac{10x+1}{2\sqrt{5x^2+x}};\ \triangleleft$$

3*) ▶ $f'(x)=\left(\left(1+\sqrt{2x+3}\right)^3\right)'+\left(\frac{1}{(3x-2)^4}\right)'.$

Найдем производную каждого слагаемого.

$$A=\left(\left(1+\sqrt{2x+3}\right)^3\right)'=$$
$$=3\left(1+\sqrt{2x+3}\right)^2\left(1+\sqrt{2x+3}\right)'.$$

Учитывая, что

$$\left(1+\sqrt{2x+3}\right)'=1'+\left(\sqrt{2x+3}\right)'=$$
$$=0+\frac{1}{2\sqrt{2x+3}}\cdot(2x+3)'=$$
$$=\frac{1}{2\sqrt{2x+3}}\cdot 2=\frac{1}{\sqrt{2x+3}},$$

получаем $A=\frac{3\left(1+\sqrt{2x+3}\right)^2}{\sqrt{2x+3}}.$

$$B=\left(\frac{1}{(3x-2)^4}\right)'=((3x-2)^{-4})'=$$
$$=-4(3x-2)^{-4-1}(3x-2)'=-\frac{12}{(3x-2)^5}.$$

$$f'(x)=A+B=\frac{3\left(1+\sqrt{2x+3}\right)^2}{\sqrt{2x+3}}-\frac{12}{(3x-2)^5}.\ \triangleleft$$

Обозначая (в черновике или мысленно) промежуточный аргумент через u (для задания 1: $u=x^3-1$, для задания 2: $u=5x^2+x$), по формуле $f'_x=f'_u\cdot u'_x$ записываем производные заданных функций с учетом формул

$$(u^n)'=nu^{n-1}\ \text{ и }\ \left(\sqrt{u}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{u}}.$$

В задании 3 мы можем сначала найти производную суммы, а далее — производную каждого слагаемого как производную сложной функции.

Выражение $A=\left(\left(1+\sqrt{2x+3}\right)^3\right)'$ — это производная степени (u^3), но это производная сложной функции, у которой промежуточный аргумент $u=1+\sqrt{2x+3}$.

Находя $u'=\left(1+\sqrt{2x+3}\right)'$, приходится снова рассматривать производную суммы, при этом производную $\left(\sqrt{2x+3}\right)'$ — рассматривать также как производную сложной функции $\left(\sqrt{u}\right)$, у которой промежуточный аргумент $u=2x+3$.

Второе слагаемое можно записать как $(3x-2)^{-4}$, то есть u^{-4}. Тогда промежуточный аргумент будет $u=3x-2$. Отметим, что для нахождения производной второго слагаемого можно использовать и формулу для производной частного.

Вопросы для контроля

1. Запишите правила нахождения производной суммы, произведения и частного двух функций. Проиллюстрируйте их применение на примерах.
2. Запишите формулу нахождения производной степенной функции x^n. Проиллюстрируйте ее применение на примерах.
3. Объясните на примерах правило нахождения производной сложной функции.
4*. Обоснуйте правила нахождения производной суммы, произведения и частного двух функций и правило нахождения производной сложной функции.

5*. Обоснуйте формулу нахождения производной степенной функции x^n для целых значений n.

Упражнения

Найдите производную функции **(1—5)**.

1°. 1) $y = x^8$; 2) $y = x^{-5}$; 3) $y = x^{\frac{2}{3}}$; 4) $y = x^{20}$; 5) $y = x^{-20}$; 6) $y = x^{-\frac{1}{2}}$.

2. 1°) $f(x) = x + 3$; 2°) $f(x) = x^5 - x$; 3) $f(x) = \frac{1}{x} - x^3$; 4) $f(x) = x^2 + \sqrt{x}$.

3. 1) $f(x) = 2x^3 + 3x$; 2) $f(x) = x^2 + 5x + 2$;

3) $f(x) = x^4 - 2x^2 - 1$; 4) $f(x) = 2\sqrt{x} + 4x^3 + 3$.

4. 1) $y = x^2(2x + x^4)$; 2) $y = (2x - 1)(1 - x^2)$;

3) $y = (3 + x^3)(2 - x)$; 4) $y = \sqrt{x}(3x^2 - x)$.

5. 1) $y = \frac{x^2}{x+3}$; 2) $y = \frac{2x+1}{3x-2}$; 3) $y = \frac{2-x}{5x+1}$; 4) $y = \frac{1-2x}{x^2}$.

6. Вычислите значения производной функции $f(x)$ в указанных точках:

1°) $f(x) = x^2 + 2x$; $x = -2$, $x = \frac{1}{2}$; 2°) $f(x) = x^4 - 4x$; $x = 2$, $x = -1$;

3) $f(x) = \frac{x+1}{2x-3}$; $x = 0$, $x = -3$; 4) $f(x) = x - \frac{1}{x}$; $x = -\sqrt{2}$, $x = 0{,}1$.

7. Найдите значения x, для которых производная функции $f(x)$ равна нулю:

1°) $f(x) = 3x^2 - 6x$; 2°) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + 5$;

3) $f(x) = 12x + \frac{3}{x}$; 4) $f(x) = \sqrt{x} - 2x^2$.

8. Решите неравенство $f'(x) < 0$, если:

1°) $f(x) = 2x - x^2$; 2°) $f(x) = x^3 + 3x^2$; 3) $f(x) = 2x + \frac{8}{x}$; 4) $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$.

9. Задайте формулами элементарные функции $f(u)$ и $u(x)$, из которых состоит сложная функция $y = f(u(x))$:

1) $y = \sqrt{\sin x}$; 2) $y = (2x + x^2)^5$; 3) $y = \sqrt{x^3 - x}$; 4) $y = \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$.

10. Найдите область определения функции:

1°) $y = (2x^3 - 4x)^5$; 2°) $y = \sqrt{2x+6}$; 3°) $y = \ln(2x - 8)$; 4) $y = \frac{1}{\sqrt{x^2-4}}$;

5) $y = \sqrt{\sin x}$; 6) $y = \sqrt{\frac{1}{x} - 2}$; 7*) $y = \sqrt{1 - 2\cos x}$; 8*) $y = \arcsin(\log_{0,1} x)$.

11. Найдите производную функции $f(x)$:

1) $f(x) = (x^2 - x)^3$; 2) $f(x) = (2x - 1)^{-5}$; 3) $f(x) = \left(x - \frac{1}{x}\right)^4$;

4) $f(x)=\sqrt{5x-x^2}$; 5*) $f(x)=\sqrt{2+\sqrt{3x}}+\frac{1}{(2x-1)^2}$.

12. Запишите уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0, если:

1) $f(x) = x^2 + 3x$, $x_0 = 2$; 2) $f(x) = x^3 - x$, $x_0 = -3$;

3) $f(x)=\sqrt{2x-x^3}$, $x_0 = 1$; 4) $f(x)=2x^3-\frac{1}{x}$, $x_0 = -1$.

§5 ПРОИЗВОДНЫЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ

Таблица 5

$c' = 0$ (c — постоянная)	$(x)' = 1$	$(x^n)' = nx^{n-1}$	$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$ $(x \neq 0)$	$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ $(x > 0)$

$(\sin x)' = \cos x$	$(\cos x)' = -\sin x$	$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$

$(e^x)' = e^x$	$(a^x)' = a^x \ln a$ ($a > 0$, a — постоянная)	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$ $(x > 0)$	$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$ ($x > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$, a — постоянная)	$(\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$ (на ОДЗ правой части формулы)

Объяснение и обоснование

Формулы $c' = 0$ (c — постоянная), $(x)' = 1$, $(x^n)' = nx^{n-1}$, $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$, $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ $(x > 0)$ были обоснованы в § 3 и 4.

Для обоснования формулы $(\sin x)' = \cos x$ используем то, что при малых значениях α значения $\sin\alpha \approx \alpha$ (например, $\sin 0{,}01 \approx 0{,}010$, $\sin 0{,}001 \approx 0{,}001$). Тогда при $\alpha \to 0$ отношение $\frac{\sin\alpha}{\alpha} \to 1$, то есть

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha} = 1. \qquad (1)^*$$

* Справедливость этой формулы обоснована на с. 126 .

Если $y = f(x) = \sin x$, то, применяя формулу преобразования разности синусов в произведение и схему нахождения производной по определению (с. 36), имеем:

1) $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \sin(x_0 + \Delta x) - \sin x_0 =$

$$= 2\sin\frac{x_0 + \Delta x - x_0}{2}\cos\frac{x_0 + \Delta x + x_0}{2} = 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right).$$

2) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = \dfrac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \cos\left(x_0 + \dfrac{\Delta x}{2}\right).$

3) При $\Delta x \to 0$ $\dfrac{\Delta x}{2} \to 0.$ Тогда $\cos\left(x_0 + \dfrac{\Delta x}{2}\right) \to \cos(x_0),$ учитывая (1) $\dfrac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \to 1.$

Следовательно, при $\Delta x \to 0$ $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} \to 1 \cdot \cos x_0 = \cos x_0,$ то есть $f'(x_0) = \cos x_0$.

Тогда производная функции $y = \sin x$ в произвольной точке x равна $\cos x$. Таким образом,

$$(\sin x)' = \cos x.$$

Учитывая, что по формулам приведения $\cos x = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right),$ $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \sin x,$ и используя правило нахождения производной сложной функции, получаем:

$(\cos x)' = \left(\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)\right)' = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)' = \sin x \cdot (0 - 1) = -\sin x.$ Следовательно,

$$(\cos x)' = -\sin x.$$

Для нахождения производных $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$ используем формулы $\operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x},$ $\operatorname{ctg} x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$ и правило нахождения производной частного. Например,

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cos x - (\cos x)'\sin x}{\cos^2 x} = \frac{\cos x\cos x - (-\sin x)\sin x}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$ Следовательно,

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Чтобы обосновать *формулы производных показательных и логарифмических функций*, используем без доказательства свойство функции e^x*, которое обосновывается в курсе высшей математики:

* Напомним, что e — иррациональное число, первые знаки которого следующие: $e = 2{,}71828182...$

производная функции e^x равна самой функции e^x, то есть

$$(e^x)' = e^x.$$

При $a > 0$ по основному логарифмическому тождеству имеем $a^x = e^{\ln a^x} = e^{x\ln a}$. Тогда по правилу нахождения производной сложной функции:

$$(a^x)' = (e^{x\ln a})' = e^{x\ln a}(x\ln a)' = a^x \ln a, \text{ то есть}$$

$$(a^x)' = a^x \ln a.$$

По полученной формуле мы можем найти значение производной показательной функции для любого значения x. Следовательно, *показательная функция дифференцируема в каждой точке области определения*, а значит, *и непрерывна в каждой точке своей области определения* (то есть при всех действительных значениях x).

Для логарифмической функции сначала найдем производную функции $\ln x$ (принимая без доказательства существование ее производной). Область определения этой функции — $x > 0$, то есть $(0; +\infty)$. При $x > 0$ по основному логарифмическому тождеству имеем $e^{\ln x} = x$. Это равенство означает, что при $x > 0$ функции $e^{\ln x}$ и x совпадают (это одна и же функция, заданная на множестве $\boldsymbol{R}_+$), а значит, совпадают и их производные. Используя для левой части равенства правило нахождения производной сложной функции, получаем:
$(e^{\ln x})' = (x)'$; $e^{\ln x}(\ln x)' = 1$, то есть $x(\ln x)' = 1$. Отсюда

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \text{ (где } x > 0).$$

Поскольку $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a} = \frac{1}{\ln a}\cdot\ln x$, то

$$(\log_a x)' = \left(\frac{1}{\ln a}\cdot\ln x\right)' = \frac{1}{\ln a}\cdot(\ln x)' = \frac{1}{\ln a}\cdot\frac{1}{x} = \frac{1}{x\ln a}. \text{ Следовательно,}$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x\ln a} \text{ (где } x > 0,\ a > 0,\ a \neq 1,\ a \text{ — постоянная).}$$

З а м е ч а н и е. Формула $(x^n)' = nx^{n-1}$ была обоснована в § 4 только для целых значений n. Докажем, что она выполняется и при любых действительных значениях n.

Если n — любое нецелое число, то функция x^n определена только при $x > 0$. Тогда по основному логарифмическому тождеству $x^n = e^{\ln x^n} = e^{n\ln x}$. По правилу вычисления производной сложной функции получаем:

$$(x^n)' = (e^{n\ln x})' = e^{n\ln x}(n\ln x)' = x^n\cdot n\cdot(\ln x)' = x^n\cdot n\cdot\frac{1}{x} = nx^{n-1}.$$

Следовательно, далее формулой $(x^n)' = nx^{n-1}$ можно пользоваться при любых действительных значениях n (напомним, что в этом случае ее можно использовать только при тех значениях x, при которых определена ее правая часть).

Опираясь на полученный результат, обоснуем также формулу

$$\left(\sqrt[n]{x}\right)' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}, \qquad (2)$$

которую можно использовать при тех значениях x, при которых определена ее правая часть.

Если n — четное число, то ОДЗ правой части формулы (2): $x > 0$. Но при этом условии

$$\left(\sqrt[n]{x}\right)' = \left(x^{\frac{1}{n}}\right)' = \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{1}{n}x^{\frac{1-n}{n}} = \frac{1}{n}\sqrt[n]{x^{1-n}} = \frac{1}{n}\sqrt[n]{\left(\frac{1}{x}\right)^{n-1}} = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}. \qquad (3)$$

Если n — нечетное число, то ОДЗ правой части формулы (2) задается условием: $x \neq 0$. При $x > 0$ остается справедливым равенство (3). При $x < 0$ учтем, что $\sqrt[n]{x} = -\sqrt[n]{-x}$ и $-x > 0$, а также то, что при нечетном n число $1 - n$ будет четным (поэтому $(-1)^{1-n} = 1$). Тогда

$$\left(\sqrt[n]{x}\right)' = \left(-\sqrt[n]{-x}\right)' = \left(-(-x)^{\frac{1}{n}}\right)' = -\frac{1}{n}(-x)^{\frac{1}{n}-1}(-x)' = \frac{1}{n}(-x)^{\frac{1-n}{n}} = \frac{1}{n}\sqrt[n]{(-x)^{1-n}} =$$

$$= \frac{1}{n}\sqrt[n]{x^{1-n}} = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}.$$

Следовательно, и для нечетного n при всех $x \neq 0$ формула (2) также выполняется.

Обратим внимание, что в последнем случае такие громоздкие преобразования пришлось выполнить вследствие того, что при $x < 0$ выражение $x^{\frac{1}{n}}$ не определено, а выражение $(-x)^{\frac{1}{n}}$ существует, поскольку $-x > 0$ при $x < 0$.

Примеры решения задач

Задача 1 Найдите производную функции:

1) $f(x) = \sin^2 x + e^{\frac{x}{2}}$; 2) $f(x) = \frac{\ln x}{\cos 3x}$.

Решение

1) $f'(x) = \left(\sin^2 x + e^{\frac{x}{2}}\right)' =$

$= \left(\sin^2 x\right)' + \left(e^{\frac{x}{2}}\right)' =$

$= 2\sin x\,(\sin x)' + e^{\frac{x}{2}}\left(\frac{x}{2}\right)' =$

$= 2\sin x\cos x + \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}} = \sin 2x + \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}$.

Комментарий

Последовательно определим, от какого выражения берется производная (ориентируясь на результат последнего действия).

В задании 1 сначала берется производная суммы: $(u + v)' = u' + v'$. Затем для каждого из слагаемых используется правило вычисления производной сложной функции: берется

2) ▶ $$f'(x)=\left(\frac{\ln x}{\cos 3x}\right)'=$$

$$=\frac{(\ln x)'\cdot\cos 3x-(\cos 3x)'\cdot\ln x}{(\cos 3x)^2}=$$

$$=\frac{\frac{1}{x}\cdot\cos 3x-(-\sin 3x)(3x)'\cdot\ln x}{\cos^2 3x}=$$

$$=\frac{\cos 3x+3x\cdot\sin 3x\cdot\ln x}{x\cos^2 3x}.$$ ◁

производная от u^2 и e^u и умножается на u'. Полученный результат желательно упростить по формуле:

$$2\sin x\cos x=\sin 2x.$$

В задании 2 сначала берется производная частного: $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-v'u}{v^2}$, а для производной знаменателя используется правило вычисления производной сложной функции (производная $\cos u$ умножается на u').

Задача 2 Найдите значения x, при которых значение производной функции $f(x)=x-\ln 2x$:
1) равно нулю, 2) положительно, 3) отрицательно.

Решение

▶ Область определения данной функции: $x>0$, то есть $(0;+\infty)$.

$$f'(x)=x'-(\ln 2x)'=1-\frac{1}{2x}\cdot(2x)'=1-\frac{1}{x}.$$

Область определения функции $f'(x)$: $x\neq 0$. То есть производная $f'(x)$ существует на всей области определения данной функции: $x>0$.

$$f'(x)=0,\ 1-\frac{1}{x}=0,\ x=1$$

(удовлетворяет условию $x>0$).

При $x>0$ неравенства $f'(x)>0$, то есть $1-\frac{1}{x}>0$, и $f'(x)<0$, то есть $1-\frac{1}{x}<0$, решим методом интервалов (рис. 26):

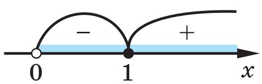


Рис. 26

Ответ: 1) $f'(x)=0$ при $x=1$;
2) $f'(x)>0$ при $x\in(1;+\infty)$;
3) $f'(x)<0$ при $x\in(0;1)$. ◁

Комментарий

Производная данной функции может существовать только в точках, входящих в область определения функции. Поэтому сначала целесообразно найти область определения данной функции.

Производная функции сама является функцией от x, и поэтому для решения неравенств $f'(x)\gtrless 0$ можно использовать метод интервалов. После нахождения ОДЗ соответствующего неравенства необходимо сопоставить ее с областью определения функции $f(x)$ и продолжать решение неравенства на их общей части.

Следовательно, *неравенства $f'(x)\gtrless 0$ всегда решаются на общей части областей определения функций $f(x)$ и $f'(x)$*. Для решения соответствующих неравенств достаточно на общей области определения функций $f(x)$ и $f'(x)$ отметить нули $f'(x)$ и найти знак $f'(x)$ в каждом из промежутков, на которые разбивается общая область определения.

Задача 3 Найдите уравнение касательной к графику функции $y = xe^x$ в точке $x_0 = 1$.

Решение

▶ Если $f(x) = xe^x$, то $f(x_0) = f(1) = e$. $f'(x) = x' \cdot e^x + (e^x)' \cdot x = e^x + xe^x$. Тогда $f'(x_0) = f'(1) = 2e$. Подставляя эти значения в уравнение касательной $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, получаем: $y = e + 2e(x - 1)$. То есть $y = 2ex - e$ — искомое уравнение касательной. ◁

Комментарий

Уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0 в общем виде записывается так:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Чтобы записать это уравнение для данной функции, необходимо найти $f(x_0)$, производную $f'(x)$ и значение $f'(x_0)$. Для выполнения соответствующих вычислений удобно обозначить заданную функцию через $f(x)$, а для нахождения ее производной использовать формулу производной произведения:

$$(uv)' = u'v + v'u.$$

Вопросы для контроля

1. Запишите формулы нахождения производных:
   а) тригонометрических функций;
   б) показательной и логарифмической функций;
   в) функции $\sqrt[n]{x}$.

2*. Обоснуйте формулы нахождения производных, указанных в вопросе 1.

Упражнения

Найдите производную функции **(1–7)**.

1°. 1) $y = \cos x + 1$; 2) $y = 2\sin x - 3x$; 3) $y = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$; 4) $y = x^3 - \operatorname{ctg} x$.

2. 1) $f(x) = x \operatorname{tg} x$; 2) $f(x) = x \operatorname{ctg} x$; 3) $f(x) = \sin x \operatorname{tg} x$; 4) $f(x) = \cos x \operatorname{ctg} x$.

3. 1) $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$; 2) $f(x) = \dfrac{x}{\cos x}$; 3) $f(x) = \sin^2 x$; 4) $f(x) = \cos^2 x$.

4. 1) $y = 2\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}$; 2) $y = \cos^2 3x - \sin^2 3x$;
3) $y = \sin 4x \cos 2x - \cos 4x \sin 2x$; 4) $y = \sin 7x \sin 3x + \cos 7x \cos 3x$.

5*. 1) $y = \sqrt{1 + \sin x}$; 2) $y = \cos x^2$; 3) $y = \sin(\cos x)$; 4) $y = \sqrt{\operatorname{tg} 6x}$.

6°. 1) $y = 3e^x + 4$; 2) $y = e^x - \ln x$; 3) $y = e^{-x} + x^5$; 4) $y = \ln(2x - 1)$.

7. 1) $y = e^{5x} \cos x$; 2) $y = \dfrac{\ln x}{x}$; 3) $y = \sqrt{x} \lg x$; 4) $y = x^3 \log_2 x$.

Вычислите значение производной функции $f(x)$ в указанной точке **(8–9)**.

8. 1°) $f(x) = \cos 2x,\ x = \frac{\pi}{2}$; 2°) $f(x) = x + \operatorname{tg} x,\ x = 0$;

3) $f(x) = \frac{1+\cos x}{\sin x},\ x = \frac{3\pi}{2}$; 4) $f(x) = \operatorname{tg}^2 2x,\ x = \frac{3\pi}{8}$.

9. 1°) $f(x) = e^{3x} + \sin x,\ x = 0$; 2°) $f(x) = x + \ln x,\ x = 2$;

3) $f(x) = (2x^2 - 1)\ln^2 x,\ x = 1$; 4) $f(x) = e^{\sin x} + e^{\cos x},\ x = \frac{\pi}{4}$.

Найдите значения x, для которых производная функции $f(x)$ равна нулю **(10–11)**.

10. 1°) $f(x) = 2 - \cos x$; 2°) $f(x) = \sin x - \frac{1}{2}x$;

3) $f(x) = \sin^2 2x$; 4) $f(x) = \frac{1}{2}\cos 2x + \sin x$.

11. 1°) $f(x) = \ln(x+3) - x$; 2°) $f(x) = e^x - x$;

3) $f(x) = \frac{x}{\ln x}$; 4) $f(x) = e^x \sin x$.

12. Решите неравенство $f'(x) > 0$, если:
1°) $f(x) = e^{2x} - x$; 2°) $f(x) = 2x - \ln x$;
3) $f(x) = x \ln x$; 4) $f(x) = (1-x)e^{-2x}$.

13. Найдите значения x, при которых значение производной функции $f(x)$: а) равно нулю, б) положительно, в) отрицательно.
1) $f(x) = x^2 \ln x$; 2) $f(x) = x^3 - 3\ln x$;

3) $f(x) = \frac{\ln x}{x}$; 4) $f(x) = \sqrt{x}\ln x$.

14. Запишите уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0, если:

1) $f(x) = \cos x,\ x_0 = \frac{\pi}{4}$; 2) $f(x) = \operatorname{tg} 2x,\ x_0 = \frac{\pi}{8}$;

3) $f(x) = e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}},\ x_0 = 0$; 4) $f(x) = \ln x - x,\ x_0 = 1$.

15. Найдите абсциссы x_0 точек графика функции $y = f(x)$, в которых касательная к нему образует угол φ с положительным направлением оси Ox:
1) $f(x) = \sin 2x,\ \varphi = 0°$; 2) $f(x) = \ln 2x,\ \varphi = 45°$; 3) $f(x) = e^{-x},\ \varphi = 135°$.

16*. Найдите уравнение касательной к графику функции $f(x) = e^{5x+1}$, которая параллельна прямой $y = 5x - 8$.

17*. Найдите уравнение касательной к графику функции $f(x) = e^{3x-2}$, которая параллельна прямой $y = 3x + 17$.

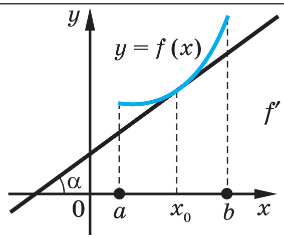
§6 ПРИМЕНЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ К ИССЛЕДОВАНИЮ ФУНКЦИЙ

6.1. Применение производной к нахождению промежутков возрастания и убывания функции и экстремумов функции

Таблица 6

1. Монотонность и постоянство функции

Достаточное условие возрастания функции

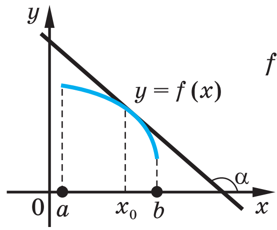


$0^\circ < \alpha < 90^\circ$

$f'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha > 0$

Если в каждой точке интервала $(a; b)$ **$f'(x) > 0$, то функция $f(x)$ возрастает** на этом интервале.

Достаточное условие убывания функции

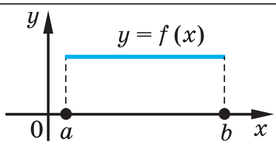


$90^\circ < \alpha < 180^\circ$

$f'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha < 0$

Если в каждой точке интервала $(a; b)$ **$f'(x) < 0$, то функция $f(x)$ убывает** на этом интервале.

Необходимое и достаточное условие постоянства функции



Функция $f(x)$ постоянна на интервале $(a; b)$ тогда и только тогда, когда $f'(x) = 0$ во всех точках этого интервала.

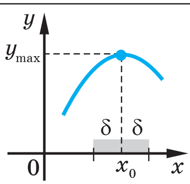
2. Экстремумы (максимумы и минимумы) функции

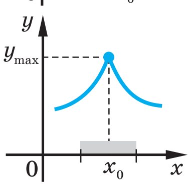
Точки максимума

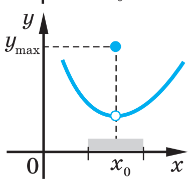
Точка x_0 из области определения функции $f(x)$ называется ***точкой максимума*** этой функции, если найдется δ-окрестность $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ точки x_0, такая, что для всех $x \neq x_0$ из этой окрестности выполняется неравенство

$$f(x) < f(x_0)$$

$x_{max} = x_0$ — *точка максимума*





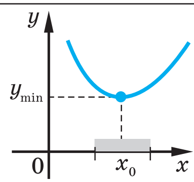


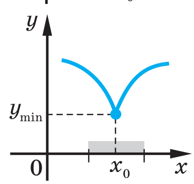
Точки минимума

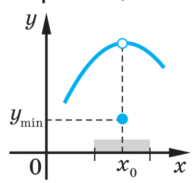
Точка x_0 из области определения функции $f(x)$ называется ***точкой минимума*** этой функции, если найдется δ-окрестность $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ точки x_0, такая, что для всех $x \neq x_0$ из этой окрестности выполняется неравенство

$$f(x) > f(x_0)$$

$x_{min} = x_0$ — *точка минимума*







Продолж. табл. 6

Точки максимума и минимума называются *точками екстремума*

Значения функции в точках максимума и минимума называются екстремумами (максимумом и минимумом) функции

$y_{\max} = f(x_{\max}) = f(x_0)$ — *максимум*	$y_{\min} = f(x_{\min}) = f(x_0)$ — *минимум*

3. Критические точки

Определение	Пример
Критическими точками **функции называются внутренние точки ее области определения, в которых производная равна нулю* или не существует.**	$f(x) = x^3 - 12x \qquad (D(f) = \boldsymbol{R})$. $f'(x) = 3x^2 - 12$ — существует на всей области определения. $f'(x) = 0$ при $3x^2 - 12 = 0$, $x^2 = 4$, $x = \pm 2$ — критические точки.

4. Необходимое и достаточное условия экстремума

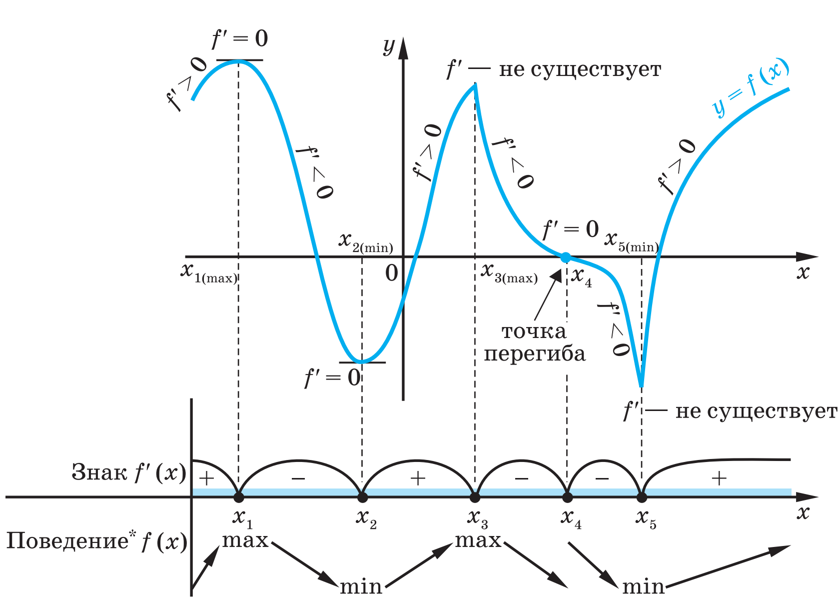
Необходимое условие экстремума	Достаточное условие экстремума
В точках экстремума проиводная функции $f(x)$ равна нулю или не существует $\boxed{x_0 \text{ — точка екстремума функции } f(x)}$ $\Downarrow$ $\boxed{f'(x_0) = 0 \text{ или } f'(x_0) \text{ — не существует}}$ (но не в каждой точке x_0, где $f'(x_0) = 0$ или $f'(x_0)$ не существует, будет экстремум)	*Если функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 и производная $f'(x)$ меняет знак при переходе** через точку x_0, то x_0 — точка экстремума функции $f(x)$* **В точке x_0 знак $f'(x)$ меняется с «+» на «–»** $\Rightarrow$ **x_0 — точка максимума** **В точке x_0 знак $f'(x)$ меняется с «–» на «+»** $\Rightarrow$ **x_0 — точка минимума**

* Внутренние точки области определения функции, в которых производная равна нулю, также называют стационарными точками.

** Имеется в виду переход через точку x_0 при движении слева направо.

Продолж. табл. 6

5. Пример графика функции $y = f(x)$, имеющей экстремумы (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 — критические точки)

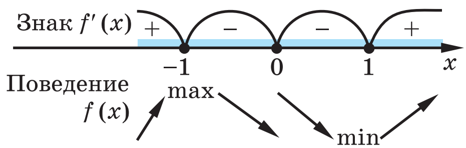


6. Исследование функции $y = f(x)$ на монотонность и экстремум

Схема	Пример: $y = f(x) = 3x^5 - 5x^3 + 1$
1. Найти область определения функции.	Область определения: $D(f) = \boldsymbol{R}$.
2. Найти производную $f'(x)$.	$f'(x) = 15x^4 - 15x^2 = 15x^2(x^2 - 1) = 15x^2(x - 1)(x + 1)$.
3. Найти критические точки, то есть *внутренние точки области определения, в которых $f'(x)$ равна нулю или не существует.*	$f'(x)$ существует на всей области определения. $f'(x) = 0$ при $x = 0$, $x = 1$, $x = -1$.

* Знаком «↗» обозначено возрастание функции, а знаком «↘» — ее убывание на соответствующем промежутке.

Продолж. табл. 6

4. Отметить критические точки на области определения, найти знак производной и характер поведения функции на каждом из интервалов, на которые разбивается область определения.	
5. Определить относительно каждой критической точки, является ли она точкой максимума или минимума или не является точкой экстремума.	
6. Записать результат исследования (*промежутки монотонности и экстремумы*).	$f(x)$ возрастает на каждом из промежутков: $(-\infty; -1]$ и $[1; +\infty)$*; $f(x)$ убывает на $[-1; 1]$. Точки экстремума: $x_{max} = -1$; $x_{min} = 1$. Екстремумы: $y_{max} = f(-1) = 3$; $y_{min} = f(1) = -1$.

Объяснение и обоснование

1. Монотонность и постоянство функции. Критические точки функции. Производная является важным инструментом исследования функции. В частности, с помощью производной удобно исследовать функцию на монотонность (то есть на возрастание и убывание).

Напомним, что *функция $f(x)$ называется возрастающей на множестве P, если большему значению аргумента из этого множества соответствует большее значение функции*, то есть для любых x_1 и x_2 из этого множества из условия $x_2 > x_1$ следует, что $f(x_2) > f(x_1)$.

Функция $f(x)$ называется убывающей на множестве P, если большему значению аргумента из этого множества соответствует меньшее значение функции, то есть для любых x_1 и x_2 из этого множества из условия $x_2 > x_1$ следует, что $f(x_2) < f(x_1)$.

Как видно из рисунка 27, *а*, в каждой точке графика возрастающей функции касательная образует с положительным направлением оси Ox или острый угол α (тогда $f'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha > 0$), или угол, равный нулю (тогда $f'(x_1) = \operatorname{tg} 0 = 0$)). А в каждой точке графика убывающей функции (рис. 27, *б*) ка-

* Как отмечается на с. 69, поскольку функция $f(x)$ непрерывна (например, вследствие того, что она дифференцируема на всей области определения), то точки -1 и 1 можно включить в промежутки возрастания и убывания функции.

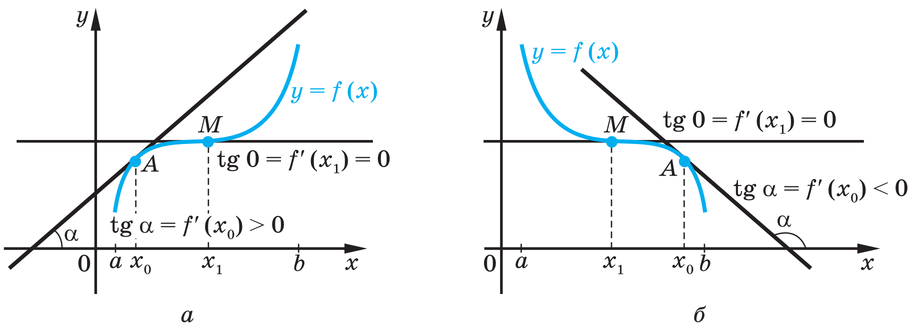


Рис. 27

сательная образует с положительным направлением оси Ox или тупой угол α (тогда $f'(x_0) = \text{tg}\ \alpha < 0$), или угол, равный нулю (тогда $f'(x_1) = \text{tg}\ 0 = 0$)).

Следовательно, *если на каком-нибудь интервале функция $f(x)$ дифференцируема и возрастает, то $f'(x) \geqslant 0$ на этом интервале; если на каком-нибудь интервале функция $f(x)$ дифференцируема и убывает, то $f'(x) \leqslant 0$ на этом интервале*.

Но для решения задач на исследование свойств функций важными являются обратные утверждения, которые позволяют по знаку производной выяснить характер монотонности функции.

Для обоснования соответствующих утверждений воспользуемся так называемой формулой Лагранжа, строгое доказательство которой приводится в курсе математического анализа. Здесь мы ограничимся только ее геометрической иллюстрацией и формулировкой.

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и дифференцируема во всех точках интервала $(a; b)$. Тогда на этом интервале найдется такая точка c, в которой касательная l к графику функции $f(x)$ в точке с абсциссой c будет параллельна секущей AB, проходящей через точки $A(a; f(a))$, $B(b; f(b))$ (рис. 28).

Действительно, рассмотрим все возможные прямые, которые параллельны секущей AB и имеют с графиком функции $f(x)$ на интервале $(a; b)$ хотя бы одну общую точку. Та из этих прямых, которая находится на наибольшем расстоянии от секущей AB, и будет касательной к графику функции $f(x)$ (это как раз и будет предельное положение секущей, параллельной AB). Если обозначить абсциссу точки касания через c, то, учитывая геометрический смысл производной, получаем $f'(c) = \text{tg}\ \alpha$, где α — угол между прямой l и положительным направле-

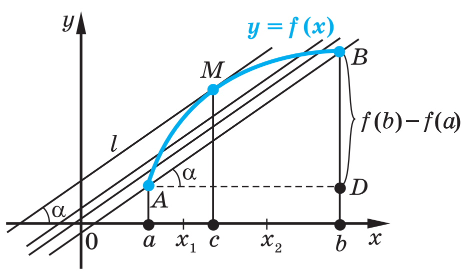


Рис. 28

нием оси Ox. Но $l \parallel AB$, поэтому угол α равен углу наклона секущей AB к оси Ox (который, в свою очередь, равен углу A прямоугольного треугольника ABD с катетами: $AD = b - a$, $BD = f(b) - f(a)$).

Тогда $f'(c) = \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{BD}{AD} = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$. Таким образом, можно сделать вывод: *если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и дифференцируема во всех точках интервала $(a; b)$, то на интервале $(a; b)$ найдется такая точка $c \in (a; b)$, в которой*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

Эта формула называется *формулой Лагранжа*.

Теперь применим эту формулу для обоснования достаточных условий возрастания и убывания функции.

1. ***Если $f'(x) > 0$ в каждой точке интервала $(a; b)$, то функция $f(x)$ возрастает на этом интервале.***

2. ***Если $f'(x) < 0$ в каждой точке интервала $(a; b)$, то функция $f(x)$ убывает на этом интервале.***

Возьмем две произвольные точки x_1 и x_2 из заданного интервала. По формуле Лагранжа существует число $c \in (x_1; x_2)$, такое, что

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c). \qquad (1)$$

Число c принадлежит заданному интервалу, поскольку ему принадлежат числа x_1 и x_2. Пусть $x_2 > x_1$, тогда $x_2 - x_1 > 0$.

Если $f'(x) > 0$ в каждой точке заданного интервала, то $f'(c) > 0$, и из равенства (1) получаем, что $f(x_2) - f(x_1) > 0$, то есть $f(x_2) > f(x_1)$. Из этого следует, что функция $f(x)$ возрастает на заданном интервале.

Если $f'(x) < 0$ в каждой точке заданного интервала, то $f'(c) < 0$, и из равенства (1) получаем, что $f(x_2) - f(x_1) < 0$, то есть $f(x_2) < f(x_1)$. Из этого следует, что функция $f(x)$ убывает на заданном интервале.

Задача 1 Функция $f(x) = x^3 + x$ определена на всем множестве действительных чисел ($x \in \boldsymbol{R}$) и имеет производную $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$ при всех значениях x. Следовательно, эта функция возрастает на всей области определения.

Задача 2 Функция $g(x) = \sin x - 3x$ определена на всем множестве действительных чисел ($x \in \boldsymbol{R}$) и имеет производную $g'(x) = \cos x - 3$. Поскольку $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$, то $\cos x - 3 < 0$ при всех значениях x. Следовательно, эта функция убывает на всей области определения.

Заметим, что в курсе 10 класса (§ 25) мы без доказательства приняли, что при $x > 0$ функция $y = x^\alpha$, где α — дробное число, возрастает при $\alpha > 0$ и убывает при $\alpha < 0$. Обоснуем это. Действительно, $y' = (x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha - 1}$. Тогда при $x > 0$ и $\alpha > 0$ значение $y' > 0$, следовательно, функция $y = x^\alpha$ возрастает, а при при $x > 0$ и $\alpha < 0$ значение $y' < 0$, следовательно, функция $y = x^{\alpha}$ убывает.

Достаточные признаки возрастания и убывания функции имеют наглядную физическую иллюстрацию. Пусть по оси ординат двигается точка, которая в момент времени t имеет ординату $y = f(t)$. Учитывая физический смысл производной, получаем, что скорость этой точки в момент времени t равна $f'(t)$. Если $f'(t) > 0$, то точка двигается в положительном направлении оси ординат, и с увеличением времени ордината точки увеличивается, то есть функция возрастает. Если же $f'(t) < 0$, то точка двигается в отрицательном направлении оси ординат, и с увеличением времени ордината точки уменьшается, то есть функция убывает.

Отметим, что в этом случае, когда $f'(t) = 0$, скорость точки равна нулю, то есть точка не двигается, и поэтому ее ордината остается постоянной. Получаем *условие постоянства функции*.

Функция $f(x)$ является постоянной на интервале $(a; b)$ тогда и только тогда, когда $f'(x) = 0$ во всех точках этого интервала.

Действительно, если $f(x) = k$ (где k — постоянная), то $f'(x) = 0$.

Наоборот, если $f'(x) = 0$ во всех точках интервала $(a; b)$, то зафиксируем некоторое число x_0 из этого интервала и найдем значение функции в точке x_0 (пусть $f(x_0) = k$). Для любого числа x из заданного интервала по формуле Лагранжа можно найти число c, которое содержится между x и x_0, такое, что

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(c).$$

Тогда $f(x) - f(x_0) = f'(c)(x - x_0)$.

Поскольку $c \in (a; b)$, то по условию $f'(c) = 0$. Следовательно, $f(x) - f(x_0) = 0$. Таким образом, для всех x из заданного интервала $f(x) = f(x_0) = k$, то есть функция $f(x)$ является постоянной.

З а м е ч а н и е. В случае, *когда функция* $f(x)$ *непрерывна на отрезке* $[a; b]$ *и* $f'(x) = 0$ *во всех точках интервала* $(a; b)$, то при приближении значения x к точке a справа значение $f(x) \to f(a)$. Но $f(x) = k$, тогда и $f(a) = k$ (аналогично обосновывается и то, что при приближении значения x к точке b слева $f(b) = k$). Следовательно, в этом случае *функция* $f(x)$ *является постоянной на отрезке* $[a; b]$.

Для нахождения промежутков возрастания и убывания функции необходимо решить неравенства $f'(x) > 0$ и $f'(x) < 0$ на области определения функции $f(x)$. Поскольку $f'(x)$ также является функцией переменной x, то для решения этих неравенств можно использовать метод интервалов, точнее, его обобщение, которое основывается на утверждении, называемом в курсе математического анализа т е о р е м о й Д а р б у*:

* Дарбу Жан Гастон (1842–1917) — французский математик, который сделал значительный вклад в развитие дифференциальной геометрии, интегрального исчисления и механики.

точки, в которых производная равна нулю или не существует, разбивают область определения функции $f(x)$ на промежутки, в каждом из которых $f'(x)$ сохраняет постоянный знак.

Отметим, что

внутренние* точки области определения функции, в которых ее производная равна нулю или не существует, называются *критическими точками* этой функции.

Исходя из плана решения неравенств методом интервалов (с. 21), получаем, что промежутки возрастания и убывания функции $f(x)$ можно находить по схеме:

1. *Найти область определения функции $f(x)$.*
2. *Найти производную $f'(x)$.*
3. *Выяснить, в каких внутренних точках области определения функции производная $f'(x)$ равна нулю или не существует* (то есть найти критические точки этой функции).
4. *Отметить найденные точки на области определения функции $f(x)$ и найти знак $f'(x)$ в каждом из промежутков, на которые разбивается область определения функции* (знак можно определить, вычислив значение $f'(x)$ в любой точке промежутка).

Задача 3 Исследуем функцию $f(x) = x^3 - 3x$ на возрастание и убывание.

Решение

1. Область определения данной функции — все действительные числа:

$$D(f) = \boldsymbol{R}.$$

2. Производная $f'(x) = 3x^2 - 3$.
3. Производная существует на всей области определения функции;

$$f'(x) = 0, \text{ если } 3x^2 - 3 = 0, \text{ то есть при } x = 1 \text{ или } x = -1.$$

4. Решаем неравенства $f'(x) > 0$ и $f'(x) < 0$ на области определения функции $f(x)$ методом интервалов. Для этого отмечаем точки 1 и (-1) на области определения функции $f(x)$ и находим знак $f'(x)$ в каждом из полученных промежутков (рис. 29).

Учитывая достаточные условия возрастания и убывания функции, получаем, что в тех интервалах, где производная положительна, функция $f(x)$ возрастает, а в тех интервалах, где производная отрицательна, функция $f(x)$ убывает. Следовательно, функция $f(x)$ возрастает на каждом из интервалов $(-\infty; -1)$ и $(1; +\infty)$ и убывает на интервале $(-1; 1)$.

График функции $y = x^3 - 3x$ изображен на рисунке 30. При построении графика учтено, что $f(-1) = 2$ и $f(1) = -2$. Из графика видно, что функция $f(x) = x^3 - 3x$ возрастает не только на интервалах $(-\infty; -1)$ и $(1; +\infty)$, но и на промежутках $(-\infty; -1]$ и

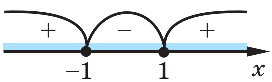


Рис. 29

*Внутренней точкой множества называется такая точка, которая принадлежит этому множеству вместе с некоторой своей окрестностью.

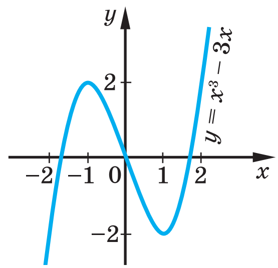


Рис. 30

[1; $+\infty$) и убывает не только на интервале (−1; 1), но и на отрезке [−1; 1].

Отметим, что *когда функция $f(x)$ непрерывна в любом из концов промежутка возрастания (убывания), то его всегда можно присоединить к этому промежутку* (как точки −1 и 1 в предыдущей задаче). Примем это утверждение без доказательства.

2. Экстремумы (максимумы и минимумы) функции. На рисунке 30 изображен график функции $y = x^3 - 3x$. Рассмотрим окрестность точки $x = -1$, то есть произвольный интервал, содержащий точку −1 (например, δ-окрестность этой точки). Как видно из рисунка, существует такая окрестность точки $x = -1$, что наибольшее значение для точек из этой окрестности функция $f(x) = x^3 - 3x$ принимает в точке $x = -1$. Например, на интервале (−2; 0) наибольшее значение, равное 2, функция принимает в точке $x = -1$. Точку $x = -1$ называют *точкой максимума* этой функции и обозначают x_{max}, а значение функции в этой точке $f(-1) = 2$ называют *максимумом* функции.

Аналогично точку $x = 1$ называют *точкой минимума* функции $f(x) = x^3 - 3x$, поскольку значение функции в этой точке меньше, чем ее значение в любой точке некоторой окрестности точки 1, например, окрестности (0,5; 1,5). Обозначают точку минимума x_{min}, а значение функции в этой точке $f(1) = -2$ называют *минимумом* функции. (Латинское слово *maximum* — максимум — означает «наибольшее», а *minimum* — минимум — «наименьшее».)

Точки максимума и минимума функции еще называют точками экстремума, а значения функции в этих точках называют *экстремумами* функции (от латинского слова *extremum* — экстремум, что означает «крайний»). Приведем определения точек максимума и минимума.

Точка x_0 из области определения функции $f(x)$ называется *точкой максимума* этой функции, если найдется δ-окрестность $(x_0 - \delta;\ x_0 + \delta)$ точки x_0, такая, что для всех $x \neq x_0$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(x) < f(x_0)$.

Точка x_0 из области определения функции $f(x)$ называется *точкой минимума* этой функции, если найдется δ-окрестность $(x_0 - \delta;\ x_0 + \delta)$ точки x_0, такая, что для всех $x \neq x_0$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(x) > f(x_0)$.

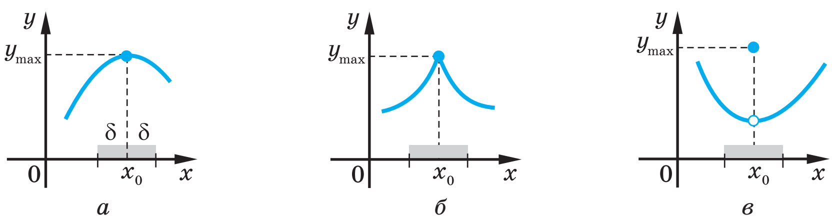


Рис. 31

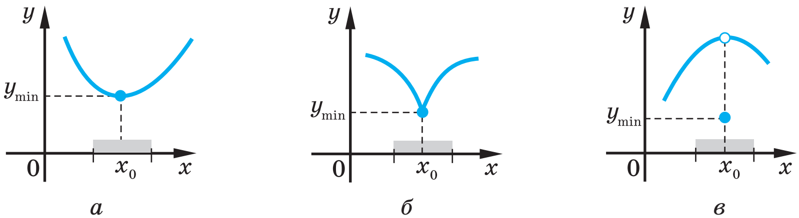


Рис. 32

По определению значение функции $f(x)$ в точке максимума x_0 является наибольшим среди значений функции из некоторой окрестности этой точки, поэтому график функции $f(x)$ в окрестности точки x_0 чаще всего имеет вид гладкого «холма» (рис. 31, *а*), но может иметь и вид заостренного «пика» (рис. 31, *б*). В точке максимума также может быть изолированная точка графика (понятно, что в этом случае функция не будет непрерывной в точке x_0), в которой достигается наибольшее значение функции для некоторой окрестности точки x_0 (рис. 31, *в*).

Аналогично значение функции $f(x)$ в точке минимума x_0 является наименьшим среди значений функции из некоторой окрестности этой точки, поэтому график функции $f(x)$ в окрестности точки x_0 обычно имеет вид «впадины», гладкой (рис. 32, *а*) или заостренной (рис. 32, *б*). В точке минимума также может быть изолированная точка графика, в которой достигается наименьшее значение функции для некоторой окрестности точки x_0 (рис. 32, *в*).

Замечание. По определению точки экстремума — это такие точки, в которых функция принимает наибольшее или наименьшее значения по сравнению со значениями этой функции в точках некоторой окрестности экстремальной точки. Такой экстремум обычно называют *локальным экстремумом* (от латинского *lokalis*, что означает «местный»). Например, на рисунке 30 изображен график функции $y = x^3 - 3x$, которая имеет локальный максимум в точке $x_{max} = -1$ ($y_{max} = 2$) и локальный минимум в точке $x_{min} = 1$ ($y_{min} = -2$), но, как видно из графика, на всей области определения эта функция не имеет ни наибольшего, ни наименьшего значений.

3. Необходимое и достаточное условия экстремума. При исследовании функции и построении ее графика важное значение имеет нахождение точек экстремумов функции. Покажем, что *точками экстремума могут быть только критические точки функции*, то есть внутренние точки области определения функции, в которых ее производная равна нулю или не существует.

Теорема Ферма (необходимое условие экстремума). ***Если x_0 является точкой экстремума функции $f(x)$ и в этой точке существует производная $f'(x_0)$, то она равна нулю: $f'(x_0) = 0$.***

Докажем это утверждение методом от противного. Пусть x_0 является точкой экстремума функции $f(x)$ и в этой точке существует производная $f'(x_0)$. Допустим, что $f'(x_0) \neq 0$.

Рассмотрим случай, когда $f'(x_0) > 0$. По определению производной при $x \to x_0$ (то есть при $\Delta x \to 0$) отношение $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ стремится к положительному числу $f'(x_0)$, а следовательно, и само будет положительным при всех x, достаточно близких к x_0. Для таких x

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0.$$

Тогда при $x > x_0$ получаем, что $f(x) > f(x_0)$, и, значит, точка x_0 не может быть точкой максимума.

При $x < x_0$ получаем, что $f(x) < f(x_0)$, и, следовательно, точка x_0 не может быть точкой минимума. То есть точка x_0 не может быть точкой экстремума, что противоречит условию.

Аналогично рассматривается и случай, когда $f'(x_0) < 0$. ○

Отметим, что теорема Ферма дает только необходимое условие экстремума: из того, что $f'(x_0) = 0$, не обязательно следует, что в точке x_0 функция имеет экстремум. Например, если $f(x) = x^3$, то $f'(x) = 3x^2$ и $f'(0) = 0$. Но точка $x = 0$ не является точкой экстремума, поскольку функция x^3 возрастает на всей числовой прямой (рис. 33).

Теорема Ферма имеет наглядный геометрический смысл: касательная к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0 (где x_0 — точка экстремума функции) параллельна оси абсцис (или совпадает с ней) и поэтому ее угловой коэффициент $f'(x_0)$ равен нулю (рис. 34).

Обратим внимание, что в точке с абсциссой $x_0 = 0$ к графику функции $y = x^3$ также можно провести касательную: поскольку $f'(0) = 0$, то этой касательной является ось Ox. Но графики функций, приведенные на рисунках 33 и 34, по-разному расположены относительно касательных. На рисунке 34, где x_0 и x_1 — точки экстремума, можно указать окрестности этих точек, для которых соответствующие точки графика располагаются по одну сторону от касательной, а на рисунке 33 *график функции $y = x^3$ при переходе аргумента через точку $x_0 = 0$* (в которой производная равна нулю, но которая не

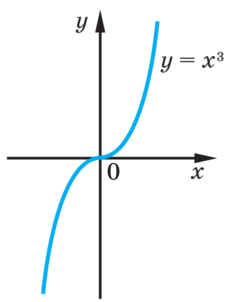


Рис. 33

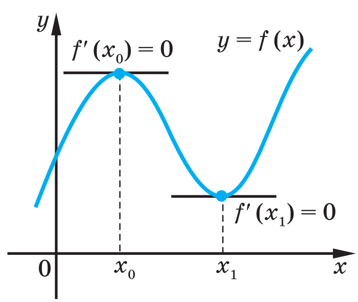


Рис. 34

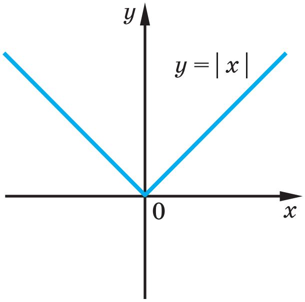


Рис. 35

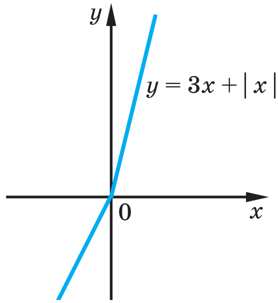


Рис. 36

является точкой экстремума) *переходит с одной стороны касательной на другую*. В этом случае точку x_0 называют *точкой перегиба** *функции*.

Функция может иметь экстремум и в той критической точке, в которой не существует производная данной функции. Например, как было показано на с. 39, функция $y = |x|$ не имеет производной в точке $x = 0$, но, как видно из ее графика (рис. 35), именно в этой точке функция имеет минимум.

Отметим, что не каждая критическая точка, в которой не существует производная данной функции, будет точкой экстремума этой функции. Например, функция $f(x) = 3x + |x|$ не имеет производной в точке $x = 0$: график имеет излом при $x = 0$ (рис. 36). Действительно, если допустить, что функция $f(x) = 3x + |x|$ имеет производную в точке 0, то функция $f(x) - 3x$ также должна иметь производную в точке 0. Так как $f(x) - 3x = |x|$, а функция $|x|$ не имеет производной в точке 0, значит, функция $f(x) - 3x$ не имеет производной в точке 0, то есть мы пришли к противоречию. Следовательно, функция $f(x)$ в точке 0 производной не имеет. Но, как видно из рисунка 36, функция $f(x)$ возрастает на всей числовой прямой и экстремума не имеет.

Приведенные соображения и примеры показывают, что для нахождения точек экстремума функции необходимо прежде всего найти ее критические точки. Для выяснения того, является ли соответствующая критическая точка точкой экстремума, необходимо провести дополнительное исследование. Этому часто помогают достаточные условия существования экстремума в точке.

Теорема 1 (признак максимума функции). ***Если функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 и при переходе через точку x_0 ее производная меняет знак с плюса на минус (то есть в некоторой δ-окрестности точки x_0 при $x < x_0$ значение $f'(x) > 0$, а при $x > x_0$ значение $f'(x) < 0$), то точка x_0 является точкой максимума функции $f(x)$.***

Рассмотрим заданную δ-окрестность точки x_0, то есть интервал $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$. По условию производная $f'(x) > 0$ на интервале $(x_0 - \delta; x_0)$ (при $x < x_0$). Следовательно, функция $f(x)$ возрастает на этом интервале, а учитывая непрерывность $f(x)$ в точке x_0, функция $f(x)$ возрастает и на

* Более детально о точках перегиба см. на с. 149.

промежутке $(x_0 - \delta; x_0]$. Тогда для всех x из интервала $(x_0 - \delta; x_0)$ имеем $x < x_0$, следовательно, $f(x) < f(x_0)$.

Аналогично по условию производная $f'(x) < 0$ на интервале $(x_0; x_0 + \delta)$ (при $x > x_0$). Следовательно, функция $f(x)$ убывает на этом интервале, а учитывая непрерывность $f(x)$ в точке x_0, функция $f(x)$ убывает и на промежутке $[x_0; x_0 + \delta)$. Тогда для всех x из интервала $(x_0; x_0 + \delta)$ имеем $x > x_0$, следовательно, $f(x) < f(x_0)$. Таким образом, $f(x) < f(x_0)$ для всех $x \neq x_0$ из некоторой δ-окрестности точки x_0, а это и означает, что точка x_0 является точкой максимума функции $f(x)$.

Т е о р е м а 2 (признак минимума функции). ***Если функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 и при переходе через точку x_0 ее производная меняет знак с минуса на плюс (то есть в некоторой δ-окрестности точки x_0 при $x < x_0$ значение $f'(x) < 0$, а при $x > x_0$ значение $f'(x) > 0$), то точка x_0 является точкой минимума функции $f(x)$.***

Доказательство этой теоремы полностью аналогично доказательству теоремы 1 (предлагаем провести его самостоятельно).

Теоремы 1 и 2 дают возможность сделать такой вывод: *если функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 и производная $f'(x)$ меняет знак при переходе через точку x_0, то x_0 — точка экстремума функции $f(x)$.*

Если же функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 и ее производная $f'(x)$ не меняет знак при переходе через точку x_0, то точка x_0 не может быть точкой экстремума функции.

Действительно, если, например, $f'(x) > 0$ на интервале $(x_0 - \delta; x_0)$ и на интервале $(x_0; x_0 + \delta)$, то функция возрастает на каждом из этих интервалов. Учитывая ее непрерывность в точке x_0 (см. доказательство теоремы 1), получаем, что для всех $x \in (x_0 - \delta; x_0)$ выполняется неравенство $f(x) < f(x_0)$ и для всех $x \in (x_0; x_0 + \delta)$ выполняется неравенство $f(x_0) < f(x)$. Это означает, что на всем промежутке $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ функция $f(x)$ возрастает и точка x_0 не является точкой экстремума. Аналогично рассматривается и случай, когда $f'(x) < 0$ на рассмотренных интервалах.

З а м е ч а н и е. Приведенное обоснование позволяет уточнить условия возрастания и убывания функции.

Если $f'(x) \geqslant 0$ в каждой точке интервала $(a; b)$, причем уравнение $f'(x) = 0$ имеет только конечное (или счетное[*]*) множество корней, то функция $f(x)$ возрастает на этом интервале.*

Если $f'(x) \leqslant 0$ в каждой точке интервала $(a; b)$, причем уравнение $f'(x) = 0$ имеет только конечное (или счетное) множество корней, то функция $f(x)$ убывает на этом интервале.

Для практического *исследования функции на экстремумы* можно использовать уточненный вариант схемы, приведенный на с. 68, а именно:

[*] Счетность множества означает, что мы можем установить взаимно однозначное соответствие между элементами этого множества и натуральными числами, то есть можем указать, как нумеровать все элементы множества.

1. *Найти область определения функции.*
2. *Найти производную* $f'(x)$.
3. *Найти критические точки* (то есть *внутренние точки области определения, в которых* $f'(x)$ *равна нулю или не существует*).
4. *Отметить критические точки на области определения, найти знак производной и характер поведения функции на каждом из интервалов, на которые разбивается область определения.*
5. *Относительно каждой критической точки определить, является ли она точкой максимума или минимума, или не является точкой экстремума.*

Пример применения этой схемы к исследованию функции на экстремум приведен в таблице 6 (с. 63) и в задаче 2, рассмотренной далее.

Примеры решения задач

Задача 1 Функция $y = f(x)$ определена на промежутке $(-7; 8)$. На рисунке 37 изображен график ее производной.
1) Укажите промежутки возрастания и убывания функции $f(x)$.
2) Найдите критические точки функции. Определите, какие из них являются точками максимума, какие — точками минимума, а какие не является точками экстремума.

Решение

1) ▶ Из графика имеем, что $f'(x) > 0$ на промежутках $(-4; 2)$ и $(6; 8)$, следовательно, $f(x)$ возрастает на этих промежутках. Аналогично $f'(x) < 0$ на промежутках $(-7; -4)$ и $(2; 6)$, следовательно, $f(x)$ убывает на этих промежутках. Поскольку в точках -4, 2 и 6 существует производная $f'(x)$, то функция $f(x)$ непрерывна в этих точках и поэтому эти точки можно включить в промежутки возрастания и убывания функции.

Ответ: $f(x)$ возрастает на промежутках $[-4; 2]$ и $[6; 8]$ и убывает на промежутках $[-7; -4]$ и $[2; 6]$. ◁

2) ▶ Производная $f'(x)$ существует на всей области определения функции $f(x)$ и равна нулю в точках -4, 2 и 6. Это внутренние точки области определения, следовательно, критическими точками будут только точки -4, 2 и 6.

Поскольку производная суще-

Комментарий

1) Как известно, *на тех промежутках, где производная функции положительна, функция возрастает, а на тех промежутках, где производная отрицательна, — убывает*. Поэтому по графику выясняем промежутки, в которых производная положительна и в которых — отрицательна. Это и будут промежутки возрастания и убывания функции.

2) *Критические точки — это внутренние точки области определения, в которых производная равна нулю или не существует*. Из графика видно, что производная $f'(x)$ существует на всей заданной области определения. Следовательно, критическими точками будут только те значения x, при которых производная равна нулю.

Для определения того, является ли критическая точка точкой экстремума, используем достаточные

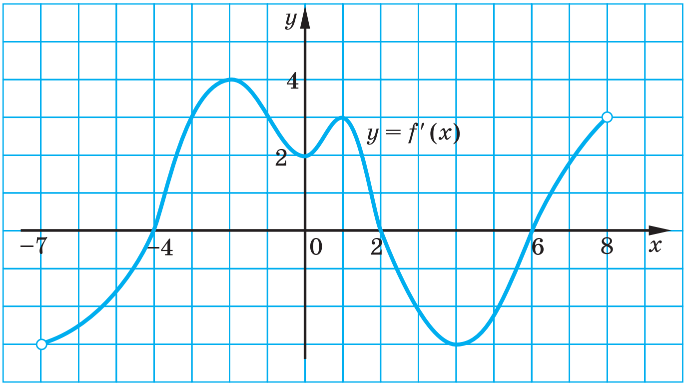


Рис. 37

ствует на всей области определения функции, то функция непрерывна в каждой точке области определения. В точках −4 и 6 производная меняет знак с «−» на «+», следовательно, это точки минимума. В точке 2 производная меняет знак с «+» на «−», следовательно, это точка максимума.

Ответ: $x_{1\,\min} = -4$, $x_{2\,\min} = 6$, $x_{\max} = 2$. ◁

условия экстремума: *если в критической точке функция непрерывна и ее производная меняет знак с плюса на минус, то эта критическая точка является точкой максимума, а если с минуса на плюс, то эта точка минимума.*

Задача 2 Для функции $f(x) = x + \frac{25}{x}$ найдите промежутки монотонности, точки экстремума и значения функции в точках экстремума.

Решение

▶ 1. Область определения, $D(f)$: $x \neq 0$, то есть $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

2. $f'(x) = x' + 25\left(\frac{1}{x}\right)' = 1 - \frac{25}{x^2}$.

3. Производная существует на всей области определения функции $f(x)$.

$f'(x) = 0$. Тогда $1 - \frac{25}{x^2} = 0$, следовательно, $x^2 = 25$, то есть $x = 5$ и $x = -5$ — критические точки.

Комментарий

Исследовать функцию на монотонность и экстремум можно по схеме:

1. *Найти область определения функции.*
2. *Найти производную $f'(x)$.*
3. *Найти критические точки* (то есть *внутренние точки области определения, в которых $f'(x)$ равна нулю или не существует*).
4. *Отметить критические точки на области определения, найти знак производной и характер*

4. Отмечаем критические точки на области определения функции $f(x)$ и находим знак $f'(x)$ в каждом из полученных промежутков (рис. 38).

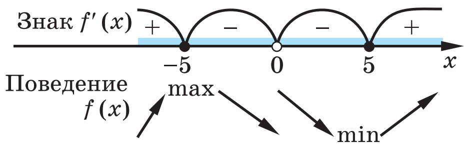


Рис. 38

Получаем, что функция $f(x)$ возрастает на промежутках $(-\infty; -5]$ и $[5; +\infty)$ и убывает на промежутках $[-5; 0)$ и $(0; 5]$. В точке -5 производная меняет знак с плюса на минус, следовательно, это точка максимума; в точке 5 производная меняет знак с минуса на плюс, следовательно, это точка минимума.
То есть $x_{max} = -5$, $x_{min} = 5$.
Тогда $y_{max} = f(-5) = -10$,
$y_{min} = f(5) = 10$. ◁

поведения функции на каждом из интервалов, на которые разбивается область определения.

5. *Относительно каждой критической точки определить, является ли она точкой максимума или минимума, или не является точкой экстремума.*

Функция непрерывна в каждой точке области определения (она дифференцируема в каждой точке области определения), и поэтому, записывая промежутки возрастания и убывания функции, критические точки можно включить в эти промежутки. Для выяснения того, является ли критическая точка точкой экстремума, используем достаточные условия экстремума.

Замечание. Результаты исследования функции на монотонность и экстремумы удобно фиксировать не только в виде схемы, изображенной на рисунке в решении задачи 2, но и в виде специальной таблицы такого вида:

x	$(-\infty; -5)$	-5	$(-5; 0)$	$(0; 5)$	5	$(5; +\infty)$
$f'(x)$	+	0	–	–	0	+
$f(x)$	↗	-10	↘	↘	10	↗
		max			min	

Задача 3* Для заданной функции найдите промежутки монотонности, точки экстремумов и экстремумы функции:
1) $f(x) = x^3 - 12|x + 1|$; 2) $\varphi(x) = 4\cos x - \cos 2x$.

Комментарий

Для исследования заданных функций снова используем схему, приведенную на с. 73.

В задании 1 используем определение модуля и отдельно найдем производную при $x < -1$ и при $x > -1$. А чтобы выяснить, существует ли производная $f'(x)$ при $x = -1$, попытаемся найти значения $f'(-1)$ по двум формулам (1) и (2), приведенным далее в решении, и сравнить их*. Чтобы найти точки, в которых $f'(x) = 0$, приравняем к нулю значения производной $f'(x)$ при $x < -1$ и при $x > -1$ и учтем соответствующие ограничения для x.

В задании 2 учтем, что уравнение $\varphi'(x) = 0$ — это тригонометрическое уравнение, имеющее бесконечное множество корней, то есть функция $\varphi(x)$ имеет бесконечное количество критических точек. Поэтому отметить все критические точки на области определения функции (как это предлагается в схеме исследования функции) мы не в состоянии. В таком случае можно попытаться непосредственно использовать достаточные признаки возрастания и убывания функции (то есть решить неравенства $\varphi'(x) > 0$ и $\varphi'(x) < 0$) или в случае, когда функция $\varphi'(x)$ является периодической, провести исследование поведения $\varphi'(x)$ на одном периоде, а затем результат повторить через период. Обратим внимание, что в случае, когда $\varphi'(x)$ определена на всем периоде и мы знаем промежутки, где выполняется неравенство $\varphi'(x) > 0$, и точки, где выполняется равенство $\varphi'(x) = 0$, для всех остальных точек периода обязательно будет выполняться неравенство $\varphi'(x) < 0$.

Решение

1) ▶ Область определения: $D(f) = \boldsymbol{R}$. Запишем заданную функцию так:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 12x - 12 \text{ при } x \geqslant -1, \\ x^3 + 12x + 12 \text{ при } x < -1. \end{cases}$$

Тогда

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 - 12 \text{ при } x > -1, & (1) \\ 3x^2 + 12 \text{ при } x < -1. & (2) \end{cases}$$

Производная $f'(x)$ не существует в точке $x = -1$, поскольку значения $f'(-1)$, вычисленные по формулам (1) и (2), разные ($-9 \neq 15$), следовательно, $x = -1$ — критическая точка функции $f(x)$. Значение $f'(x)$, вычисленное по формуле (2), не может равняться нулю ($3x^2 + 12 \neq 0$). Для формулы (1) имеем $3x^2 - 12 = 0$, то есть $x = 2$ и $x = -2$, но, учитывая условие $x > -1$, получаем, что только $x = 2$ является критической точкой. Следовательно, функция $f(x)$ имеет две критические точки: 2 и (-1).

Отмечаем критические точки на области определения функции $f(x)$ и находим знак $f'(x)$ на каждом из промежутков (рис. 39). Получаем, что функция $f(x)$ возрастает на промежутках $(-\infty; -1]$ и $[2; +\infty)$ и убывает на промежутке $[-1; 2]$.

В точке (-1) производная меняет знак с плюса на минус, следовательно, это точка максимума. В точке 2 производная меняет знак с минуса на плюс, следовательно, это точка минимума. Тогда $x_{max} = -1$, $y_{max} = f(-1) = -1$,

$x_{min} = 2$, $y_{min} = f(2) = -28$. ◁

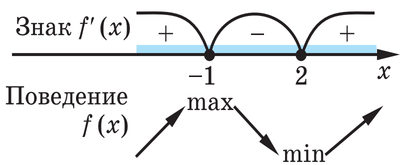


Рис. 39

* Фактически мы будем сравнивать значения так называемых односторонних производных функции $f(x)$ в точке (-1). Эти производные определяются аналогично односторонним пределам функции (см. с. 119).

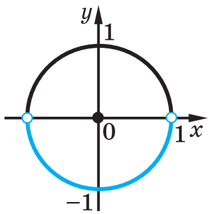


Рис. 40

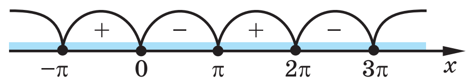


Рис. 41

2) ▶ Область определения: $D(\varphi) = \boldsymbol{R}$. Производная $\varphi'(x) = (4\cos x - \cos 2x)' =$
$= -4\sin x + 2\sin 2x = -4\sin x + 4\sin x\cos x = 4\sin x(\cos x - 1)$.

Критические точки: производная $\varphi'(x)$ существует на всей области определения функции $\varphi(x)$, следовательно, критическими точками будут все значения x, для которых $\varphi'(x) = 0$.

$4\sin x(\cos x - 1) = 0$. Тогда $\sin x = 0$ или $\cos x = 1$. Следовательно, $x = \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$, или $x = 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. (Значение $2\pi k$ дает также и формула πn (при $n = 2k$), поэтому все критические точки можно задать формулой πn, $n \in \boldsymbol{Z}$.)

Функция $\varphi(x)$ возрастает в тех точках ее области определения, где $\varphi'(x) > 0$.

Имеем: $4\sin x(\cos x - 1) > 0$, тогда $\begin{cases}\sin x > 0,\\ \cos x > 1\end{cases}$ или $\begin{cases}\sin x < 0,\\ \cos x < 1.\end{cases}$

Первая из этих систем не имеет решений ($\cos x$ не может быть больше, чем 1), а вторая система имеет решения (рис. 40): $\pi + 2\pi k < x < 2\pi + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Производная $\varphi'(x) = 4\sin x(\cos x - 1)$ является периодической функцией (относительно переменной x) с периодом 2π (это общий период для функций $\sin x$ и $\cos x$). На периоде $[0; 2\pi]$ неравенство $\varphi'(x) > 0$ выполняется на промежутке $(\pi; 2\pi)$, а равенство $\varphi'(x) = 0$ в точках πn, то есть в точках 0, π и 2π. Тогда неравенство $\varphi'(x) < 0$ выполняется на промежутке $(0; \pi)$, а учитывая период, и на всех промежутках $2\pi k < x < \pi + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. Принимая во внимание условия возрастания и убывания функции и то, что функция $\varphi(x)$ непрерывна на всей числовой прямой (она дифференцируема во всех точках), получаем, что функция $\varphi(x)$ возрастает на каждом из промежутков $[\pi + 2\pi k; 2\pi + 2\pi k]$, $k \in \boldsymbol{Z}$, и убывает на каждом из промежутков $[2\pi k; \pi + 2\pi k]$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Поскольку производная $\varphi'(x)$ является периодической функцией с периодом 2π, то через промежуток длиной 2π знаки производной $\varphi'(x)$ повторяются (рис. 41). В точке 0 производная $\varphi'(x)$ меняет знак с плюса на минус, следовательно, $x = 0$ — точка максимума, а учитывая, что поведение $\varphi'(x)$ повторяется через 2π, имеем

$$x_{\max} = 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}.\ \text{Тогда } y_{\max} = \varphi(2\pi k) = 4\cos(2\pi k) - \cos(4\pi k) = 3.$$

В точке π производная $\varphi'(x)$ меняет знак с минуса на плюс, следовательно, $x = \pi$ — точка минимума, а учитывая, что поведение $\varphi'(x)$ повторяется через 2π, имеем

$x_{\min} = \pi + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. Тогда $y_{\min} = \varphi(\pi + 2\pi k) = 4\cos(\pi + 2\pi k) - \cos(2\pi + 4\pi k) = -5$. ◁

Вопросы для контроля

1. Дайте определение возрастающей и убывающей на множестве функции. Приведите примеры таких функций и их графиков.

2. а) Сформулируйте достаточные условия возрастания и убывания функции. Приведите примеры их применения.
б*) Обоснуйте достаточные условия возрастания и убывания функции.

3*. Сформулируйте и обоснуйте условие постоянства функции на интервале.

4. Изобразите график функции, имеющей экстремумы. Дайте определение точек экстремума функции и ее экстремумов.

5. Какие точки называются критическими точками?

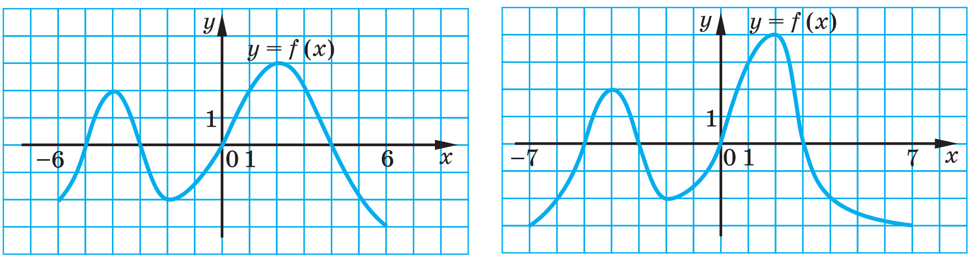
6. а) Сформулируйте необходимое условие экстремума функции.
б*) Обоснуйте необходимое условие экстремума функции.

7. а) Сформулируйте достаточное условие существования экстремума в точке.
б*) Обоснуйте достаточное условие существования экстремума в точке.

8. По какой схеме можно исследовать функцию на монотонность и экстремум? Приведите пример такого исследования.

Упражнения

1°. На рисунке 42 изображен график функции $y = f(x)$ (на рисунке 42, *а*, функция задана на промежутке $[-6; 6]$, а на рисунке 42, *б* — на промежутке $[-7; 7]$). Укажите промежутки возрастания и убывания функции $f(x)$.



а *б*

Рис. 42

2°. Известно, что производная некоторой функции $y = f(x)$, заданной на множестве всех действительных чисел, имеет такие знаки, как на рисунке 43. Укажите промежутки возрастания и убывания функции $f(x)$.

3. Функция $y = f(x)$ определена на промежутке $(-6; 3)$. На рисунке 44 изображен график ее производной. Укажите промежутки возрастания и убывания функции $f(x)$.

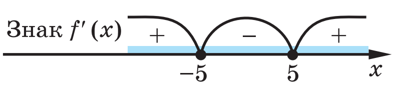


Рис. 43

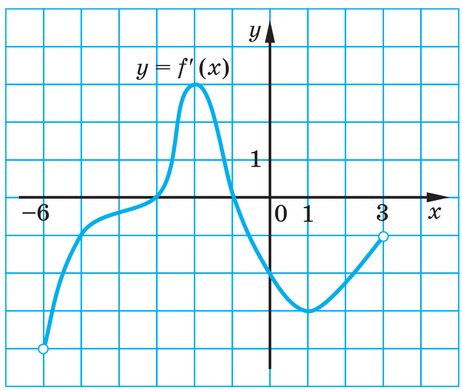


Рис. 44

4. Докажите, что заданная функция возрастает на всей области определения:
1°) $f(x) = x^3 + 5x$; 2) $f(x) = e^x + x - 7$;
3) $f(x) = 2x + \cos x$; 4) $f(x) = \sin x + 3x + 2$.

5. Докажите, что заданная функция убывает на всей области определения:
1°) $y = -x^3 - 3x$; 2) $f(x) = -x^7 - e^x + 2$;
3) $f(x) = \cos x - 6x$; 4) $f(x) = \sin x - 2x + 1$.

Найдите промежутки возрастания и убывания функции **(6–7)**.

6. 1°) $f(x) = x^2 - 2x$; 2) $f(x) = x^3 - 24x + 2$;
3) $f(x) = x^4 - 2x^2$; 4) $f(x) = x + \frac{1}{x}$.

7. 1) $y = e^x - x$; 2) $y = x - \ln x$;
3*) $y = x + 2\cos x$; 4*) $y = x - \sin 2x$.

8*. Найдите все значения параметра a, при которых функция возрастает на всей числовой прямой:
1) $f(x) = x^3 - 3ax$; 2) $f(x) = ax + \cos x$; 3) $f(x) = x^3 + ax^2 + 3ax - 5$.

9*. Докажите, что уравнение имеет единственный корень, и найдите этот корень:
1) $2x^3 + 3x - 5 = 0$; 2) $e^x + 2x - 1 = 0$;
3) $5x - \cos 3x - 5\pi = 1$; 4) $\frac{1}{x} - \ln x = 1$.

10°. По графику функции $y = f(x)$, изображенному на рисунке 42, найдите точки максимума и минимума функции $f(x)$. Существует ли производная в каждой из этих точек? Если существует, то чему равно ее значение?

11°. Известно, что производная некоторой функции $y = f(x)$, заданной на множестве всех действительных чисел, имеет такие знаки, как на рисунке 43, и $f'(-5) = f'(5) = 0$. Укажите критические точки функции, точку максимума и точку минимума этой функции.

12°. Пользуясь данными о производной $f'(x)$, приведенными в таблице,

x	$(-\infty; -2)$	-2	$(-2; 1)$	1	$(1; 5)$	5	$(5; +\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$

укажите:
1) промежутки возрастания и убывания функции $f(x)$;
2) точки максимума и точки минимума функции $f(x)$.

13. Функция $y = f(x)$ определена на промежутке $(-6; 3)$. На рисунке 44 изображен график ее производной. Найдите критические точки функции. Определите, какие из них являются точками максимума, какие — точками минимума, а какие не являются точками экстремума.

Исследуйте заданную функцию на экстремумы **(14–15)**.

14°. 1) $f(x) = 1 + 12x - x^3$; 2) $f(x) = x^4 - 2x^2 - 5$;
3) $f(x) = x^4 - 8x^3$; 4) $f(x) = 5x - x^5$.

15. 1) $y=\sqrt{1-x^2}$; 2) $y = x - 3\ln x$;
3) $y = xe^{-x}$; 4) $y = x^2 - 2\ln x$.

Определите промежутки монотонности, точки экстремума функции и значения функции в точках экстремума **(16–17)**.

16. 1°) $f(x) = x^2 - 6x + 5$; 2°) $f(x) = x^4 - 2x^2$;
3) $f(x)=x+\dfrac{4}{x}$; 4) $f(x)=\sqrt{x-1}+\sqrt{3-x}$.

17*. 1) $y=\dfrac{x}{\ln x}$; 2) $y = x^2 - |x| - 1$;
3) $y = 6x^3 - 2|x - 1|$; 4) $y=\sin x+\dfrac{1}{2}\sin 2x$.

6.2. Общая схема исследования функции для построения ее графика

Таблица 7

Схема исследования функции	Пример
1. Найти область определения функции.	Постройте график функции $f(x)=x+\dfrac{4}{x^2}$. ▶ 1. Область определения: $x \neq 0$ (то есть $D(f) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$).
2. Выяснить, является ли функция четной или нечетной (или периодической*).	2. Функция $f(x)$ ни четная, ни нечетная, поскольку $f(-x) \neq f(x)$ и $f(-x) \neq -f(x)$.
3. Точки пересечения графика с осями координат (если их можно найти).	3. График не пересекает ось Oy ($x \neq 0$). На оси Ox $y=0$: $x+\dfrac{4}{x^2}=0$, $x^3 = -4$, $x=-\sqrt[3]{4}$ ($\approx -1{,}6$) — абсцисса точки пересечения графика с осью Ox.
4. Производная и критические точки функции.	4. $f'(x)=x'+\left(\dfrac{4}{x^2}\right)'=1-\dfrac{8}{x^3}$. Производная существует на всей области определения функции $f(x)$ (следовательно, функция $f(x)$ непрерывна в каждой точке своей области определения). $f'(x)=0$; $1-\dfrac{8}{x^3}=0$. При $x\neq 0$ имеем: $x^3 = 8$, $x = 2$ — критическая точка.

* Периодичность чаще всего устанавливают для тригонометрических функций.

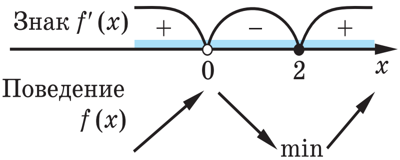
Продолж. табл. 7

<table>
<tr>
<td>

5. Промежутки возрастания и убывания функции и точки экстремума (и значение функции в этих точках).

</td>
<td>

5. Отметим критические точки на области определения и определим знак производной и характер поведения функции на каждом из промежутков, на которые разбивается область определения (см. рисунок).

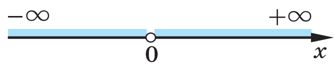


Итак, функция возрастает на каждом из промежутков $(-\infty;\ 0)$ и $[2;\ +\infty)$ и убывает на промежутке $(0;\ 2]$. Поскольку в критической точке 2 производная меняет знак с «−» на «+», то $x = 2$ — точка минимума: $x_{min} = 2$. Тогда $y_{min} = f(2) = 3$.

</td>
</tr>
<tr>
<td>

6. Поведение функции на концах промежутков области определения (этот этап не входит в минимальную схему исследования функции).

</td>
<td>



6. При $x \to 0$ справа (и при $x \to 0$ слева)

$f(x) = x + \frac{4}{x^2} \to \left(\frac{4}{+0}\right) \to +\infty$*.

При $x \to -\infty$ (и при $x \to +\infty$) значение $\frac{4}{x^2} \to 0$, тогда $f(x) \to x$** (то есть при $x \to -\infty$ $f(x) \to -\infty$ и при $x \to +\infty$ $f(x) \to +\infty$).

</td>
</tr>
<tr>
<td>

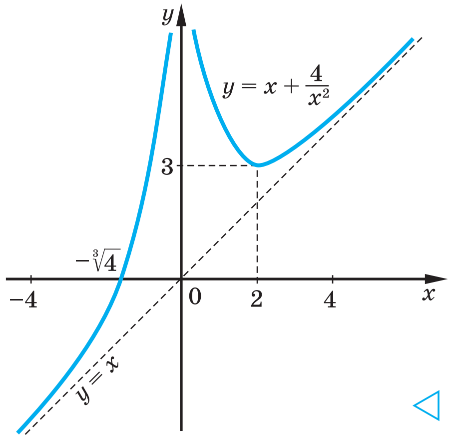
7. Если необходимо, найти координаты дополнительных точек, чтобы уточнить поведение графика функции.

</td>
<td>
<table>
<tr><td>x</td><td>$\frac{1}{2}$</td><td>$-\frac{1}{2}$</td><td>4</td><td>−4</td></tr>
<tr><td>y</td><td>$16\frac{1}{2}$</td><td>$15\frac{1}{2}$</td><td>$4\frac{1}{4}$</td><td>$-3\frac{3}{4}$</td></tr>
</table>
</td>
</tr>
</table>

* В этом случае говорят, что прямая $x = 0$ — вертикальная асимптота графика функции $f(x)$ (см. с. 131).

** В этом случае говорят, что прямая $y = x$ — наклонная асимптота графика функции $f(x)$.

Продовж. табл. 7

8. На основании проведенного исследования построить график функции.	

Объяснение и обоснование

Для построения графика функции (особенно в тех случаях, когда речь идет о построении графиков незнакомых функций) целесообразно исследовать те свойства функции, которые помогают составить определенное представление о виде ее графика. Когда такое представление уже составлено, то можно построить график функции по найденным характерным точкам. Фактически при исследовании функции мы будем придерживаться схемы, приведенной в учебнике для 10 класса (с. 57), только для исследования функции на возрастание, убывание и экстремумы используем производную. То есть для построения графика функции ее можно исследовать по схеме: 1) *найти область определения функции*; 2) *исследовать функцию на четность (или нечетность) и периодичность*; 3) *найти точки пересечения графика с осями координат*; 4) *найти производную и критические точки функции*; 5) *найти промежутки возрастания, убывания и точки экстремума (и значения функции в этих точках)*; 6) *исследовать поведение функции на концах промежутков области определения*; 7) *если необходимо, найти координаты дополнительных точек*; 8) *на основании проведенного исследования построить график функции.*

Отметим, что эта схема является ориентировочной и не всегда необходимо выполнять все этапы исследования. Например, далеко не всегда можно точно найти точки пересечения графика с осью Ox, даже если мы знаем, что такие точки существуют. Также часто достаточно сложно исследовать поведение функции на концах промежутков области определения. В таком случае уточнить поведение графика функции можно за счет нахождения координат точек графика функции, абсциссы которых выбирают так, чтобы они приближались к концам промежутков области определения.

Охарактиризуем особенности выполнения каждого из указанных этапов исследования функции и особенности учета полученных результатов при построении графика функции.

1) При построении графика функции с самого начала необходимо выяснить и записать ее *область определения*. Если нет специальных ограничений, то функция считается заданной при всех тех значениях аргумента, при которых существуют все выражения, входящие в запись функции. Ограничения, которые необходимо учесть в этом случае при нахождении области определения функции, приведены в таблице 8.

Таблица 8

	Вид функции	Ограничения, которые учитываются при нахождении области определения функции*	
1	$y=\frac{f(x)}{g(x)}$	$g(x)\neq 0$	*Знаменатель дроби не равен нулю*
2	$y=\sqrt[2k]{f(x)}$ $(k\in N)$	$f(x)\geqslant 0$	*Под знаком корня четной степени может стоять только неотрицательное выражение*
3	$y=\lg(f(x))$	$f(x)>0$	*Под знаком логарифма может стоять только положительное выражение*
4	$y=\log_{f(x)}a$ $(a>0)$	$\begin{cases}f(x)>0,\\ f(x)\neq 1\end{cases}$	*В основании логарифма может стоять только положительное выражение, не равное единице*
5	$y=\mathrm{tg}(f(x))$	$f(x)\neq\frac{\pi}{2}+\pi k,$ $(k\in Z)$	*Под знаком тангенса может стоять только выражение, не равное* $\frac{\pi}{2}+\pi k$ (*k — целое*)
6	$y=\mathrm{ctg}(f(x))$	$f(x)\neq\pi k,$ $k\in Z$	*Под знаком котангенса может стоять только выражение, не равное* πk (*k — целое*)
7	$y=\arcsin(f(x))$	$\vert f(x)\vert\leqslant 1,$ то есть $-1\leqslant f(x)\leqslant 1$	*Под знаками арксинуса и арккосинуса может стоять только выражение, модуль которого меньше или равен единице*
8	$y=\arccos(f(x))$		
9	$y=x^{\alpha}$		
	а) α — *натуральное*	x — любое число	
	б) α — *целое отрицательное или нуль*	$x\neq 0$	
	в) α — *нецелое положительно число*	$x\geqslant 0$	
	г) α — *нецелое отрицательное число*	$x>0$	

* При записи этих ограничений предполагаем, что функции $f(x)$ и $g(x)$ определены на рассматриваемом множестве.

После нахождения области определения функции часто полезно отметить ее на оси абсцисс. Если область определения — вся числовая прямая, то никаких отметок можно не выполнять. Если эта область — промежуток числовой прямой, то через его концы полезно провести вертикальные прямые, между которыми будет находиться график функции. Если отдельные точки числовой прямой не входят в область определения функции, то целесообразно отметить их на оси абсцисс и провести через них вертикальные прямые (которые не будет пересекать график функции).

2) Если выяснится, что заданная *функция является четной (или нечетной)*, то можно исследовать свойства и построить ее график только при $x \geqslant 0$, а затем отобразить его симметрично относительно оси Oy (для нечетной функции — симметрично относительно начала координат). Если же функция периодическая, то достаточно построить ее график на одном отрезке длиной T, а затем повторить его на каждом из промежутков длиной T (то есть параллельно перенести график вдоль оси Ox на Tk, где k — целое число).

Напомним, что для обоснования четности функции достаточно проверить, что для всех x из ее области определения $f(-x) = f(x)$; для нечетности — достаточно проверить выполнение равенства $f(-x) = -f(x)$, а для периодичности — равенства $f(x + T) = f(x - T) = f(x)$, где $T \neq 0$.

Обратим внимание, что четность, нечетность и периодичность функции исследуют для того, чтобы облегчить построение графика функции. Если же функция не является ни четной, ни нечетной, ни периодической, то знание этих характеристик мало помогает в построении графика функции.

3) Чтобы найти *точки пересечения графика с осями координат*, учитываем, что на оси Oy значение $x = 0$. Тогда $y = f(0)$ (если это значение существует). На оси Ox значение $y = 0$, и поэтому, чтобы найти соответствующие значения x, приравниваем заданную функцию к нулю и находим корни полученного уравнение (если это уравнения удается решить).

4) Для дальнейшего исследования функции полезно найти производную и критические точки функции. Известно, что критические точки функции — это внутренние точки ее области определения, в которых производная равна нулю или не существует. Напомним, что на всех промежутках, где существует производная данной функции, эта функция является непрерывной и ее графиком на каждом из промежутков будет неразрывная линия.

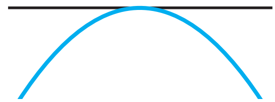
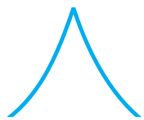
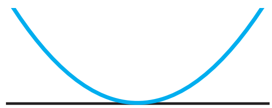
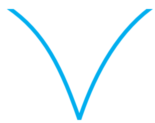
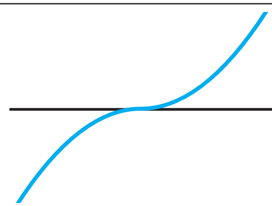
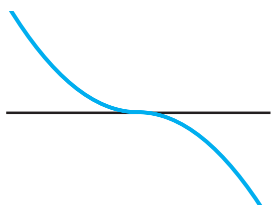
5) Используя производную и критические точки функции, находим промежутки возрастания и убывания и точки экстремума функции (и значения функции в этих точках). Напомним, что для этого целесообразно отметить критические точки функции на ее области определения и найти знаки производной в каждом из промежутков, на которые разбивается область определения. Заметим, что вывод о возрастании или убывании функции на промежутке между критическими точками часто можно сделать, сравнив значения функции на концах этого промежутка (вместо определения знака производной).

Как отмечалось на с. 76, результаты этого этапа исследования можно оформлять в виде специальной таблицы, содержащей следующие строки:

Значение x
Знак и значение $f'(x)$
Поведение и значение $f(x)$

После нахождения значения функции в каждой критической точке x_0 строим соответствующие точки на координатной плоскости, учитывая поведение графика функции в окрестности точки x_0 (табл. 9).

Таблица 9

Критическая точка x_0	Поведение $f'(x)$	Ориентировочный вид графика функции $f(x)$ в окрестности точки x_0
x_0 — точка максимума	**$f'(x_0) = 0$,** $f'(x)$ *меняет знак в точке* x_0 *с плюса на минус*	
	$f'(x_0)$ не существует, $f'(x)$ *меняет знак в точке* x_0 *с плюса на минус*	
x_0 — точка минимума	**$f'(x_0) = 0$,** $f'(x)$ *меняет знак в точке* x_0 *с минуса на плюс*	
	$f'(x_0)$ не существует, $f'(x)$ *меняет знак в точке* x_0 *с минуса на плюс*	
x_0 — критическая точка, в которой производная равна нулю, но которая не является точкой экстремума (это *точка перегиба* графика функции)	**$f'(x_0) = 0$,** $f'(x)$ *слева и справа от точки* x_0 *положительна*	
	$f'(x_0) = 0$, $f'(x)$ *слева и справа от точки* x_0 *отрицательна*	

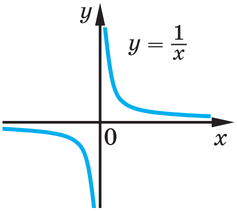


Рис. 45

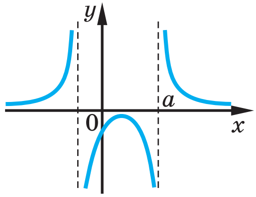


Рис. 46

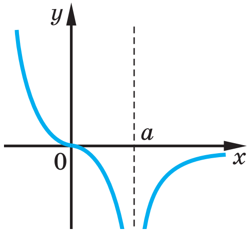


Рис. 47

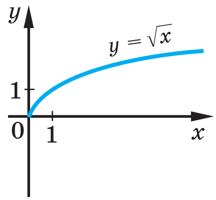


Рис. 48

При изображении графика функции в окрестности точки x_0 учитывается геометрический смысл производной, а именно: если $f'(x_0) = 0$, то в точке с абсциссой x_0 к графику функции $y = f(x)$ можно провести касательную, параллельную оси Ox. Если же значение $f'(x_0)$ не существует, то в точке с абсциссой x_0 график будет иметь излом (или касательную к графику функции в этой точке нельзя провести, или касательная перпендикулярна к оси Ox).

6) Для того чтобы составить более полное представление о виде графика функции, целесообразно исследовать *поведение функции на концах области определения*. При этом возможны несколько случаев.

а) Около точки $x = a$, которая ограничивает промежуток области определения, значение функции стремится к бесконечности. Например, у функции $y=\frac{1}{x}$ область определения — $x \neq 0$, то есть $D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$, и если значение x стремится к нулю, то значение y стремится к бесконечности (рис. 45).

Как отмечалось на этапе 1, через точку $x = a$ уже проведена вертикальная прямая. Около точки $x = a$ график функции будет стремиться вверх или вниз, приближаясь к этой прямой. Эту прямую называют *вертикальной асимптотой** графика функции. Чтобы выяснить, вверх или вниз стремится график функции, достаточно определить знаки функции слева и справа от точки a. Характерные случаи изображены на рисунках 46, 47.

б) Если *предельная точка $x = a$ входит в область определения функции*, то необходимо определить значение функции в точке a и построить полученную точку. Типичный пример — точка $x = 0$ для функции $y=\sqrt{x}$ (рис. 48).

в) В область определения функции входит бесконечный промежуток (или вся числовая прямая, или промежутки $(-\infty; a)$ или $(a; +\infty)$). В этом случае полезно представить себе поведение графика функции при $x \to -\infty$ или при $x \to +\infty$. Например, для функции $y=\frac{1}{x}$ имеем: при $x \to +\infty$ значение $y \to 0$, оставаясь положительным (это можно записать так: $y \to +0$). А при $x \to -\infty$ значение $y \to 0$, оставаясь отрицательным (это можно записать так: $y \to -0$). В этом случае говорят, что прямая $y = 0$ — *горизонтальная асимптота* графика функции (см. рис. 45).

* Прямая, к которой неограниченно приближается кривая при удалении ее в бесконечность, называется *асимптотой* этой *кривой* (подробнее см. на с. 131).

Иногда при $x \to +\infty$ или при $x \to -\infty$ можно выделить наклонную прямую, к которой неограниченно приближается график функции, — так называемую *наклонную асимптоту*, позволяющую также лучше представить поведение графика функции (см. пример в таблице 7).

7) Если необходимо уточнить поведение графика функции (например, в том случае, когда на каком-нибудь бесконечном промежутке области определения функция возрастает от $-\infty$ до $+\infty$), то полезно найти координаты *дополнительных точек* графика, взяв произвольные значения аргумента из необходимого промежутка.

Примеры решения задач

Задача 1 Постройте график функции $f(x) = x^3 - 3x - 3$.

Решение

1. Область определения: $D(f) = \boldsymbol{R}$.
2. Функция не является ни четной, ни нечетной, поскольку $f(-x) = -x^3 + 3x - 3 \neq f(x)$ (и $f(-x) \neq -f(x)$).
3. Точка пересечения графика с осью Oy: $x = 0$, $y = f(0) = -3$.
4. Производная и критические точки. $f'(x) = 3x^2 - 3$.

Производная существует на всей области определения функции $f(x)$. $f'(x) = 0$. Тогда $3x^2 - 3 = 0$, следовательно, $x^2 = 1$, то есть $x = 1$ и $x = -1$ — критические точки.

5. Отмечаем критические точки на области определения функции $f(x)$ и находим знак $f'(x)$ на каждом из полученных промежутков (рис. 49).

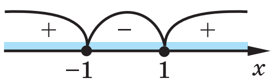


Рис. 49

Составляем таблицу, в которой отмечаем промежутки возрастания, убывания и экстремумы функции:

x	$(-\infty; -1)$	-1	$(-1; 1)$	1	$(1; +\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	-5	$\nearrow$
		max		min	

Комментарий

Используем общую схему исследования функции (с. 81). При нахождении области определения учитываем, что никаких ограничений, зафиксированных в таблице 8, функция не имеет, следовательно, областью определения является множество всех действительных чисел (можно также использовать известное утверждение, что *областью определения многочлена являются все действительные числа*).

Чтобы найти точку пересечения графика с осью Ox, необходимо приравнять функцию к нулю и решить уравнение $x^3 - 3x - 3 = 0$. Однако мы не можем найти корни этого уравнения, поэтому в решение включено только нахождение точки пересечения графика с осью Oy.

После нахождения производной данной функции, ее критических точек и знаков производной в каждом из промежутков, на которые критические точки разбивают область определения функции, нахождение промежутков возрастания и убывания и экстремумов функции удобно выполнять, заполняя специальную таблицу.

6. Найдем значения функции в нескольких точках:

x	-2	2	3
$f(x)$	-5	-1	15

7. Используя результаты исследования, строим график функции $y = x^3 - 3x -- 3$ (рис. 50).

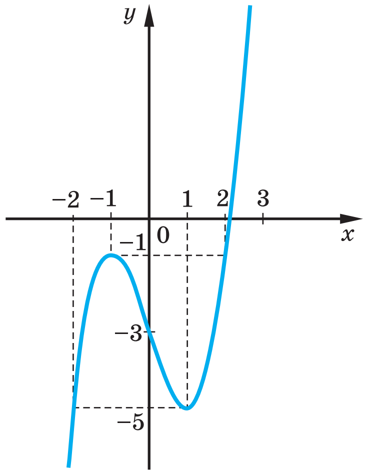


Рис. 50

◁

Обратим внимание, что функция непрерывна на всей числовой прямой, поскольку она дифференцируема в каждой точке области определения, следовательно, ее график — неразрывная линия.

Чтобы уточнить вид графика, целесообразно найти координаты нескольких дополнительных контрольных точек. После построения графика функции можно сделать вывод, что график имеет единственную точку пересечения с осью Ox. Эта точка находится между точками $x = 2$ и $x = 3$, поскольку функция $f(x)$ непрерывна, на промежутке $[1; +\infty)$ возрастает и в точке $x = 2$ принимает отрицательное значение, а в точке $x = 3$ — положительное. Других точек пересечения с осью Ox быть не может, потому что на промежутке $(-\infty; -1]$ функция $f(x)$ возрастает от $-\infty$ до -1, а на промежутке $[-1; 1]$ — убывает от -1 до -5, то есть значения функции на этих промежутках отрицательны.

З а м е ч а н и е. Мы построили график функции, не исследуя поведения функции на концах промежутков ее области определения. Покажем, как это можно было сделать. Область определения данной функции — промежуток $(-\infty; +\infty)$. Чтобы исследовать поведение функции на концах промежутков области определения, необходимо выяснить, к какому значению будет стремиться функция при $x \to \infty$. Для этого в многочлене достаточно вынести за скобки наивысшую степень переменной (это всегда можно сделать, так как $x \neq 0$, когда значение x велико по модулю). Тогда при $x \neq 0$ имеем $f(x) = x^3 - 3x - 3 = x^3\left(1 - \frac{3}{x^2} - \frac{3}{x^3}\right)$. Поскольку при $x \to \infty$ значения $\frac{3}{x^2} \to 0$ и $\frac{3}{x^3} \to 0$, то $1 - \frac{3}{x^2} - \frac{3}{x^3} \to 1$. Следовательно, $f(x)$ будет стремиться к тому же значению, что и x^3. Но при $x \to -\infty$ значение $x^3 \to -\infty$, тогда и $f(x) \to -\infty$, а при $x \to +\infty$ значение $x^3 \to +\infty$, тогда и $f(x) \to +\infty$. Учитывая непрерывность функции $f(x)$, получаем, что она принимает все значения из промежутка $(-\infty; +\infty)$. Отметим, что приведенные соображения можно повторить для любой функции — многочлена нечетной степени. Тогда, строя графики таких функций, полезно помнить следующее:

многочлен нечетной степени принимает все значения из промежутка $(-\infty; +\infty)$ и *при больших по модулю значениях аргумента значения многочлена мало отличаются от значения его старшего члена.*

Задача 2 1) Постройте график функции $f(x) = x^4 - 8x^2 - 9$;
2*) Сколько корней имеет уравнение $x^4 - 8x^2 - 9 - a = 0$ в зависимости от значения параметра a?

Комментарий

Для выполнения задания 1 исследуем функцию $f(x)$ по общей схеме и по результатам исследования построим ее график. Для нахождения точки пересечения графика с осью Ox приравниваем функцию к нулю и решаем полученное биквадратное уравнение. При построении графика также учитываем, что при $x \to \infty$ значение

$$f(x) = x^4 - 8x^2 - 9 = x^4\left(1 - \frac{8}{x^2} - \frac{9}{x^4}\right) \to +\infty.$$

Как видим, и для многочлена четной степени *при больших по модулю значениях аргумента значения многочлена мало отличаются от значения его старшего члена.*

При выполнении задания 2 можно пользоваться таким ориентиром: *если в задании с параметром идет речь о количестве решений уравнения (неравенства или системы), то для анализа данной ситуации часто удобно использовать графическую иллюстрацию решения.*

Особенно простым является соответствующее исследование в том случае, когда заданное уравнение можно представить в виде $f(x) = a$, поскольку график функции $y = a$ — это прямая, параллельная оси Ox (которая пересекает ось Oy в точке a), а график функции $y = f(x)$ легко построить, исследовав функцию $f(x)$ с помощью производной. (Отметим, что, заменяя заданное уравнение на уравнение $f(x) = a$, необходимо следить за равносильностью выполненных преобразований, чтобы полученное уравнение имело те же корни, что и заданное, а следовательно, и количество корней у них будет одинаковым.) Для того чтобы определить, сколько корней имеет уравнение $f(x) = a$, достаточно определить, сколько точек пересечения имеет график функции $y = f(x)$ с прямой $y = a$ при разных значениях параметра a. (Для этого на соответствующем рисунке целесообразно изобразить все характерные положения прямой.)

Решение

▶ 1) Исследуем функцию $f(x) = x^4 - 8x^2 - 9$.

1. Область определения: $D(f) = \mathbf{R}$.
2. Функция четная, поскольку для всех значений x из ее области определения
$$f(-x) = (-x)^4 - 8(-x)^2 - 9 = x^4 - 8x^2 - 9 = f(x).$$
Следовательно, график функции симметричен относительно оси Oy.
3. Точка пересечения графика с осью Oy: $x = 0$, $y = f(0) = -9$.
Точки пересечения графика с осью Ox: $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$. Замена $x^2 = t$ дает: $t^2 - 8t - 9 = 0$; $t_1 = -1$, $t_2 = 9$. Тогда $x^2 = -1$ (корней нет) или $x^2 = 9$.
Отсюда $x = 3$ и $x = -3$ — абсциссы точек пересечения графика с осью Ox.

4. Производная и критические точки. $f'(x) = 4x^3 - 16x$.
Производная существует на всей области определения функции $f(x)$ (следовательно, функция непрерывна на всей числовой прямой).
$f'(x) = 0$. Тогда $4x^3 - 16x = 0$, $4x(x^2 - 4) = 0$, $4x(x-2)(x+2) = 0$, следовательно, $x = 0$, $x = 2$ и $x = -2$ — критические точки.
5. Отмечаем критические точки на области определения функции $f(x)$ и находим знак $f'(x)$ на каждом из полученных промежутков (рис. 51). Составляем таблицу, в которой отмечаем промежутки возрастания, убывания и экстремумы функции:

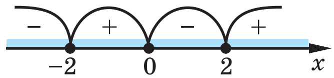


Рис. 51

x	$(-\infty; 2)$	-2	$(-2; 0)$	0	$(0; 2)$	2	$(1; +\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	-25	$\nearrow$	-9	$\searrow$	-25	$\nearrow$
		min		max		min	

6. Используя результаты исследования, строим график* функции $y = x^4 - 8x^2 - 9$ (рис. 52). ◁

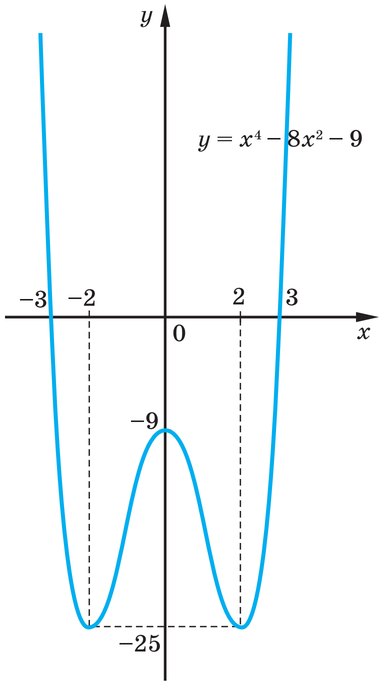


Рис. 52

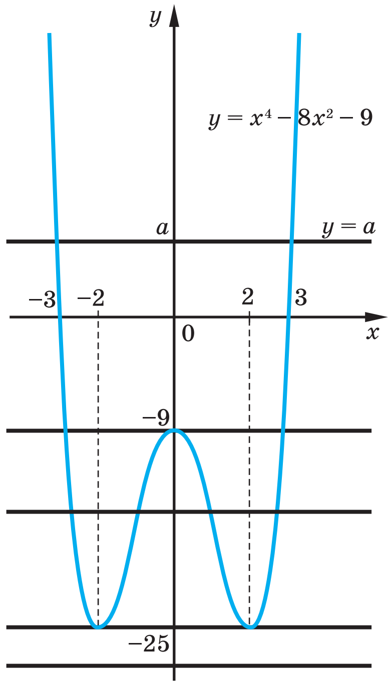


Рис. 53

* Масштаб по осям Ox и Oy разный.

2) Отметим, что заданное уравнение $x^4 - 8x^2 - 9 - a = 0$ равносильно уравнению $x^4 - 8x^2 - 9 = a$. Решим последнее уравнение графически. Для этого построим график функции $y = x^4 - 8x^2 - 9$ (см. задание 1) и график функции $y = a$ (рис. 53).
Как видим, при $a < -25$ уравнение не имеет корней (нет точек пересечения графиков); при $a = -25$ и при $a > -9$ уравнение имеет два корня (графики имеют только две общие точки); при $a = -9$ уравнение имеет три корня (графики имеют три общие точки) и при $-25 < a < -9$ уравнение имеет четыре корня (графики имеют четыре общие точки). ◁

Задача 3 1) Постройте график функции $y = \frac{\ln x}{x}$;
2*) Найдите наибольшее значение параметра a, при котором уравнение $\ln x = ax$ имеет единственный корень.

Комментарий

Для выполнения задания 1 исследуем функцию $y = \frac{\ln x}{x}$ по общей схеме и по результатам исследования строим ее график. При исследовании функции на четность и нечетность можно воспользоваться тем, что *у четной или нечетной функции* в область определения входят точки x и $(-x)$. Следовательно, для таких функций *область определения должна быть симметричной относительно точки* 0. Если же это условие не выполняется, то функция не может быть ни четной, ни нечетной.

Для лучшего представления о виде графика целесообразно уточнить поведение функции на концах области определения ($D(y) = (0; +\infty)$). При $x \to 0$ справа (то есть при $x \to +0$) значение $\ln x \to -\infty$. Тогда $y = \frac{\ln x}{x} \to \left(\frac{-\infty}{+0}\right) \to -\infty$ (рис. 55). Но при $x \to +\infty$ мы не можем выполнить такую оценку $\left(\text{получаем неопределенность вида } \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)\right)$. В таком случае поведение функции при $x \to +\infty$ можно уточнить с помощью дополнительных контрольных точек.

При выполнении задания 2 целесообразно использовать графическую иллюстрацию решения. Это можно сделать двумя способами:

I. С помощью равносильных преобразований привести заданное уравнение к виду $f(x) = a$ $\left(\text{где } f(x) = \frac{\ln x}{x}\right)$ и, используя график, построенный в задании 1, выяснить, сколько корней имеет уравнение $f(x) = a$ при разных значениях параметра a.

II. Применить графическое решение непосредственно к уравнению $\ln x = ax$ (графики функций $y = \ln x$ и $y = ax$ нам известны), а для исследования единственности корня использовать геометрический смысл производной.

Решение

1) Исследуем функцию $y=\frac{\ln x}{x}$.

1. Область определения: $x > 0$, то есть $D(y) = (0; +\infty)$.
2. Функция ни четная, ни нечетная, поскольку ее область определения не симметрична относительно точки 0.
3. Точки пересечения графика с осями координат. График не пересекает ось Oy ($x \neq 0$).

   На оси Ox $y = 0$, то есть $\frac{\ln x}{x} = 0$. Тогда при $x > 0$ получаем: $\ln x = 0$; $x = 1$ — абсцисса точки пересечения графика с осью Ox.
4. Производная и критические точки.

$$y' = \left(\frac{\ln x}{x}\right)' = \frac{(\ln x)' \cdot x - x' \cdot \ln x}{x^2} = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - 1 \cdot \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}.$$

   Производная существует на всей области определения функции $f(x)$ (то есть при $x > 0$), следовательно, функция непрерывна на всей области определения.

   $y' = 0$. Тогда $\frac{1 - \ln x}{x^2} = 0$. Отсюда при $x > 0$ получаем $\ln x = 1$, следовательно, $x = e$ — критическая точка.
5. Отмечаем критические точки на области определения функции и находим знак $y'(x)$ в каждом из полученных промежутков (рис. 54).

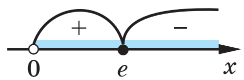


Рис. 54

   Составляем таблицу, в которой отмечаем промежутки возрастания, убывания и экстремумы функции.

x	$(0; e)$	e	$(e; +\infty)$
$f'(x)$	+	0	−
$f(x)$	↗	$\frac{1}{e}$	↘
		max	

6. Найдем координаты еще нескольких точек графика функции:

x	$\frac{1}{e} \approx 0,4$	$e^2 \approx 7,4$	$e^3 \approx 20,1$
$y(x)$	$-e \approx -2,7$	$\frac{2}{e^2} \approx 0,3$	$\frac{3}{e^3} \approx 0,1$

7. Используя результаты исследования, строим график функции $y=\frac{\ln x}{x}$ (рис. 55). ◁

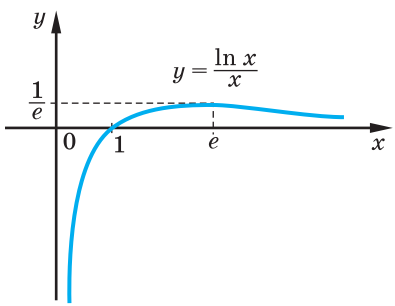


Рис. 55

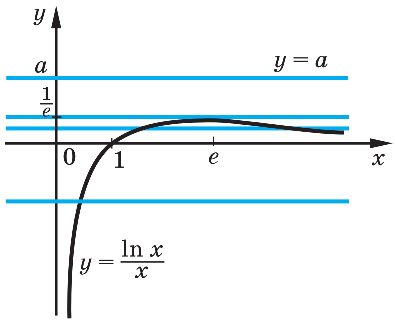


Рис. 56

2) <u>I способ решения задания 2</u>

▶ Область допустимых значений данного уравнения $\ln x = ax$ задается неравенством $x > 0$. Но тогда $x \neq 0$ и заданное уравнение на его ОДЗ равносильно уравнению $\frac{\ln x}{x} = a$.

Решим последнее уравнение графически. Для этого построим график функции $y = \frac{\ln x}{x}$ (см. задание 1) и график функции $y = a$ (рис. 56).

Как видим, уравнение $\frac{\ln x}{x} = a$ имеет единственный корень только при $a \leqslant 0$ и при $a = \frac{1}{e}$ (при $0 < a < \frac{1}{e}$ уравнение имеет два корня, а при $a > \frac{1}{e}$ уравнение не имеет корней).

Следовательно, наибольшее значение параметра a, при котором уравнение $\ln x = ax$ имеет единственный корень, — это $a = \frac{1}{e}$. ◁

<u>II способ решения задания 2</u>

Решение

▶ Рассмотрим графическую иллюстрацию (рис. 57) решения заданного уравнения

$$\ln x = ax. \qquad (1)$$

Функция $y = \ln x$ возрастающая и принимает все значения от $-\infty$ до $+\infty$. Графиком функции $y = ax$ является прямая, проходящая через начало координат.

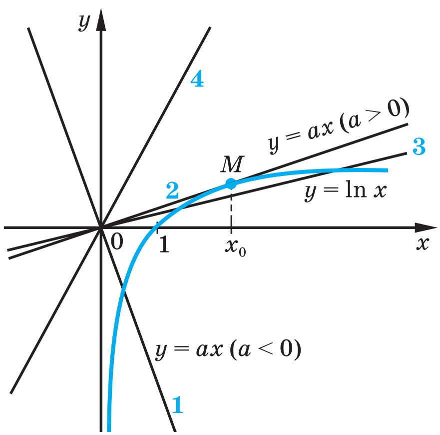


Рис. 57

При $a < 0$ прямая $y = ax$ пересекает график функции $y = \ln x$ только в одной точке (прямая 1 на рисунке 57). Следовательно, уравнение (1) имеет единственный корень (действительно, функция $y = \ln x$ возрастающая, а функция $y = ax$ убывающая, поэтому уравнение (1) может иметь только один корень).

При $a = 0$ уравнение (1) имеет вид $\ln x = 0$ и также имеет единственный корень ($x = 1$).

При $a > 0$ прямая $y = ax$ может касаться графика функции $y = \ln x$ (прямая 2 на рисунке 57). Тогда уравнение(1) будет иметь единственный корень. Также прямая $y = ax$ может проходить в первой четверти ниже касательной (прямая 3 на рисунке 57). Тогда уравнение (1) будет иметь два корня. Если же прямая $y = ax$ будет проходить в первой четверти выше касательной (прямая 4 на рисунке 57), то уравнение (1) не будет иметь корней.

Выясним, когда прямая $y = ax$ будет касательной к графику функции $y = f(x) = \ln x$. Пусть точка касания M имеет абсциссу x_0. Учитывая геометрический смысл производной, получаем, что $f'(x_0) = a$ (значение производной в точке x_0 равно угловому коэффициенту касательной, проведенной через точку M). Поскольку $f'(x)=\frac{1}{x}$, то $f'(x_0)=\frac{1}{x_0}$. Тогда из равенства $f'(x_0) = a$ имеем $\frac{1}{x_0}=a$. Отсюда $x_0 =\frac{1}{a}$. Тогда $y_0 =\ln\frac{1}{a}$. С другой стороны, поскольку точка касания M лежит и на касательной $y = ax$, то ее координаты удовлетворяют и уравнению касательной. Получаем $\ln\frac{1}{a}=a\cdot\frac{1}{a}$, то есть $\ln\frac{1}{a}=1$. Тогда $\frac{1}{a}=e$, следовательно, $a=\frac{1}{e}$.

Таким образом, заданное уравнение будет иметь единственный корень только при $a \leqslant 0$ и при $a=\frac{1}{e}$. Тогда наибольшее значение параметра a, при котором уравнение $\ln x = ax$ имеет единственный корень, — это $a=\frac{1}{e}$. ◁

Задача 4* Постройте график функции $y=\sqrt[3]{(x-1)^2}$.

Решение

▶ 1. Область определения: $D(y)=\mathbf{R}$.

2. Функция не является ни четной, ни нечетной, поскольку

$$y(-x)=\sqrt[3]{(-x-1)^2}=\sqrt[3]{(x+1)^2}\neq y(x)$$
$$(\text{и } y(-x)\neq -y(x)).$$

3. Точка пересечения графика с осью Oy: $x = 0$, $y = y(0) = 1$.

Точка пересечения графика с осью Ox: $y = 0$, тогда

$$\sqrt[3]{(x-1)^2}=1, \text{ то есть } x = 1.$$

4. Производная и критические точки.

$$y'=\left(\sqrt[3]{(x-1)^2}\right)'=\frac{1}{3\sqrt[3]{((x-1)^2)^2}}((x-1)^2)'=$$
$$=\frac{2(x-1)}{3\sqrt[3]{(x-1)^4}}=\frac{2(x-1)}{3(x-1)\sqrt[3]{x-1}}=\frac{2}{3\sqrt[3]{x-1}}.$$

Комментарий

Используем общую схему исследования функции (с. 81). При нахождении области определения учитываем, что никаких ограничений, зафиксированных в таблице 8, функция не имеет, следовательно, областью определения будут все действительные числа.

Для нахождения производной данной функции применим формулу $\left(\sqrt[n]{x}\right)'=\frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$ и формулу нахождения производной сложной функции.

(Отметим, что $\sqrt[3]{(x-1)^2}\neq(x-1)^{\frac{2}{3}}$, поскольку при $x < 1$ выражение $(x-1)^{\frac{2}{3}}$ не определено. В этом случае

Производная не существует во внутренней точке $x = 1$ области определения функции $y\,(x)$, следовательно, $x = 1$ — критическая точка. Других критических точек нет, поскольку $y' \neq 0$.

5. Отмечаем критическую точку на области определения функции $y\,(x)$ и находим знак $y'\,(x)$ в каждом из полученных промежутков (рис. 58).

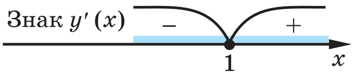


Рис. 58

6. Составляем таблицу, в которой отмечаем промежутки возрастания, убывания и экстремумы функции:

x	$(-\infty;\,1)$	1	$(1;\,+\infty)$
$y'\,(x)$	—	не существует	+
$y\,(x)$	↘	0	↗
		min	

7. Находим значения функции в нескольких точках:

x	-7	2	9
y	4	1	4

8. Используя результаты исследования, строим график функции (рис. 59).

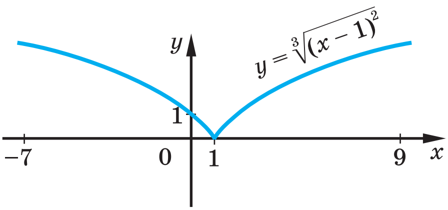


Рис. 59

можно записать, что

$$\sqrt[3]{(x-1)^2} = |x-1|^{\frac{2}{3}},$$

или учесть, что $(x-1)^2 \geqslant 0$, и записать: $\sqrt[3]{(x-1)^2} = ((x-1)^2)^{\frac{1}{3}}$, а затем найти производную степени соответствующей сложной функции).

Обратим внимание, что функция непрерывна на всей числовой прямой (область определения — все действительные числа и заданная функция является композицией, то есть результатом последовательного применения двух непрерывных функций: $y = \sqrt[3]{u}$ и $u = (x-1)^2$), следовательно, ее график — неразрывная линия.

После исследования поведения производной функции при переходе через критическую точку, пользуясь результатами, приведенными в таблице 9, делаем вывод, что в окрестности точки $x = 1$ график имеет следующий вид: . Поскольку производная не существует в точке $x = 1$, то график имеет излом в окрестности этой точки, а в самой точке $x = 1$ вертикальную касательную.

Чтобы уточнить вид графика, целесообразно найти координаты нескольких дополнительных контрольных точек. Для устного вычисления ординат этих точек удобно выбирать такие значения x, при которых значения $x - 1$ будут кубом целого или рационального чисел.

Вопросы для контроля

1. По какой схеме можно исследовать свойства функции для построения ее графика?
2*. Охарактеризуйте особенности выполнения основных этапов исследования функции и отображения результатов исследования на графике функции. Приведите примеры.

Упражнения

1°. Постройте схематический график функции, определенной и непрерывной на множестве всех действительных чисел, пользуясь ее свойствами, указанными в таблице:

1)

x	$(-\infty; -2)$	-2	$(-2; 0)$	0	$(0; +\infty)$
$y'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$y(x)$	$\nearrow$	5	$\searrow$	2	$\nearrow$
		max		min	

2)

x	$(-\infty; -1)$	-1	$(-1; 0)$	0	$(0; 1)$	1	$(1; +\infty)$
$y'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$y(x)$	$\searrow$	3	$\nearrow$	1	$\searrow$	-3	$\nearrow$
		min		max		min	

Исследуйте функцию и постройте ее график **(2 – 3)**.

2°. 1) $f(x) = x^3 - 3x^2$; 2) $f(x) = 3x - x^3 + 1$;
3) $f(x) = x^4 - 2x^2$; 4) $f(x) = 5x^4 - 4x^5$.

3. 1) $f(x) = (x^2 - 2)^2$; 2) $f(x) = x + \frac{1}{x}$; 3) $f(x) = \frac{4}{x} - x$; 4) $f(x) = 2\sqrt{x} - x$.

4. а) Исследуйте функцию $f(x)$ и постройте ее график.
б) Найдите область значений функции $f(x)$.
в*) Сколько корней имеет уравнение $f(x) = a$ в зависимости от значения параметра a?

1) $f(x) = x + \frac{4}{x}$; 2) $f(x) = (x-3)\sqrt{x}$; 3) $f(x) = \sqrt{x}\ln x$; 4) $f(x) = \frac{e^x}{x}$.

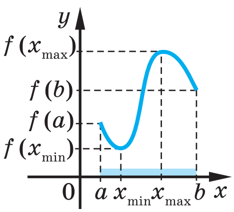
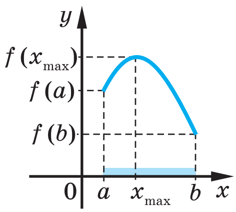
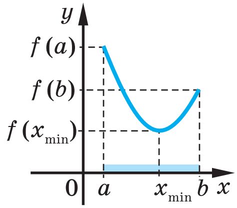
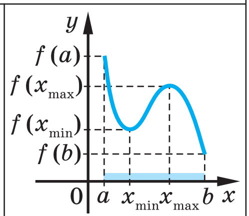
5. Сколько корней имеет уравнение:
1) $x^4 - 4x^3 + 1 = 0$; 2) $8x^3 - 3x^4 + 2 = 0$;
3) $x^2 - \frac{1}{3}x^3 - 3 = 0$; 4) $x^3 - 3x^2 - 9x - 7 = 0$?

6*. Исследуйте функцию и постройте ее график:
1) $y = \frac{x}{x^2 - 1}$; 2) $y = 2x - 5\sqrt[5]{x^2}$;
3) $y = 2\sin x - \cos 2x$; 4) $y = \cos^2 x - \cos x$.

7*. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $ax^6 = e^x$ имеет единственный положительный корень.

6.3. Наибольшее и наименьшее значения функции

Таблица 10

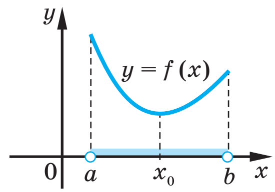
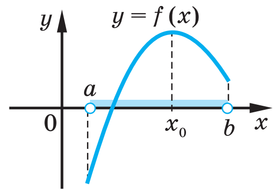
1. Наибольшее и наименьшее значения функции, непрерывной на отрезке			
Свойства			
Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке и имеет на нем конечное число критических точек, то она принимает наибольшее и наименьшее значения на этом отрезке или в критических точках, принадлежащих этому отрезку, или на концах отрезка.			
Примеры			
			
$\max\limits_{[a;b]} f(x)=f(x_{max})$	$\max\limits_{[a;b]} f(x)=f(x_{max})$	$\max\limits_{[a;b]} f(x)=f(a)$	$\max\limits_{[a;b]} f(x)=f(a)$
$\min\limits_{[a;b]} f(x)=f(x_{min})$	$\min\limits_{[a;b]} f(x)=f(b)$	$\min\limits_{[a;b]} f(x)=f(x_{min})$	$\min\limits_{[a;b]} f(x)=f(b)$

2. Нахождение наибольшего и наименьшего значений функции, непрерывной на отрезке	
Схема	Пример Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = x^3 - 12x + 12$ на отрезке $[1; 3]$.
1. Убедиться, что заданный отрезок входит в область определения функции $f(x)$.	Область определения заданной функции — все действительные числа ($D(f) = \boldsymbol{R}$). Следовательно, заданный отрезок входит в область определения функции $f(x)$.
2. Найти производную $f'(x)$.	$f'(x) = 3x^2 - 12.$
3. Найти критические точки: $f'(x) = 0$ или не существует.	Производная $f'(x)$ существует на всей области определения функции $f(x)$ (следовательно, функция $f(x)$ непрерывна на заданном отрезке). $f'(x) = 0$; $3x^2 - 12 = 0$ при $x = 2$ или $x = -2$.
4. Выбрать критические точки, принадлежащие заданному отрезку.	Заданному отрезку $[1; 3]$ принадлежит только критическая точка $x = 2$.

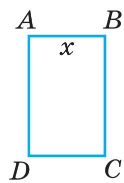
Продолж. табл. 10

5. Вычислить значения функции в критических точках и на концах отрезка.	$f(1) = 1;\ f(2) = -4;\ f(3) = 3.$
6. Сравнить полученные значения функции и выбрать из них наибольшее и наименьшее значения.	$\max\limits_{[1;\,3]} f(x) = f(3) = 3,$ $\min\limits_{[1;\,3]} f(x) = f(2) = -4.$

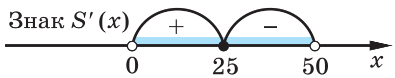
3. Нахождение наибольшего и наименьшего значений функции, непрерывной на интервале

Свойство	Иллюстрация
Если непрерывная функция $f(x)$ имеет на заданном интервале только одну точку экстремума x_0 и это точка минимума, то на заданном интервале функция принимает свое наименьшее значение в точке x_0.	
Если непрерывная функция $f(x)$ имеет на заданном интервале только одну точку экстремума x_0 и это точка максимума, то на заданном интервале функция принимает свое наибольшее значение в точке x_0.	

4. Задачи на нахождение наибольшего и наименьшего значений функции

Схема	Пример Имеется кусок проволоки длиной 100 м. Необходимо огородить им прямоугольный участок наибольшей площади. Найдите размеры участка.
1. Одну из искомых величин (или величину, с помощью которой можно дать ответ на вопрос задачи), обозначить через x (и по смыслу задачи наложить ограничения на x).	Пусть участок имеет форму прямоугольника $ABCD$ (см. рисунок) со стороной $AB = x$ (м).  Учитывая, что проволока будет натянута по периметру прямоугольника, получаем: $2AB + 2BC = 100$, то есть $2x + 2BC = 100$. Отсюда $BC = 50 - x$ (м). Поскольку длина каждой из сторон прямоугольника выражается положительным числом, то $0 < x < 50$.

Продолж. табл. 10

2. Величину, о которой говорится, что она наибольшая или наименьшая, выразить как функцию от x.	Площадь прямоугольника: $S(x) = AB \cdot BC = x(50 - x) = 50x - x^2$.
3. Исследовать полученную функцию на наибольшее или наименьшее значение (чаще всего с помощью производной).	Исследуем функцию $S(x)$ с помощью производной. Производная $S'(x) = 50 - 2x$ существует при всех действительных значениях x (следовательно, $S(x)$ — непрерывная функция на заданном промежутке). $S'(x) = 0$, $50 - 2x = 0$, $x = 25$ — критическая точка.  В точке $x = 25$ $S'(x) = 50 - 2x$ меняет знак с плюса на минус (см. рисунок), следовательно, $x = 25$ — точка максимума. Учитывая, что непрерывная функция $S(x)$ имеет на заданном интервале $(0; 50)$ только одну точку экстремума $x = 25$ и это точка максимума, делаем вывод, что на заданном интервале функция принимает свое наибольшее значение в точке $x = 25$*.
4. Убедиться, что полученный результат имеет смысл для исходной задачи.	Следовательно, площадь огороженного участка будет наибольшей, если стороны прямоугольника равны: $AB = x = 25$ (м), $BC = 50 - x = 25$ (м), то есть если участок будет иметь форму квадрата со стороной 25 м.

Объяснение и обоснование

Наибольшее и наименьшее значения функции, непрерывной на отрезке. Человеку в жизни часто приходится искать лучшее, или, как говорят, оптимальное решение поставленной задачи. Часть таких задач удается решить

* В рассматриваемой задаче можно было исследовать функцию $S(x)$ и без применения производной. Функция $S(x) = 50x - x^2$ является квадратичной функцией. Ее график — парабола с ветвями, направленными вниз. Тогда наибольшее значение эта функция принимает в вершине параболы, то есть при $x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{-50}{-2} = 25$. Это значение находится в заданном интервале $(0; 50)$, следовательно, на этом интервале функция также принимает наибольшее значение при $x = 25$.

с помощью методов математического анализа — это задачи, которые можно свести к нахождению наибольшего или наименьшего значения функции.

В курсах математического анализа доказывается теорема Вейерштрасса:

непрерывная на отрезке $[a; b]$ *функция* $f(x)$ *имеет на этом отрезке наибольшее и наименьшее значения*, то есть существуют точки отрезка $[a; b]$, в которых $f(x)$ принимает наибольшее и наименьшее на $[a; b]$ значения.

Рассмотрим случай, когда непрерывная на отрезке $[a; b]$ функция $f(x)$ имеет на этом отрезке только конечное число критических точек. Тогда имеет место свойство:

если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке и имеет на нем конечное число критических точек, то она принимает наибольшее и наименьшее значения на этом отрезке или в критических точках, принадлежащих этому отрезку, или на концах отрезка.

Геометрическая иллюстрация этого свойства приведена в пункте 1 таблицы 10.

1) Сначала рассмотрим случай, когда непрерывная на отрезке $[a; b]$ функция $f(x)$ не имеет на этом отрезке критических точек. Тогда на отрезке $[a; b]$ производная $f'(x)$ сохраняет постоянный знак (см. с. 61), следовательно, функция $f(x)$ на отрезке $[a; b]$ возрастает (рис. 60, *а*) или убывает (рис. 60, *б*). Поэтому наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$ — это значения на концах отрезка в точках a и b.

2) Пусть теперь функция $f(x)$ имеет на отрезке $[a; b]$ конечное число критических точек. Эти точки разбивают отрезок $[a; b]$ на конечное число отрезков, внутри которых критических точек нет. Тогда, согласно изложенному в пункте 1, наибольшее и наименьшее значения функция $f(x)$ принимает на концах таких отрезков, то есть в критических точках функции, или в точках a и b.

Таким образом, *чтобы найти наибольшее и наименьшее значения непрерывной на отрезке функции, имеющей на этом отрезке конечное число критических точек, достаточно вычислить значения функции во всех критических точках и на концах отрезка и из полученных чисел выбрать наибольшее и наименьшее.*

Обратим внимание, что для использования этого ориентира необходимо убедиться, что заданный отрезок входит в область определения данной функции и что функция непрерывна на этом отрезке (последнее следует, например, из того, что функция дифференцируема на заданном отрезке). Для нахождения критических точек функции необходимо найти ее производную и выяснить, где производная равна нулю или не существует. Уточненная схема нахождения наибольшего и наименьшего значений функ-

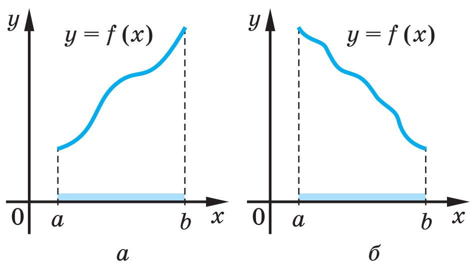


Рис. 60

ции, непрерывной на отрезке, приведена в таблице 10 (п. 2, с. 98). Там же приведен и пример использования этой схемы. Другие примеры нахождения наибольшего и наименьшего значений функции, непрерывной на отрезке, приведены далее в примерах на с. 103–107.

Утверждение о том, что наибольшее значение функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$ достигается в точке x_0, можно обозначать так: $\max\limits_{[a;\,b]} f(x) = f(x_0)$; аналогичное утверждение о том, что наименьшее значение функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$ достигается в точке x_0, можно обозначать так: $\min\limits_{[a;\,b]} f(x) = f(x_0)$.

При решении некоторых задач приходится находить ***наибольшее*** и ***наименьшее значения непрерывной функции*** не на отрезке, а ***на интервале***. Чаще всего в таких задачах функция имеет на заданном интервале только одну критическую точку: или точку максимума, или точку минимума. В этих случаях в точке максимума функция $f(x)$ принимает наибольшее значение на данном интервале (рис. 61), а в точке минимума — наименьшее значение на данном интервале (рис. 62) (см. полное формулирование соответствующих свойств в пункте 3 таблицы 10 на с. 99).

Действительно, если, например, непрерывная функция $f(x)$ имеет на заданном интервале $(a; b)$ только одну точку экстремума x_0 и это точка минимума, то в этой точке производная $f'(x)$ меняет знак с минуса на плюс. То есть если $x < x_0$, то $f'(x) < 0$. Поскольку функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, то она убывает при $x \leqslant x_0$, и тогда при $x < x_0$ имеем $f(x) > f(x_0)$. Также если $x > x_0$, то $f'(x) > 0$. Поскольку функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, то она возрастает при $x \geqslant x_0$, и тогда при $x > x_0$ имеем $f(x) > f(x_0)$. Это и означает, что значение $f(x_0)$ — наименьшее значение функции на интервале $(a; b)$.

Аналогично обосновывается и случай, когда x_0 — точка максимума (проведите обоснование самостоятельно).

Рассмотренные способы нахождения наибольших и наименьших значений функции используются для ***решения*** разнообразных ***прикладных задач***.

Решение практических задач математическими методами, как правило, содержит три основных етапа: 1) формализация, то есть создание мате-

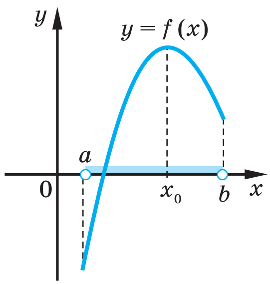


Рис. 61

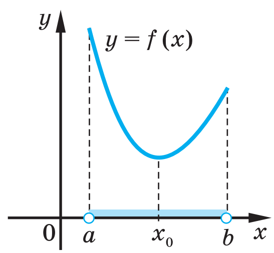


Рис. 62

матической модели задачи (перевод условия задачи на язык математики); 2) решение составленной математической задачи; 3) интерпретация найденного решения (анализ полученного результата, то есть перевод его с языка математики в термины исходной задачи)*.

Для задач на нахождение наибольшего и наименьшего значений реализацию этих этапов можно проводить по схеме: 1) *одну из величин, которую необходимо найти* (*или величину, с помощью которой можно дать ответ на вопрос задачи*), *обозначить через* x (и по смыслу задачи наложить ограничения на x); 2) *ту величину, о которой говорится, что она наибольшая или наименьшая, выразить как функцию* x; 3) *исследовать полученную функцию на наибольшее или наименьшее значения*; 4) *убедиться, что полученный результат имеет смысл для исходной задачи*.

Примеры использования этой схемы приведены в пункте 4 таблицы 10 (с. 99) и в примерах на с. 104–107.

При решении некоторых задач на нахождение наибольшего и наименьшего значений функции целесообразно использовать следующее утверждение:

если значения функции $f(x)$ неотрицательны на некотором промежутке, то эта функция и функция $(f(x))^n$, где n — натуральное число, принимают наибольшее (наименьшее) значение в одной и той же точке.

Действительно, при $u \geqslant 0$ функция $y = u^n$, где n — натуральное число, является возрастающей функцией ($y' = nu^{n-1} \geqslant 0$ при $u \geqslant 0$ и $y' = 0$ только при $u = 0$**). Тогда сложная функция $y = (f(x))^n$ (то есть функция $y = u^n$, где $u = f(x)$) будет возрастать там, где возрастает функция $f(x)$, и убывать там, где убывает функция $f(x)$, а следовательно, и принимать наибольшее (или наименьшее) значение в той же точке, что и функция $f(x)$.

Примеры решения задач

Задача 1 Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = 2\sin x + \cos 2x$ на отрезке $[0; \pi]$.

Решение

1) $D(f) = \boldsymbol{R}$, следовательно, отрезок $[0; \pi]$ входит в область определения функции $f(x)$.

2) $f'(x) = 2\cos x - 2\sin 2x$.

3) $f'(x)$ существует на всей области определения функции $f(x)$ (следовательно, функция $f(x)$ явля-

Комментарий

Используем схему нахождения наибольшего и наименьшего значений непрерывной на отрезке функции $f(x)$:

1) *убедиться, что заданный отрезок входит в область определения функции*; 2) *найти производную*; 3) *найти*

* С этим общим методом решения практических задач методами математики (его называют *методом математического моделирования*) вы уже фактически знакомились. По описанной схеме вы решали текстовые задачи в курсе алгебры.

** Конечно, при $n \geqslant 2$, а при $n = 1$ значение $y' = (u)' = 1 > 0$.

ется непрерывной на заданном отрезке);

$f'(x) = 0$, $2\cos x - 2\sin 2x = 0$,

$\cos x - 2\sin x\cos x = 0$,

$\cos x\,(1 - 2\sin x) = 0$, $\cos x = 0$

или $\sin x = \frac{1}{2}$; $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$,

или $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$, — критические точки.

4) В заданный отрезок попадают только критические точки: $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{5\pi}{6}$.

5) $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2\sin\frac{\pi}{6} + \cos\frac{\pi}{3} = 2\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$,

$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\sin\frac{\pi}{2} + \cos\pi = 1$,

$f\left(\frac{5\pi}{6}\right) = 2\sin\frac{5\pi}{6} + \cos\frac{5\pi}{3} = 2\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$,

$f(0) = 1$, $f(\pi) = 1$.

6) $\min\limits_{[0;\,\pi]} f(x) = f(0) = f(\pi) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$,

$\max\limits_{[0;\,\pi]} f(x) = f\left(\frac{\pi}{6}\right) = f\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$. ◁

критические точки ($f'(x) = 0$ или не существует); 4) *выбрать критические точки, принадлежащие заданному отрезку*; 5) *вычислить значения функции в критических точках и на концах отрезка*; 6) *сравнить полученные значения и выбрать из них наибольшее и наименьшее.*

Чтобы убедиться в непрерывности данной функции, достаточно после нахождения ее производной показать, что производная существует в каждой точке области определения функции (или отметить, что заданная функция непрерывна как сумма двух непрерывных функций $\sin x$ и $\cos 2x$).

Выяснить, какие критические точки принадлежат заданному отрезку, можно на соответствующем рисунке, отмечая критические точки на числовой прямой (рис. 63):

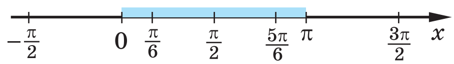


Рис. 63

Задача 2 Из круглого бревна вырезают брус прямоугольного сечения наибольшей площади. Найдите размеры сечения бруса, если радиус сечения бревна равен 25 см.

Решение

▶ 1) Пусть из круга вырезают прямоугольник $ABCD$ (рис. 64) со стороной $AB = x$ (см). Учитывая, что AC — диаметр круга, имеем $AC = 50$ (см). Поскольку x — длина отрезка, то $x > 0$. Кроме того, $AB < AC$ (катет прямоугольного

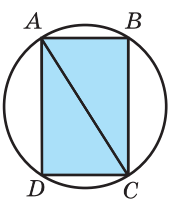


Рис. 64

Комментарий

Используем общую схему решения задач на наибольшее и наименьшее значения: 1) *одну из величин, которую необходимо найти (или с помощью которой можно дать ответ на вопрос задачи) обозначить через x* (и по смыслу задачи наложить ограничения на x); 2) *ту величину, о которой говорится, что она наибольшая или наименьшая, выра-*

треугольника ABC меньше его гипотенузы), следовательно, $0 < x < 50$.
2) Из прямоугольного ΔABC

$$BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = \sqrt{2500 - x^2} \text{ (см)}.$$

Тогда площадь сечения прямоугольника $ABCD$ равна:

$$S(x) = AB \cdot BC = x\sqrt{2500 - x^2}.$$

Поскольку при $0 < x < 50$ значение $S(x) > 0$, то рассмотрим функцию $f(x) = (S(x))^2 = x^2(2500 - x^2) = 2500x^2 - x^4$, принимающую наибольшее значение на промежутке $0 < x < 50$ в той же точке, что и $S(x)$.
3) Производная $f'(x) = 5000x - 4x^3$ существует во всех точках заданного промежутка (следовательно, функция $f(x)$ непрерывна на заданном промежутке).

$$f'(x) = 0, \ 5000x - 4x^3 = 0,$$

$4x(1250 - x^2) = 0$, $x = 0$ или $x = \pm 25\sqrt{2}$.
В промежуток (0; 50) попадает только одна критическая точка $x = 25\sqrt{2}$, которая является точкой максимума: в этой точке производная меняет знак с плюса на минус (рис. 65).

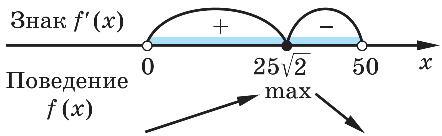


Рис. 65

Поскольку функция $f(x)$ непрерывна на заданном интервале и имеет там только одну точку экстремума и это точка максимума, то на этом интервале функция принимает наибольшее значение в точке $x = 25\sqrt{2}$.
4) Тогда $AB = x = 25\sqrt{2}$, $BC = \sqrt{2500 - x^2} = 25\sqrt{2}$. Следовательно, наибольшая площадь сечения

зить как функцию от x; 3) *исследовать полученную функцию на наибольшее или наименьшее значение*; 4) *убедиться, что полученный результат имеет смысл для исходной задачи*.

Полученную функцию $S(x) = x\sqrt{2500 - x^2}$ на промежутке $0 < x < 50$ можно исследовать непосредственно. Но лучшее учесть, что на этом промежутке $S(x) > 0$, и исследовать функцию $f(x) = (S(x))^2$, запись которой не содержит знака корня и которая принимает наибольшее значение в той же точке, что и $S(x)$.

Вывод о том, что в найденной точке функция $f(x)$ принимает наибольшее значение, можно обосновать одним из трех способов: 1) использовать свойство непрерывной на интервале функции, имеющей на этом интервале только одну точку экстремума (см. например, п. 3 табл. 10); 2) опираясь на поведение непрерывной функции $f(x)$, исследованной с помощью производной (см. рис. 65), обосновать, что на промежутках $(0; x_0)$ и $(x_0; 50)$ (где $x_0 = 25\sqrt{2}$) $f(x) < f(x_0)$, следовательно, в точке x_0 функция $f(x)$ принимает наибольшее значение; 3) для нахождения наибольшего значения функции $f(x)$ на интервале (0; 50) можно использовать то, что функция $f(x)$ непрерывна на всей числовой прямой, поэтому можно найти ее наибольшее значение на отрезке [0; 50], а затем сделать вывод для данной задачи:

$$f(0) = f(50) = 0, \ f\left(25\sqrt{2}\right) = 1250.$$

Следовательно, наибольшее значение на отрезке [0; 50] функция $f(x)$ принимает в точке x_0 (которая бруса будет в том случае, когда искомый прямоугольник будет квадратом со стороной $25\sqrt{2}$ (≈ 35 см). ◁

лежит внутри этого отрезка). Тогда и на интервале $(0;\ 50)$ эта функция принимает наибольшее значение в точке x_0.

Задача 3* Точка A лежит на графике функции $y = f(x)$, точка B — на оси Ox, и ее абсцисса в четыре раза больше ординаты точки A. Найдите наибольшее значение площади треугольника OAB, где точка O — начало координат, а

$$f(x) = \sqrt{7 + 3\sin x - (3x + 1)\cos x} \text{ и } \frac{3\pi}{4} \leqslant x \leqslant \frac{9\pi}{8}.$$

Комментарий

Для функции $f(x)$ непросто найти область определения, но можно убедиться, что заданный промежуток полностью входит в область определения этой функции, оценив значения подкоренного выражения на заданном промежутке. Для этого учитываем, что на единичной окружности заданный промежуток находится во второй и третьей четвертях (рис. 66), где $\cos x < 0$ и $7 + 3\sin x > 0$ при всех значениях x.

Также следует учесть, что по определению графика функции точка A имеет координаты $(x;\ y) = (x;\ f(x))$. Чтобы утверждать, что высота треугольника OAB равна ординате точки A (рис. 67), необходимо обосновать, что на заданном промежутке график функции $y = f(x)$ лежит в первой четверти.

После записи площади треугольника OAB как функции $S(x)$ для нахождения ее наибольшего значения обращаем внимание на то, что достаточно сложно найти $S\left(\frac{9\pi}{8}\right)$. Поэтому удобно выполнить исследование этой функции с помощью производной и обосновать, что в точке экстремума из заданного промежутка функция принимает наибольшее значение на заданном промежутке (а не пользоваться схемой нахождения наибольшего значения непрерывной функции на отрезке).

Решение

▶ При $\frac{3\pi}{4} \leqslant x \leqslant \frac{9\pi}{8}$ $3x + 1 > 0$ и $\cos x < 0$. Тогда $-(3x + 1)\cos x > 0$ на заданном промежутке. При всех значениях x имеем $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$. Тогда

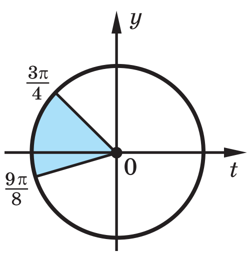


Рис. 66

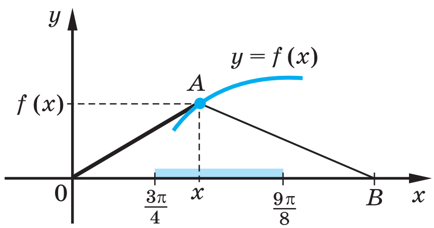


Рис. 67

$-3 \leqslant 3 \sin x \leqslant 3$, значит, $7 + 3 \sin x > 0$. Таким образом, на заданном промежутке

$7 + 3 \sin x - (3x + 1) \cos x > 0$,

следовательно, заданный промежуток полностью входит в область определения функции $f(x)$. Отметим также, что в этом случае значения функции $f(x)$ будут положительны, то есть на заданном промежутке график функции $y = f(x)$ лежит в первой четверти.

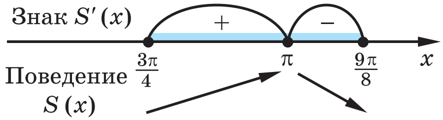


Рис. 68

Поскольку заданная точка A лежит на графике функции $y = f(x)$, то в случае, когда абсцисса точки A равна x, ордината точки A равна $f(x)$ (см. рис. 67). По условию $x_B = 4y_A = 4f(x)$. Точка A лежит в первой четверти, следовательно, $y_A > 0$, а значит, и $x_B > 0$. Тогда $OB = x_B = 4f(x)$, а высота треугольника OAB равна ординате точки A: $h = y_A = f(x)$. Поэтому площадь треугольника OAB равна:

$$S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2} OB \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 4f(x) \cdot f(x) = 2f^2(x) = 2(7 + 3\sin x - (3x + 1)\cos x).$$

Следовательно, нам необходимо найти наибольшее значение функции

$$S(x) = 14 + 6 \sin x - (6x + 2) \cos x \text{ при } \frac{3\pi}{4} \leqslant x \leqslant \frac{9\pi}{8}.$$

Тогда $S'(x) = 6 \cos x - (6 \cos x - (6x + 2) \sin x) = (6x + 2) \sin x$.

Производная $S'(x)$ существует во всех точках заданного отрезка. Следовательно, функция $S(x)$ непрерывна на этом отрезке. Найдем, где $S'(x) = 0$:

$$(6x + 2) \sin x = 0; \quad x = -\frac{1}{3} \text{ или } x = \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}.$$

Из найденных точек в заданный отрезок входит только критическая точка $x = \pi$.

Обозначим критические точки на области определения и найдем знак производной и характер поведения функции на каждом из интервалов, на которые разбивается область определения (рис. 68).

Учитывая непрерывность функции $S(x)$ на заданном промежутке, получаем, что функция возрастает на промежутке $\left[\frac{3\pi}{4}; \pi\right]$ (тогда при $\frac{3\pi}{4} \leqslant x < \pi$ значение $S(x) < S(\pi)$) и убывает на промежутке $\left[\pi; \frac{9\pi}{8}\right]$ (тогда при $\pi < x \leqslant \frac{9\pi}{8}$ значение $S(x) < S(\pi)$). Следовательно, на отрезке $\left[\frac{3\pi}{4}; \frac{9\pi}{8}\right]$ функция $S(x)$ принимает наибольшее значение при $x = \pi$. Тогда $S(\pi) = 14 + 6 \sin \pi - (6\pi + 2) \cos \pi = 16 + 6\pi$ (квадратных единиц).

Ответ. Наибольшее значение искомой площади треугольника равно $16 + 6\pi$ (кв. ед.). ◁

Вопросы для контроля

1. а) Объясните, в каких точках непрерывная на отрезке функция может принимать свое наибольшее и наименьшее значения на этом отрезке. Проиллюстрируйте соответствующее свойство на графиках функций.
   б*) Обоснуйте соответствующее свойство для случая, когда непрерывная на отрезке функция имеет на этом отрезке только конечное число критических точек.
2. Опишите схему нахождения наибольшего и наименьшего значений функции, непрерывной на отрезке. Приведите пример.
3. а) Сформулируйте свойства непрерывной на интервале функции, которая имеет на этом интервале только одну точку экстремума.
   б*) Обоснуйте соответствующие свойства.
4. Опишите схему решения задач на наибольшее и наименьшее значения с помощью исследования соответствующих функций. Приведите пример.

Упражнения

Найдите наибольшее и наименьшее значения функции на заданном отрезке **(1–4)**.

1°. 1) $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 5$, $[0; 3]$; 2) $f(x) = 3x^2 - 2x^3$, $[-1; 2]$;
3) $f(x) = x^4 - 4x^3 + 1$, $[-1; 1]$; 4) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 1$, $[-2; 1]$.

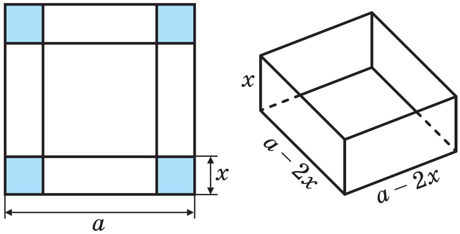
2. 1) $f(x) = 3\cos x + \cos 3x$, $[0; \pi]$; 2) $f(x) = 5\sin x + \cos 2x$, $[0; \pi]$;
3) $f(x) = \operatorname{tg} x - x$, $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}\right]$; 4) $f(x) = \operatorname{ctg} x + x$, $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$.

3. 1) $f(x) = \frac{x}{8} + \frac{2}{x}$, $[1; 6]$; 2) $f(x) = 2\sqrt{x} - x$, $[0; 9]$;
3) $f(x) = x + e^{-x}$, $[-1; 2]$; 4) $f(x) = \ln(2x) - 6x^2 + 11x$, $\left[\frac{1}{2}; 2\right]$.

4*. 1) $f(x) = -x^3 + 3x\,|x - 3|$, $[0; 4]$; 2) $f(x) = x^3 - 2x\,|x - 2|$, $[0; 3]$;
3) $f(x) = |x^2 - x - 2| + \ln x$, $[1; 3]$; 4) $f(x) = |x^2 - x - 6| - x^3$, $[-4; 4]$.

5°. Число 10 представьте в виде суммы двух неотрицательных слагаемых так, чтобы сумма квадратов этих чисел была наименьшей.

6°. Число 4 разбейте на два слагаемых так, чтобы сумма первого слагаемого с квадратом второго была наименьшей.



а *б*

Рис. 69

7. Разность двух чисел равна 8. Какими должны быть эти числа, чтобы произведение куба первого числа на второе было наименьшим?

8. Из всех прямоугольников, площадь которых равна 25 см², найдите прямоугольник с наименьшим периметром.

9. Из квадратного листа картона со стороной *a* необходимо изготовить открытую сверху коробку, вырезав в углах квадратики (рис. 69) и загнув полученные края. Какой должна быть высота коробки, чтобы ее объем был наибольшим?

10. Докажите, что из всех равнобедренных треугольников, вписанных в окружность радиуса R, наибольшую площадь имеет равносторонний треугольник.

11. На странице текст занимает 384 см^2. Верхнее и нижнее поля должны быть по 2 см, правое и левое — по 3 см. Какими должны быть размеры страницы с точки зрения экономии бумаги?

12*. В прямоугольный треугольник с гипотенузой 8 см и углом 60° вписан прямоугольник наибольшей площади так, что одна из его сторон лежит на гипотенузе, а две вершины — на катетах. Определите большую из сторон прямоугольника.

13*. Из треугольников, которые имеют данный угол α, находящийся между сторонами, сумма длин которых постоянна и равна a, найдите такой, который имеет наименьший периметр.

14*. В шар радиуса R вписан цилиндр, который имеет наибольшую боковую поверхность. Найдите объем этого цилиндра.

15*. Точка A лежит на графике функции $y = f(x)$, точка B — на оси Ox, и ее абсцисса равна ординате точки A. Найдите наименьшее значение площади треугольника OAB, где точка O — начало координат, а

$$f(x) = \sqrt{4x - 2\sin 2x - 9\cos x + 12} \text{ и } \frac{5\pi}{3} \leqslant x \leqslant \frac{12\pi}{5}.$$

16*. Найдите наибольшее значение площади прямоугольника со сторонами, параллельними осям координат, и диагональю OP, где точка O — начало координат, а точка P лежит на графике функции $y = 49xe^{2-7x} + \dfrac{9}{x}$ и $0{,}2 \leqslant x \leqslant 1$.

17*. Найдите наибольшее значение площади треугольника OPK, где O — начало координат, P — точка на графике функции $y = \dfrac{5}{x} + 64x^5e^{6-4x}$, $0{,}7 \leqslant x \leqslant 2$, а K — точка на оси Ox, абсцисса которой равна абсциссе точки P.

18*. Точка A лежит на графике функции $y = f(x)$, точка B — на оси Ox, и ее абсцисса в 2 раза больше ординаты точки A. Найдите наибольшее значение площади треугольника OAB, где точка O — начало координат, а

$$f(x) = \sqrt{7 + 2\sin x - (2x+7)\cos x} \text{ и } \frac{2\pi}{3} \leqslant x \leqslant \frac{7\pi}{5}.$$

19. Лодка находится на расстоянии 3 км от ближайшей точки A берега. Пассажир лодки хочет добраться до села B, которое расположено на берегу на расстоянии 5 км от точки A (участок AB берега считаем прямолинейным). Лодка двигается со скоростью 4 км/ч; пассажир, выйдя из лодки, может пройти за час 5 км. К какому пункту на берегу должна пристать лодка, чтобы пассажир прибыл в село B за кратчайшее время?

§7 ПОНЯТИЯ И ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ПРЕДЕЛА ФУНКЦИИ И ПРЕДЕЛА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

7.1. Доказательство основных теорем о пределах

Таблица 11

<table>
<tr><td colspan="2">1. Определение предела функции в точке</td></tr>
<tr><td>$\lim\limits_{x\to a} f(x) = B$</td><td>Число B называется пределом функции $f(x)$ в точке a (при x, стремящемся к a), если для любого положительного числа ε найдется такое положительное число δ, что при всех $x \neq a$, удовлетворяющих неравенству $|x - a| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - B| < \varepsilon$.</td></tr>
<tr><td colspan="2">2. Основные теоремы о пределах функции</td></tr>
<tr><td>$\lim\limits_{x\to a} c = c$</td><td>Предел постоянной функции равен самой постоянной.</td></tr>
<tr><td>$\lim\limits_{x\to a} (f(x) \pm g(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \pm \lim\limits_{x\to a} g(x)$</td><td>Предел суммы (разности) двух функций равен сумме (разности) их пределов, если пределы слагаемых существуют.</td></tr>
<tr><td>$\lim\limits_{x\to a} (f(x) \cdot g(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to a} g(x)$</td><td>Предел произведения двух функций равен произведению их пределов, если пределы множителей существуют.</td></tr>
<tr><td>$\lim\limits_{x\to a} (c \cdot f(x)) = c \cdot \lim\limits_{x\to a} f(x)$</td><td>Постоянный множитель можно выносить за знак предела.</td></tr>
<tr><td>$\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$
(где $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$)</td><td>Предел частного двух функций равен частному их пределов, если пределы числителя и знаменателя существуют и предел знаменателя не равен нулю.</td></tr>
<tr><td colspan="2">3. Понятие бесконечно малой функции при $x \to a$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Функция $f(x)$, которая определена в некоторой окрестности точки a, называется бесконечно малой функцией при x, стремящемся к a, если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$.</td></tr>
<tr><td colspan="2">4. Свойства бесконечно малых функций</td></tr>
<tr><td colspan="2">1. Если функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ являются бесконечно малыми при $x \to a$, то их сумма $\alpha(x) + \beta(x)$, произведение $\alpha(x) \cdot \beta(x)$ и $c \cdot \alpha(x)$ (где $c = const$) также являются бесконечно малыми функциями при $x \to a$.
2. Если функция $\beta(x)$ бесконечно малая при $x \to a$ и для всех x, удовлетворяющих условию $|x - a| < \delta$ (кроме, возможно, $x = a$), выполняется неравенство $|\alpha(x)| \leqslant |\beta(x)|$, то функция $\alpha(x)$ также бесконечно малая при $x \to a$.</td></tr>
<tr><td colspan="2">5. Связь определения предела функции в точке с бесконечно малыми функциями</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\lim\limits_{x\to a} f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ — бесконечно малая функция при $x \to a$</td></tr>
</table>

Объяснение и обоснование

1. Определение предела функции в точке. Сформулируем *определение предела функции в точке* (которое уже рассматривалось на с. 19), используя понятие δ-окрестности точки. Обычно δ-окрестностью точки a называют промежуток $(a-\delta;\ a+\delta)$, то есть все значения x, удовлетворяющие неравенству $|x-a|<\delta$.

Пусть задана функция $f(x) = 2x + 3$, $x \in (-\infty;\ +\infty)$, значения которой найдены при некоторых x из так называемой δ-окрестности точки $x = 2$ (то есть из интервала $(2 - \delta,\ 2 + \delta)$, где $\delta > 0$).

x	1,9	1,99	1,999	2,001	2,01	2,1
$f(x)$	6,8	6,98	6,998	7,002	7,02	7,2

Из приведенной таблицы видно, что чем ближе значение x к 2, тем ближе к числу 7 соответствующее значение $f(x)$. Причем, выбирая все меньшую δ-окрестность точки 2, можно неограниченно приближать значение $f(x)$ к числу 7 (то есть можно выбрать такую δ-окрестность точки 2, чтобы расстояние от точек $f(x)$ до точки 7 на числовой прямой (то есть $|f(x) - 7|$) было меньше любого положительного числа ε). Как уже отмечалось, в этом случае говорят, что число 7 является пределом функции $f(x)$ в точке $x = 2$ (или при x, стремящемся к 2), и записывают: $\lim\limits_{x\to 2}(2x+3)=7.$

О п р е д е л е н и е. Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки a, кроме, возможно, самой точки a. **Число B называется пределом функции $f(x)$ в точке a (или при x, стремящемся к a), если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta > 0$, что для всех $x \neq a$ из δ-окрестности точки a (то есть при $x \neq a$ и $|x - a| < \delta$) выполняется неравенство $|f(x) - B| < \varepsilon$.**

Проиллюстрируем применение определения к обоснованию того, что предел функции $f(x)$ при x, стремящемся к a, равен B.

В простейших случаях такое обоснование проводится по схеме:

1) *для любого положительного числа* ε *расматривают неравенство*
$$|f(x)-B|<\varepsilon;$$
2) *при всех значениях* $x \neq a$ *из некоторой окрестности точки* a *из этого неравенства получают неравенство* $|x-a|<\delta$;
3) *объясняют* (опираясь на равносильность выполненных преобразований неравенства или на свойства неравенств), *что при полученном значении* δ *(которое записывают через* ε*) из неравенства* $|x-a|<\delta$ (при $x\neq a$) *следует неравенство* $|f(x)-B|<\varepsilon$;
4) *используя определение предела функции в точке* a, *делают вывод, что* $\lim\limits_{x\to a} f(x)=B.$

Задача 1 Используя определение предела, проверьте, что $\lim\limits_{x\to 2}(2x+3)=7$.

Р е ш е н и е. ▶ Пусть $f(x) = 2x + 3$ и ε — некоторое положительное число ($\varepsilon > 0$). Рассмотрим неравенство

$$|f(x)-7|<\varepsilon \qquad (1)$$

и найдем такое число $\delta > 0$, чтобы при $|x - 2| < \delta$ выполнялось неравенство (1).

Учитывая, что $|f(x)-7|=|(2x+3)-7|=|2x-4|=|2(x-2)|=2|x-2|$, неравенство $|f(x) - 7| < \varepsilon$ равносильно неравенству $2|x - 2| < \varepsilon$, которое, в свою очередь, равносильно неравенству $|x-2|<\frac{\varepsilon}{2}$. Поэтому, если выбрать $\delta=\frac{\varepsilon}{2}$, то при $|x - 2| < \delta$ будет выполняться неравенство $|(2x + 3) - 7| < \varepsilon$, а это и значит, что $\lim\limits_{x\to 2}(2x+3)=7$. ◁

З а м е ч а н и е. Как видим, выбор δ зависит от заданного значения ε. Чтобы подчеркнуть этот факт, иногда записывают $\delta = \delta(\varepsilon)$.

Напомним, что точка a, в которой рассматривается предел, может принадлежать области определения функции $f(x)$ (как в рассмотренной задаче 1), а может и не принадлежать ей.

Задача 2 Докажите, что $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}=6$.

Р е ш е н и е. ▶ Пусть $f(x)=\frac{x^2-9}{x-3}$ и $\varepsilon > 0$. Тогда на области определения функции $f(x)$ (то есть при $x \neq 3$) имеем

$$|f(x)-6|=\left|\frac{x^2-9}{x-3}-6\right|=|(x+3)-6|=|x-3|.$$

Если выбрать $\delta = \varepsilon$, то получим, что $|f(x) - 6| = |x - 3| < \varepsilon$, как только $|x - 3| < \delta$. Поэтому согласно определению предела $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}=6$. ◁

Задача 3 Докажите, что предел постоянной функции равен самой постоянной.

Р е ш е н и е. ▶ Пусть $f(x) = c$ для всех x из некоторой окрестности точки a. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ $|f(x) - c| = |c - c| = 0 < \varepsilon$ при всех x из выбранной окрестности точки a. Поэтому $\lim\limits_{x\to a}f(x)=$ $\lim\limits_{x\to a}c=c$. ◁

Задача 4 Докажите, что $\lim\limits_{x\to a}x=a$.

Р е ш е н и е. ▶ Пусть $f(x) = x$ и выбрано некоторое положительное число ε. Если взять $\delta = \varepsilon > 0$, то получим, что $|f(x) - a| = |x - a| < \varepsilon$, как только $|x - a| < \delta$. Поэтому по определению предела $\lim\limits_{x\to a}x=a$. ◁

Задача 5 Докажите, что $\lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0$.

Решение. Пусть $f(x) = x^2$ и выбрано некоторое положительное число ε. Если взять $\delta = \sqrt{\varepsilon} > 0$, получим, что $|f(x) - 0| = |x^2| < \varepsilon$, как только $|x - 0| = |x| < \delta$. Поэтому по определению предела $\lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0$.

2. Основные теоремы о пределах функции. Понятие бесконечно малой функции при $x \to a$. С помощью определения предела функции можно доказать также теорему о пределе суммы двух функций.

Предел суммы двух функций равен сумме их пределов, если пределы слагаемых существуют:

$$\lim_{x\to a}(f(x)+g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x).$$

Зададим $\varepsilon > 0$. Если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, то найдется такое число $\delta_1 > 0$, что при $|x - a| < \delta_1$ (кроме, возможно, $x = a$) выполняется неравенство

$$|f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2}. \qquad (1)$$

Аналогично, если $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B$, то найдется такое число $\delta_2 > 0$, что при $|x - a| < \delta_2$ (кроме, возможно, $x = a$) выполняется неравенство

$$|g(x) - B| < \frac{\varepsilon}{2}. \qquad (2)$$

Если выбрать как число δ наименьшее из чисел δ_1 и δ_2 (это можно обозначить так: $\delta = \min\{\delta_1; \delta_2\}$), то мы выберем общую часть двух окрестностей точки a, и при $|x - a| < \delta$ (кроме, возможно, $x = a$) будут выполняться оба неравенства (1) и (2). Тогда

$$|(f(x)+g(x))-(A+B)| = |(f(x)-A)+(g(x)-B)| \leqslant |f(x)-A| + |g(x)-B| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Из этого следует, что $\lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x)) = A + B$, то есть

$$\lim_{x\to a}(f(x)+g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x).$$

Для доказательства свойств пределов произведения и частного функций удобно ввести понятие *бесконечно малой функции*.

Функция $f(x)$, которая определена в некоторой окрестности точки a, называется бесконечно малой функцией при x, стремящемся к a, если

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0.$$

Учитывая определение предела функции в точке, это определение можно сформулировать так.

Функция $f(x)$, которая определена в некоторой окрестности точки a, называется бесконечно малой функцией при x, стремящемся к a ($x \to a$), если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta > 0$, что для всех x, удовлетворяющих условию $|x - a| < \delta$ (кроме, возможно, $x = a$), *выполняется неравенство $|f(x)| < \varepsilon$.*

Например,

1) $\lim\limits_{x\to 0} x = 0$ (см. задачу 4), следовательно, $f(x) = x$ — бесконечно малая функция при $x \to 0$;

2) $\lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0$ (см. задачу 5), следовательно, $f(x) = x^2$ — бесконечно малая функция при $x \to 0$.

Замечание. **Если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, то это эквивалентно тому, что $f(x) = A + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ — бесконечно малая функция при $x \to a$.**

Действительно, если рассмотреть функцию

$$\alpha(x) = f(x) - A, \tag{3}$$

то $\lim\limits_{x\to a} \alpha(x) = \lim\limits_{x\to a} (f(x) - A) = \lim\limits_{x\to a} f(x) - \lim\limits_{x\to a} A = A - A = 0.$ Это означает, что функция $\alpha(x)$ является бесконечно малой при $x \to a$. Но тогда равенство (3) эквивалентно равенству $f(x) = A + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ — бесконечно малая функция при $x \to a$.

Свойства бесконечно малых функций

1. *Если функции* $\alpha(x)$ *и* $\beta(x)$ *бесконечно малые при* $x \to a$, *то их сумма* $\alpha(x) + \beta(x)$ *и произведения* $\alpha(x) \cdot \beta(x)$ *и* $c \cdot \alpha(x)$ (*где* $c = const$ — постоянная) *также являются бесконечно малыми функциями при* $x \to a$.
2. *Если функция* $\beta(x)$ *бесконечно малая при* $x \to a$ *и для всех* x, *удовлетворяющих условию* $|x - a| < \delta$ (*кроме, возможно,* $x = a$), *выполняется неравенство* $|\alpha(x)| \leqslant |\beta(x)|$, *то функция* $\alpha(x)$ *также бесконечно малая при* $x \to a$.

Докажем эти свойства.

1. По условию функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ — бесконечно малые при $x \to a$. Это означает, что $\lim\limits_{x\to a} \alpha(x) = 0$ и $\lim\limits_{x\to a} \beta(x) = 0$. Тогда, используя формулу предела суммы, имеем

$$\lim_{x\to a} (\alpha(x) + \beta(x)) = \lim_{x\to a} \alpha(x) + \lim_{x\to a} \beta(x) = 0 + 0 = 0.$$

Из этого следует, что сумма $\alpha(x) + \beta(x)$ является бесконечно малой функцией.

С другой стороны, если функция $\alpha(x)$ — бесконечно малая при $x \to a$, то это означает, что для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta_1 > 0$, что для всех x, удовлетворяющих условию $|x - a| < \delta_1$ (кроме, возможно, $x = a$), выполняется неравенство

$$|\alpha(x)| < \varepsilon. \tag{4}$$

Аналогично если функция $\beta(x)$ — бесконечно малая при $x \to a$, то это означает, что, например, для $\varepsilon = 1$ можно указать такое $\delta_2 > 0$, что для всех x, удовлетворяющих условию $|x - a| < \delta_2$ (кроме, возможно, $x = a$), выполняется неравенство

$$|\beta(x)| < 1. \tag{5}$$

Если выбирать как число δ наименьшее из чисел δ_1 и δ_2 ($\delta = \min\{\delta_1; \delta_2\}$), то мы выберем общую часть двух окрестностей точки a, и при $|x - a| < \delta$ (кроме, возможно, $x = a$) будут выполняться оба неравенства (4) и (5). Тогда $|\alpha(x) \cdot \beta(x)| = |\alpha(x)| \cdot |\beta(x)| < \varepsilon \cdot 1 = \varepsilon$. Из этого следует, что $\alpha(x) \cdot \beta(x)$ является бесконечно малой функцией при $x \to a$.

Для обоснования того, что функция $c \cdot \alpha(x)$ (где $c = const$) является бесконечно малой, достаточно заметить, что при $c = 0$ это утверждение выполняется $\left(\lim\limits_{x\to a} 0 \cdot \alpha(x) = \lim\limits_{x\to a} 0 = 0\right)$, а при $c \neq 0$ для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta > 0$, что для всех x, удовлетворяющих условию $|x - a| < \delta$ (кроме, возможно, $x = a$), выполняется неравенство $|\alpha(x)| < \frac{\varepsilon}{|c|}$. Тогда $|c \cdot \alpha(x)| = |c| \cdot |\alpha(x)| < |c| \cdot \frac{\varepsilon}{|c|} = \varepsilon$. Из этого следует, что функция $c \cdot \alpha(x)$ (где $c = const$) является бесконечно малой при $x \to a$.

2. По условию функция $\beta(x)$ — бесконечно малая при $x \to a$, тогда для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta_1 > 0$, что для всех x, удовлетворяющих условию $|x - a| < \delta_1$ (кроме, возможно, $x = a$), выполняется неравенство

$$|\beta(x)| < \varepsilon. \tag{6}$$

По условию при всех x, удовлетворяющих условию $|x - a| < \delta$ (кроме, возможно, $x = a$), выполняется неравенство

$$|\alpha(x)| \leqslant |\beta(x)|. \tag{7}$$

Тогда, если выбирать как число δ_2 наименьшее из чисел δ_1 и δ ($\delta_2 = \min\{\delta_1; \delta\}$), то мы выберем общую часть двух окрестностей точки a, и при $|x - a| < \delta_2$ (кроме, возможно, $x = a$) будут выполняться оба неравенства (6) и (7). Тогда $|\alpha(x)| \leqslant |\beta(x)| < \varepsilon$. Из этого следует, что функция $\alpha(x)$ также является бесконечно малой при $x \to a$. ○

Докажем т е о р е м у о п р е д е л е п р о и з в е д е н и я.

● Если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, то это эквивалентно тому, что $f(x) = A + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ — бесконечно малая функция при $x \to a$.

Аналогично если $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B$, то это эквивалентно тому, что $g(x) = B + \beta(x)$, где $\beta(x)$ — бесконечно малая функция при $x \to a$.

Тогда $f(x) \cdot g(x) = (A + \alpha(x)) \cdot (B + \beta(x)) = AB + A\beta(x) + B\alpha(x) + \alpha(x)\beta(x)$. Учитывая свойства бесконечно малых функций, получаем, что функция $\varphi(x) = A\beta(x) + B\alpha(x) + \alpha(x)\beta(x)$ бесконечно малая. Следовательно, $f(x) \cdot g(x) = AB + \varphi(x)$, где $\varphi(x)$ — бесконечно малая функция. Из этого следует, что $\lim\limits_{x\to a}(f(x) \cdot g(x)) = AB$, то есть

$$\lim_{x\to a}(f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x). \text{ ○}$$

Предел произведения двух функций равен произведению их пределов, если пределы множителей существуют.

Отметим, что, используя метод математической индукции, правила вычисления пределов суммы и произведения можно обобщить на случай любого количества слагаемых или множителей.

Используя правило вычисления предела произведения, получаем: $\lim\limits_{x\to a}(cf(x))=\lim\limits_{x\to a}c\cdot\lim\limits_{x\to a}f(x)=c\cdot\lim\limits_{x\to a}f(x)$. Следовательно,

$$\lim_{x\to a}(c\cdot f(x))=c\cdot\lim_{x\to a}f(x)\ —$$

постоянный множитель можно выносить за знак предела.

Для доказательства теоремы о пределе частного $\frac{f(x)}{g(x)}$ сначала рассмотрим случай, когда $f(x)=1$, то есть докажем утверждение:

$$\boxed{\text{если } \lim_{x\to a}g(x)=B \text{ (где } B\neq 0\text{), то } \lim_{x\to a}\frac{1}{g(x)}=\frac{1}{B}}\ .$$

По условию $\lim\limits_{x\to a}g(x)=B$ (где $B\neq 0$). Это эквивалентно тому, что $g(x)=B+$ $+\beta(x)$, где $\beta(x)$ — бесконечно малая функция при $x\to a$. Тогда для $\varepsilon=\frac{|B|}{2}>0$ можно найти такое $\delta>0$, что для всех x, удовлетворяющих условию $|x-a|<\delta$ (кроме, возможно, $x=a$), выполняется неравенство

$$|\beta(x)|<\frac{|B|}{2}. \qquad (8)$$

Используя неравенство $|a+b|\geqslant|a|-|b|$ (с. 14) и неравенство (8), получаем: $|g(x)|=|B+\beta(x)|\geqslant|B|-|\beta(x)|>|B|-\frac{|B|}{2}=\frac{|B|}{2}$. Следовательно, для выбранных значений x

$$|g(x)|>\frac{|B|}{2}. \qquad (9)$$

Рассмотрим для выбранных значений x выражение $\left|\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{B}\right|$ и учтем неравенство (9):

$$\left|\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{B}\right|=\frac{|B-g(x)|}{|g(x)|\cdot|B|}=\frac{|g(x)-B|}{|g(x)|\cdot|B|}=\frac{|\beta(x)|}{|g(x)|\cdot|B|}<\frac{2}{|B|^2}\cdot|\beta(x)|=\left|\frac{2}{B^2}\cdot\beta(x)\right|.$$

Поскольку функция $\beta(x)$ бесконечно малая (при $x\to a$), то функция $\frac{2}{B^2}\cdot\beta(x)$ также бесконечно малая $\left(\frac{2}{B^2}=const\right)$. Тогда по свойству 2 бесконечно малых функций (с. 114) получаем, что функция $\gamma(x)=\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{B}$ является бесконечно малой при $x\to a$, из этого следует, что $\lim\limits_{x\to a}\frac{1}{g(x)}=\frac{1}{B}$.

Отсюда, если $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$ и $\lim\limits_{x\to a} g(x)=B$ (где $B\neq 0$), то, используя формулу предела произведения и полученную формулу, имеем:

$\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)\cdot\frac{1}{g(x)}\right)=\lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot\lim\limits_{x\to a}\frac{1}{g(x)}=A\cdot\frac{1}{B}=\frac{A}{B}$. Следовательно,

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}\quad\left(\text{где }\lim_{x\to a} g(x)\neq 0\right).$$

Предел частного двух функций равен частному их пределов, если пределы числителя и знаменателя существуют и предел знаменателя не равен нулю.

Задача 6 Найдите $\lim\limits_{x\to 1}(3x^2-5x+6)$.

Решение. Используя теоремы о пределах суммы, разности и произведения, получаем:

$$\lim_{x\to 1}(3x^2-5x+6)=\lim_{x\to 1}(3x^2)-\lim_{x\to 1}(5x)+\lim_{x\to 1}6=3\lim_{x\to 1}x^2-5\lim_{x\to 1}x+6=$$
$$=3(\lim_{x\to 1}x)\cdot(\lim_{x\to 1}x)-5\cdot 1+6=3\cdot 1\cdot 1-5+6=4.$$

Ответ: 4.

Пример 7 Найдите $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-5x+6}{x-3}$.

Решение. Здесь предел знаменателя равен нулю, поэтому воспользоваться теоремой о пределе частного нельзя.

Разложим числитель на множители: $x^2-5x+6=(x-3)(x-2)$.

Поскольку при нахождении предела в точке 3 рассматриваются только значения $x\neq 3$, то дробь можно сократить на $x-3\neq 0$, и поэтому

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-5x+6}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x-2)}{x-3}=\lim_{x\to 3}(x-2)=3-2=1.$$

Ответ: 1.

Теорема о единственности предела. ***Если функция $f(x)$ в точке a имеет предел, то этот предел единственный.***

Доказательство. Проведем доказательство методом от противного. Пусть в точке $x=a$ функция $f(x)$ имеет два разных предела A и B. По определению предела для любого $\varepsilon>0$ существуют $\delta_1(\varepsilon)>0$ и $\delta_2(\varepsilon)>0$ такие, что для всех x, удовлетворяющих условию $|x-a|<\delta_1$ $(x\neq a)$, выполняется неравенство

$$|f(x)-A|<\varepsilon, \tag{10}$$

а для всех x, удовлетворяющих условию $|x-a|<\delta_2$ $(x\neq a)$, выполняется неравенство

$$|f(x)-B|<\varepsilon. \tag{11}$$

Из чисел δ_1 и δ_2 можно выбрать наименьшее. Обозначим его буквой δ ($\delta = \min\{\delta_1; \delta_2\}$). Если взять некоторое $x \neq a$, которое удовлетворяет неравенству $|x - a| < \delta$, то для него выполняются оба неравенства (10) и (11). Вследствие того, что модуль суммы двух слагаемых не превышает суммы модулей этих слагаемых, имеем:

$$|A - B| = |A - f(x) + f(x) - B| \leqslant |A - f(x)| + |f(x) - B| =$$
$$= |f(x) - A| + |f(x) - B| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

Поскольку ε — любое положительное число, то возьмем $\varepsilon = \frac{|A-B|}{4}$. Тогда получим $|A - B| < \frac{1}{2}|A - B|$, то есть $|A - B| < 0$. Но это неравенство не может выполняться. Следовательно, наше предположение о существовании двух пределов неверно, и поэтому $A = B$. ○

При изучении пределов иногда приходится выполнять предельный переход в неравенствах с помощью следующей теоремы.

Теорема. ***Если*** $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = B$, ***причем в некоторой окрестности точки а (кроме, возможно, самой точки а) справедливо неравенство*** $f(x) \leqslant \varphi(x)$, ***то*** $A \leqslant B$.

Доказательство (методом от противного). Допустим противоположное, то есть что $A > B$. Выберем две ε-окрестности точек A и B, а именно: $(A - \varepsilon; A + \varepsilon)$ и $(B - \varepsilon; B + \varepsilon)$, которые не пересекаются, то есть

$$A - \varepsilon > B + \varepsilon. \qquad (12)$$

Поскольку $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, то найдется δ_1-окрестность точки a, в которой $|f(x) - A| < \varepsilon$, то есть

$$A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon. \qquad (13)$$

Также существует δ_2-окрестность точки a, в которой $|\varphi(x) - B| < \varepsilon$, то есть

$$B - \varepsilon < \varphi(x) < B + \varepsilon. \qquad (14)$$

Из чисел δ_1 и δ_2 выберем наименьшее и обозначим его через δ. Тогда, учитывая неравенства (12)—(14), в δ-окрестности точки a имеем:

$$\varphi(x) < B + \varepsilon < A - \varepsilon < f(x),$$

и значит, $f(x) > \varphi(x)$, но это противоречит условию. Следовательно, $A \leqslant B$. ○

Следствие (предел промежуточной функции). ***Если*** $\lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = B$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B$ ***и в некоторой окрестности точки а (кроме, возможно, самой точки а) справедливо неравенство***

$$\varphi(x) \leqslant f(x) \leqslant g(x), \qquad (15)$$

то $\lim\limits_{x\to a} f(x) = B$.

Доказательство. Поскольку все условия последней теоремы выполняются, то выполним предельный переход в неравенствах (15). Получаем $B \leqslant \lim\limits_{x\to a} f(x) \leqslant B$. Но эти неравенства могут выполняться только в том случае, когда $\lim\limits_{x\to a} f(x) = B$, что и требовалось доказать. ○

7.2. Односторонние пределы

В приведенном в пункте 7.1 определении предела функции в точке аргумент x принимает все значения из δ-окрестности точки a (кроме, возможно, $x = a$) как слева, так и справа от точки a.

Если при нахождении предела рассматривать значения x только слева от точки a, то такой предел называется ***левым***, или ***левосторонним***, пределом и обозначается $\lim\limits_{x \to a-0} f(x)$ или $f(a - 0)$; а если рассматривать значения x только справа от точки a, то такой предел называется ***правым***, или ***правосторонним***, пределом и обозначается $\lim\limits_{x \to a+0} f(x)$ или $f(a + 0)$.

Левосторонние и правосторонние пределы называются ***односторонними*** пределами. Для случая, когда расматривают односторонние пределы в точке $x = 0$ (то есть при $x \to 0$), запись упрощают и записывают для левостороннего предела $\lim\limits_{x \to -0} f(x)$ или $f(-0)$, а для правостороннего предела $\lim\limits_{x \to a+0} f(x)$ или $f(+0)$.

Сформулируем теперь определение односторонних пределов.

Определение. **Число B_+ называется *правосторонним пределом функции $f(x)$ в точке a*, если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta > 0$, что для всех x из области определения функции, удовлетворяющих условию $a < x < a + \delta$, выполняется неравенство**

$$|f(x) - B_+| < \varepsilon. \tag{1}$$

Аналогично определяется число $B_- = f(a-0) = \lim\limits_{x \to a-0} f(x)$ — *левосторонний предел функции $f(x)$ в точке a*. Здесь неравенство

$$|f(x) - B_-| < \varepsilon \tag{2}$$

должно выполняться для всех x из левой части δ-окрестности точки a, то есть при $a - \delta < x < a$.

Отметим связь между односторонними пределами и пределом функции в некоторой точке a.

Если число B является пределом функции $f(x)$ при $x \to a$, то неравенство

$$|f(x) - B| < \varepsilon \tag{3}$$

справедливо для всех значений x из δ-окрестности точки a ($x \neq a$). Тогда это неравенство справедливо для всех значений x из левой половины указанной δ-окрестности и для всех x из ее правой половины, то есть существуют левосторонний и правосторонний пределы в точке a, и эти пределы равны B. Поэтому,

если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = B$, то $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = \lim\limits_{x \to a+0} f(x) = \lim\limits_{x \to a} f(x)$, то есть $B_- = B_+ = B$.

Имеет место и обратное утверждение: если выполняется равенство

$$B_- = B_+ = B, \text{ то } \lim_{x \to a} f(x) = B.$$

Действительно, если $B_- = B_+ = B$, то неравенство (1), определяющее существование правостороннего предела функции, выполняется и слева от точки a (согласно неравенству (2)), но тогда неравенство (1) фактически обращается в неравенство (3), и поэтому $\lim\limits_{x \to a} f(x) = B.$

В связи с этим можно сформулировать такой критерий.

Критерий существования предела. **Для того чтобы в точке $x = a$ существовал предел B функции $f(x)$, необходимо и достаточно, чтобы в этой точке существовал левосторонний предел функции $f(x)$, то есть $B_- = f(a - 0)$, и правосторонний предел функции $f(x)$, то есть $B_+ = f(a + 0)$, и чтобы они равнялись друг другу: $B_- = B_+ = B$, при этом**

$$\lim_{x \to a} f(x) = B.$$

Задача 1 Выясните существование предела функции $f(x) = |x|$ в точке 0.

Решение. ▶ Функция $f(x) = |x|$ определена на всей числовой прямой. Поскольку $f(x) = |x| = \begin{cases} x \text{ при } x \geqslant 0, \\ -x \text{ при } x < 0 \end{cases}$ (см. рис. 18), то при $x < 0$ $f(x) = -x$, поэтому $f(-0) = \lim\limits_{x \to -0} f(x) = \lim\limits_{x \to -0} (-x) = 0.$ Аналогично $f(+0) = \lim\limits_{x \to +0} f(x) = \lim\limits_{x \to +0} x = 0.$

Таким образом, $f(-0) = f(+0) = 0$. Поскольку односторонние пределы в точке 0 совпадают, то предел функции $f(x)$ существует и равен их общему значению, то есть $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} |x| = 0.$ ◁

Задача 2 Выясните существование предела в точке 2 для функции

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 3 \text{ при } x \leqslant 2, \\ 4 \text{ при } x > 2. \end{cases}$$

Решение. ▶ Заданная функция определена на всей числовой прямой. Найдем односторонние пределы этой функции в точке $x = 2$.

$f(2-0) = \lim\limits_{x \to 2-0} (2x + 3) = 7$ (см. задачу 1 из пункта 7.1, с. 112);

$f(2+0) = \lim\limits_{x \to 2+0} 4 = 4$ (см. задачу 3 из пункта 7.1, с. 112). То есть $f(2 - 0) \neq f(2 + 0)$, и поэтому заданная функция не имеет предела в точке $x = 2$ и не является непрерывной в этой точке. (График этой функции изображен на рисунке 70.) ◁

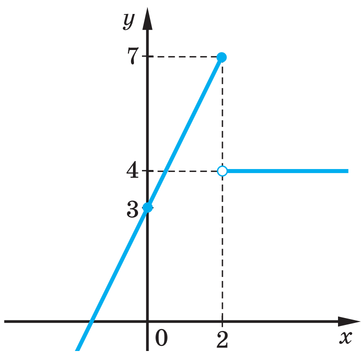


Рис. 70

7.3. Непрерывные функции

Напомним, что функция $f(x)$ называется непрерывной в точке a, если

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Доказанные свойства предела функции позволяют обосновать **свойства непрерывных функций**, приведенные в таблице 2 (с. 20):

если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке a, то **сумма, произведение и частное непрерывных в точке a функций непрерывны в точке a** (частное в случае, когда делитель $g(a) \neq 0$).

Действительно, если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке a, то

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) \text{ и } \lim_{x \to a} g(x) = g(a).$$

Тогда $\lim\limits_{x \to a} (f(x) + g(x)) = \lim\limits_{x \to a} f(x) + \lim\limits_{x \to a} g(x) = f(a) + g(a)$. Но это и означает, что функция $f(x) + g(x)$ непрерывна в точке a. Аналогично обосновывается непрерывность произведения и частного двух непрерывных функций.

Согласно определению, *непрерывность функции $f(x)$ в точке x_0 означает выполнение следующих условий:*

1) *функция $f(x)$ должна быть определена в точке x_0;*
2) *у функции $f(x)$ должен существовать предел в точке x_0;*
3) *предел функции в точке x_0 совпадает со значением функции в этой точке.*

Например, функция $f(x) = x^2$ определена на всей числовой прямой и $\lim\limits_{x \to 1} x^2 = 1$. Поскольку $f(1) = 1$, то значение $f(x) = x^2$ в точке 1 совпадает с пределом этой функции при $x \to 1$, поэтому по определению функция $f(x) = x^2$ непрерывна в точке $x = 1$.

Если использовать определения левостороннего и правостороннего пределов, то можно дать определения левосторонней и правосторонней непрерывности функции, а именно: функция называется ***непрерывной слева*** в точке a, если $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = f(a)$, и ***непрерывной справа*** в точке a, если $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = f(a)$.

Например, функция $f(x) = \{x\}$, где $\{x\}$ — дробная часть числа x, непрерывна в любой точке, кроме целочисленных значений аргумента x, в которых она непрерывна справа (рис. 71).

Функция называется *непрерывной на интервале* $(a; b)$, если она непрерывна в каждой его точке. Функция называется *непрерывной на отрезке* $[a; b]$, если она непрерывна на интервале $(a; b)$, непрерывна справа в точке a и непрерывна слева в точке b.

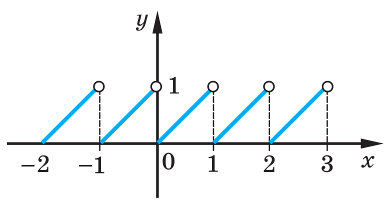


Рис. 71

Если равенство $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$ в точке a не выполняется, функция $f(x)$ называется ***разрывной*** в точке a (а сама

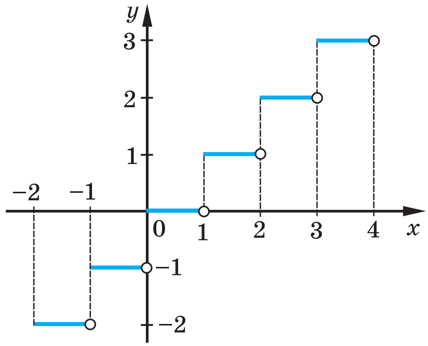


Рис. 72

точка называется ***точкой разрыва*** функции $f(x)$).

Например, функция из задачи 2 является разрывной в точке 2.

Если рассмотреть функцию $y = [x]$ ($[x]$ — *целая часть* x, то есть наибольшее целое число, которое не превышает x), то эта функция является разрывной в каждой целочисленной точке (рис. 72).

Аналогично для функции $y = \{x\}$ ($\{x\}$ — *дробная часть* x, то есть разность $x - [x]$) точками разрыва являются все целочисленные значения аргумента x (см. рис. 71).

Понятие непрерывности функции можно связать с понятиями приращения функции и аргумента.

Пусть задана функция $f(x)$ с областью определения $D(f) = (a; b)$ и пусть x_0 — некоторое значение аргумента из интервала $(a; b)$. Тогда если $x \in (a; b)$ — другое фиксированное значение аргумента, то разность $x - x_0$ называется ***приращением аргумента*** и обозначается Δx, то есть $\Delta x = x - x_0$. Отсюда

$$x = x_0 + \Delta x.$$

Разность $f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ называется ***приращением функции f*** в точке x_0 и обозначается Δf.

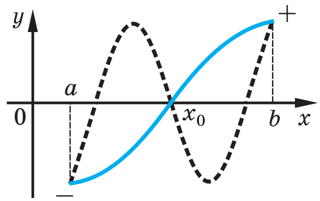
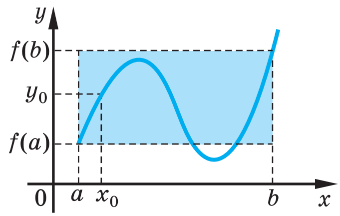
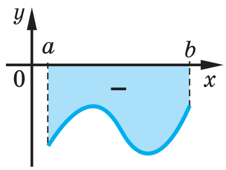
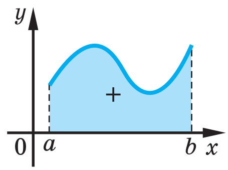
Очевидно, что в случае, когда x стремится к x_0, приращение аргумента стремится к нулю: $\Delta x \to 0$. Если функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, то по определению $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, и поэтому $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) - f(x_0)) = 0$, а это означает, что $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta f = 0$.

Из последнего соотношения получаем, что в случае, когда функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, то малому приращению аргумента соответствует малое приращение функции. Учитывая это свойство, мы строим график непрерывной функции в виде сплошной линии (не отрывая карандаш от бумаги).

Представление о непрерывной функции как о функции, график которой можно нарисовать, не отрывая карандаш от бумаги, хорошо подтверждается свойствами непрерывных функций, которые доказываются в курсах математического анализа. Приведем примеры таких свойств (табл. 12).

Отметим, что известные вам элементарные функции непрерывны в любой точке своей области определения. Графики таких функций изображаются сплошными кривыми на любом интервале, который полностью входит в область определения (именно на этом свойстве и основывается способ построения графика функции «по точкам»). Например, функция $f(x) = \frac{1}{x}$ непрерывна на любом интервале, который не содержит точку 0 (см. рис. 45).

Таблица 12

Свойства непрерывных функций	Иллюстрация
1. Если непрерывная на отрезке $[a;\ b]$ функция принимает на концах отрезка значения разных знаков, то в некоторой точке этого отрезка она принимает значение, равное нулю.	
2. Функция $f(x)$, непрерывная на отрезке $[a;\ b]$, принимает все промежуточные значения между ее значениями $f(a)$ и $f(b)$ на концах отрезка.	
3. Если на интервале $(a;\ b)$ функция $f(x)$ непрерывна и не обращается в нуль, то на этом интервале функция сохраняет постоянный знак.	 

Свойства непрерывных функций позволяют корректно обосновать метод интервалов решения неравенств, приведенный в учебнике для 10 класса. Поэтому метод интервалов можно использовать при решении любых неравенств вида $f(x) \gtrless 0$, где $f(x)$ — непрерывная в любой точке своей области определения функция (см. также с. 20–24).

7.4. Предел функции на бесконечности. Бесконечный предел функции. Предел последовательности

Часто при изучении функций возникает необходимость найти предел функции на бесконечности, то есть найти такое число B (если оно существует), к которому стремится функция $f(x)$ при неограниченном возрастании аргумента x, или когда x, увеличиваясь по абсолютной величине, остается отрицательным.

Рассмотрим функцию $f(x)=2+\dfrac{1}{x^2+1}$. Очевидно, что при увеличении x знаменатель дроби увеличивается, и поэтому значение дроби становится как

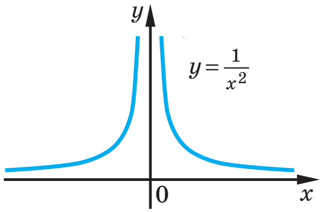


Рис. 73

угодно малым по абсолютной величине. Таким образом, значение функции $f(x)$ при очень больших значениях аргумента x мало отличается от числа 2. В этом случае говорят, что функция $f(x)$ имеет своим пределом число 2 при $x \to \infty$, и пишут: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 2$.

О п р е д е л е н и е. **Пусть функция $f(x)$ определена на всей числовой прямой. Число B называется пределом $f(x)$ при $x \to \infty$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое число $M > 0$, что для всех x, удовлетворяющих условию $|x| > M$, выполняется неравенство $|f(x) - B| < \varepsilon$.**

Это записывается так: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = B.$

В некоторых случаях поведение функции $f(x)$ разное при $x \to -\infty$ и при $x \to +\infty$. Поэтому при исследовании свойств функции иногда отдельно рассматривают $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. Эти пределы определяются аналогично определению предела $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$, только условие $|x| > M$ заменяется соответственно на $x < -M$ и $x > M$.

Кроме рассмотренных случаев конечных пределов функции $f(x)$ при $x \to a$ (или при $x \to \infty$), иногда используется также понятие бесконечного предела. Например, функция $f(x) = \frac{1}{x^2}$, которая определена для всех $x \neq 0$ (рис. 73), принимает сколь угодно большие значения при $x \to 0$. В этом случае говорят, что функция в точке $x = 0$ имеет бесконечный предел, и пишут: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = \infty.$

О п р е д е л е н и е. ***Будем считать, что $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$, если для любого числа $M > 0$ существует такое число $\delta > 0$, что для всех x, удовлетворяющих условию $|x - a| < \delta$ $(x \neq a)$, выполняется неравенство $|f(x)| > M$.***

В математике также используется понятие бесконечного предела при $x \to \infty$, то есть предела типа $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$, который определяется так: *если для любого числа $M > 0$ существует такое число $M_0 > 0$, что для всех x, удовлетворяющих условию $|x| > M_0$, выполняется условие $|f(x)| > M$, то говорят, что функция $f(x)$ имеет* ***бесконечный предел на бесконечности.***

Например, $\lim\limits_{x\to\infty} x^2 = +\infty$. Этот факт выражает известное свойство функции $f(x) = x^2$, которая неограниченно возрастает при увеличении значений $|x|$.

Задача 1 Найдите предел $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^3-3x+1}{5+x^2-x^3}$.

Р е ш е н и е. ▶ Вынесем в числителе и знаменателе наивысшую степень переменной за скобки и сократим числитель и знаменатель на x^3. Тогда

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3-3x+1}{5+x^2-x^3}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3\left(2-\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)}{x^3\left(\frac{5}{x^3}+\frac{1}{x}-1\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^3}}{\frac{5}{x^3}+\frac{1}{x}-1}=\frac{2}{-1}=-2.$$

Ответ: −2. ◁

Задача 2 Найдите предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+5}-x\right)$.

Р е ш е н и е. ▶ Умножим и разделим разность, которая стоит под знаком предела, на сумму $\sqrt{x^2+5}+x$. Получим

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+5}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+5}-x\right)\left(\sqrt{x^2+5}+x\right)}{\sqrt{x^2+5}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+5-x^2}{\sqrt{x^2+5}+x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{5}{\sqrt{x^2+5}+x}=0.$$

Ответ: 0. ◁

Напомним, что в случае, когда $\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$, функция называется бесконечно малой при $x\to a$. Если же $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty$, то функция называется *бесконечно большой при* $x\to a$. Аналогично определяются ***бесконечно малые*** и ***бесконечно большие функции*** при $x\to\infty$, $x\to-\infty$, $x\to+\infty$.

Отметим, что в случае, когда функция $f(x)$ является бесконечно малой при $x\to a$ и $f(x)\neq 0$ для $x\neq a$ из некоторой окрестности точки a, то функция $\frac{1}{f(x)}$ будет бесконечно большой при $x\to a$. И наоборот, если функция $f(x)$ бесконечно большая при $x\to a$, то функция $\frac{1}{f(x)}$ бесконечно малая при $x\to a$.

Например, функция $f(x)=x$ является бесконечно малой при $x\to 0$ и бесконечно большой при $x\to\infty$ (а также при $x\to-\infty$ и при $x\to+\infty$). Тогда функция $f(x)=\frac{1}{x}$ является бесконечно малой при $x\to\infty$ (при $x\to-\infty$ и при $x\to+\infty$) и бесконечно большой при $x\to 0$ (аналогично при $x\to-0$ и при $x\to+0$).

Предел последовательности

В математике достаточно распространенными являются *бесконечные последовательности*, то есть *функции* $y=f(n)$, *заданные на множестве натуральных чисел* N. Чтобы подчеркнуть, что аргумент такой функции принимает только значения из множества натуральных чисел, его обозначают не x, а n. Для последовательности $f(n)$ достаточно часто возникает необходимость найти ее предел при неограниченном возрастании аргумента n (при $n \to +\infty$). Определение этого предела в основном аналогично определению предела функции на бесконечности.

Определение. **Число B называется *пределом последовательности* $f(n)$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $M > 0$, что для всех $n > M$ выполняется неравенство $|f(n) - B| < \varepsilon$.**

Для пределов последовательностей выполняются все известные вам теоремы о пределах.

Задача 3 Найдите предел последовательности $f(n) = \dfrac{\sqrt{9n^2+1}}{3n-2}$.

Решение. ▶ Как и в задаче 1, вынесем в числителе и знаменателе за скобки наивысшую степень переменной, сократим числитель и знаменатель на n, а затем используем теоремы о пределах. Тогда

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{9n^2+1}}{3n-2} = \lim_{n\to\infty}\frac{n\cdot\sqrt{9+\frac{1}{n^2}}}{n\left(3-\frac{2}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{9+\frac{1}{n^2}}}{3-\frac{2}{n}} = \frac{\sqrt{9}}{3} = 1.$$

Ответ: 1. ◁

7.5. Предел отношения $\frac{\sin x}{x}$ при $x \to 0$

Этот предел обычно называют *замечательным пределом* (точнее *первым замечательным пределом*), поскольку его часто приходится использовать при нахождении пределов тригонометрических функций.

Теорема. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1.$

Доказательство. Можно считать, что x принимает только положительные значения. Это следует из того, что функция $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ является четной функцией, поскольку $f(-x) = \dfrac{\sin(-x)}{-x} = \dfrac{-\sin x}{-x} = \dfrac{\sin x}{x} = f(x)$.

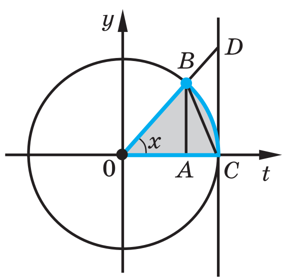


Рис. 74

Поскольку $x \to 0$, то, начиная с некоторого значения, x попадает в первую четверть. Поэтому можно считать, что $0 < x \leqslant \frac{\pi}{2}$. На рисунке 74 изображена единичная окружность, на которой отложен угол в x радиан и проведена линия тангенсов CD. Учитывая определения синуса и тангенса через единичную окружность, получаем $AB = \sin x$, а $CD = \operatorname{tg} x$. Сравним площади треугольников OBC, ODC и сектора OBC. Они удовлетворяют неравенству

$$S_{\Delta\, OBC} \leqslant S_{\text{сект.}\, OBC} \leqslant S_{\Delta\, ODC}. \qquad (1)$$

Поскольку

$$S_{\Delta OBC} = \frac{1}{2} OC \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sin x = \frac{\sin x}{2}; \quad S_{\Delta ODC} = \frac{1}{2} OC \cdot DC = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{tg} x}{2},$$

а площадь кругового сектора OBC равна: $S_{\text{сект.}\, OBC} = \frac{x}{2}$, то, подставив эти значения в неравенство (1), получим

$$\sin x \leqslant x \leqslant \operatorname{tg} x. \qquad (2)$$

Поскольку $0 < x \leqslant \frac{\pi}{2}$, имеем $\sin x > 0$ (и $\cos x > 0$). Поэтому, разделив неравенство (2) на $\sin x$, получим: $1 \leqslant \frac{x}{\sin x} \leqslant \frac{1}{\cos x}$. Отсюда $\cos x \leqslant \frac{\sin x}{x} \leqslant 1$ (учитывая четность функций $\cos x$ и $\frac{\sin x}{x}$, получаем, что это неравенство выполняется и при $-\frac{\pi}{2} < x < 0\Big)$.

Так как $\lim\limits_{x\to 0} 1 = 1$, $\lim\limits_{x\to 0} \cos x = \cos 0 = 1$, то по теореме о пределе промежуточной функции имеем $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. ○

Кроме предела $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, часто используют некоторые его вариации.

Задача 4 Докажите, что $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$.

▶ Доказательство. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{(\cos x)\cdot x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{\sin x}{x}}{\cos x} = \frac{1}{1} = 1$. ◁

Задача 5 Докажите, что $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$.

▶ Доказательство. Очевидно, что $\lim\limits_{\alpha\to 0} \frac{\alpha}{\sin\alpha} = 1$. Действительно,

$$\lim_{\alpha\to 0} \frac{\alpha}{\sin\alpha} = \lim_{\alpha\to 0} \frac{1}{\frac{\sin\alpha}{\alpha}} = \frac{1}{\lim\limits_{\alpha\to 0} \frac{\sin\alpha}{\alpha}} = 1.$$

Поскольку $\alpha \to 0$, то, начиная с некоторого значения, α попадает в интервал $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ $(\alpha \neq 0)$. Обозначим $\sin\alpha = x$, тогда $\alpha = \arcsin x$. Если $\alpha \to 0$, то $x = \sin\alpha \to 0$. В этих обозначениях предел $\lim\limits_{\alpha\to 0} \frac{\alpha}{\sin\alpha} = 1$ обращается в предел

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1. \text{ ◁}$$

Задача 6 Докажите, что $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg} x}{x}=1.$

▶ Доказательство. Сначала рассмотрим предел

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\alpha}{\operatorname{tg}\alpha}=\lim_{\alpha\to 0}\frac{\alpha}{\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}=\lim_{\alpha\to 0}\frac{\cos\alpha}{\dfrac{\sin\alpha}{\alpha}}=\frac{\lim\limits_{\alpha\to 0}\cos\alpha}{\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{\sin\alpha}{\alpha}}=\frac{1}{1}=1.$$

Поскольку $\alpha\to 0$, то, начиная с некоторого значения, α попадает в интервал $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ $(\alpha\neq 0)$. Обозначим $\operatorname{tg}\alpha=x$, тогда $\alpha=\operatorname{arctg} x$. Если $\alpha\to 0$, то $x=\operatorname{tg}\alpha\to 0$. В этих обозначениях из предела $\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{\alpha}{\operatorname{tg}\alpha}=1$ получаем $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg} x}{x}=1.$ ◁

7.6. Практическое вычисление предела функции

При вычислении предела функции обычно применяют не определение предела, а теоремы о пределах и приемы, которые мы использовали при нахождении пределов в приведенных выше задачах. Обобщим эти приемы, оформив результат в виде таблицы.

Таблица 13

Вычисление предела функции $\lim\limits_{x\to a} f(x)$	
Основные этапы	Пример
1. Пользуясь непрерывностью функции $f(x)$, пытаемся подставить значение $x=a$ в $f(x)$.	$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{9-x^2}{x-1}=\dfrac{9-2^2}{2-1}=5$
2. Если вычисляется предел при $x\to\infty$, то пытаемся в числителе и знаменателе вынести за скобки наивысшую степень переменной.	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-\sqrt{9x^4+2x}}{x^2-3x+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2\left(\frac{1}{x}-\sqrt{9+\frac{2}{x^3}}\right)}{x^2\left(1-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}=$ $=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{1}{x}-\sqrt{9+\frac{2}{x^3}}}{1-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}=\dfrac{0-\sqrt{9+0}}{1-0+0}=-3$
3. Если в результате подстановки $x=a$ получили выражение вида $\left(\frac{0}{0}\right)$, то:	
а) пытаемся разложить на множители числитель и знаменатель	$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x^2-5x+6}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x-3)(x+3)}{(x-3)(x-2)}=$ $=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x+3}{x-2}=\dfrac{3+3}{3-2}=6$

Продолж. табл. 13

б) если в числитель и знаменатель входят выражения с квадратным или кубическим корнями, то умножаем числитель и знаменатель на соответствующие выражения, чтобы избавиться от корней (иногда вводят замену: выражение с корнем обозначают новой переменной)	<u>1 способ</u> $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-16}{\sqrt{x}-2}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{(x^2-16)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}=$ $=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{(x-4)(x+4)(\sqrt{x}+2)}{x-4}=$ $=\lim\limits_{x\to 4}(x+4)(\sqrt{x}+2)=(4+4)(\sqrt{4}+2)=32$ <u>2 способ</u>. Обозначим $\sqrt{x}=t$. Тогда $x=t^2$. При $x\to 4$ значение $t\to 2$. Тогда $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-16}{\sqrt{x}-2}=\lim\limits_{t\to 2}\dfrac{t^4-16}{t-2}=\lim\limits_{t\to 2}\dfrac{(t^2-4)(t^2+4)}{t-2}=$ $=\lim\limits_{t\to 2}\dfrac{(t-2)(t+2)(t^2+4)}{t-2}=$ $=\lim\limits_{t\to 2}(t+2)(t^2+4)=(2+2)(2^2+4)=32$
в) если под знаком предела стоят тригонометрические или обратные тригонометрические функции, то такие пределы приводят к первому замечательному пределу или к его вариациям: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1;\quad \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x}{x}=1;$ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}=1;\quad \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg} x}{x}=1.$	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x\cdot\cos 2x\cdot\operatorname{arctg} 3x}{\operatorname{tg} 7x\cdot\arcsin 4x}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=$ $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\dfrac{\sin 5x}{5x}\right)\cdot 5x\cdot\cos 2x\cdot\left(\dfrac{\operatorname{arctg} 3x}{3x}\right)\cdot 3x}{\left(\dfrac{\operatorname{tg} 7x}{7x}\right)\cdot 7x\cdot\left(\dfrac{\arcsin 4x}{4x}\right)\cdot 4x}.$ Сокращаем числитель и знаменатель на переменные, стоящие за скобками. Учитывая, что $\lim\limits_{x\to 0}\cos 2x=1$, и воспользовавшись первым замечательным пределом и его вариациями, получаем, что искомый предел равен: $\dfrac{1\cdot 5\cdot 1\cdot 1\cdot 3}{1\cdot 7\cdot 1\cdot 4}=\dfrac{15}{28}.$

Вопросы для контроля

1. Дайте определение предела функции в точке. Сформулируйте и докажите основные теоремы о пределе.
2. Дайте определение бесконечно малой функции при $x\to a$. Сформулируйте и докажите свойства бесконечно малых функций.
3. Сформулируйте и докажите теорему о единственности предела функции.
4. Сформулируйте и докажите свойство предела промежуточной функции.
5. Дайте определения правостороннего и левостороннего пределов функции $f(x)$ в точке a.

6. Сформулируйте и обоснуйте критерий существования предела.
7. Сформулируйте определение непрерывной функции.
Сформулируйте и обоснуйте свойства суммы, произведения и частного непрерывных в точке a функций.
8. Сформулируйте и проиллюстрируйте на примерах другие свойства непрерывных функций.
9. В каком случае точка a называется точкой разрыва функции $f(x)$? Проиллюстрируйте это понятие на графиках функций.
10. Дайте определение предела функции на бесконечности и бесконечного предела функции. Приведите примеры.
11. Дайте определение предела последовательности. Приведите примеры.
12. Докажите, что $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$.
13. Пользуясь таблицей 13, предложите план вычисления следующих пределов:
а) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2x^3+x}{x^3+2}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^3+x}{x^3+2}$; в) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^3-1}$; г) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{\sqrt{x}-1}$; д) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\operatorname{tg} 5x}$.
Вычислите эти пределы.

Упражнения

1. Пользуясь определением предела функции, докажите справедливость равенства:
1) $\lim\limits_{x\to 1}(4x-1)=3$; 2) $\lim\limits_{x\to 4}(8-2x)=0$;
3) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{4x^2-36}{4x-12}=6$; 4) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x-2}=-1$.
2. Пользуясь определением предела последовательности, докажите справедливость равенства:
1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{8n+7}{2n}=4$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{9n-5}{3n}=3$.
3. Пользуясь теоремами о пределах, докажите, что:
1) многочлен $P(x)$ является непрерывной функцией при всех значениях x;
2) рациональная функция непрерывна при всех значениях x, для которых ее знаменатель не равен нулю.
4. В каких точках имеет разрыв функция (ответ обоснуйте):
1) $f(x)=\frac{1}{x+3}$; 2) $g(x)=\frac{1}{x^2-4}$; 3) $\varphi(x)=\frac{x^2-5x+6}{x-2}$; 4) $\psi(x)=\frac{x+2}{x^2+2x-3}$?
5. Вычислите предел:
1) $\lim\limits_{x\to 3}(x^2-5x+3)$; 2) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x^2+2x+1}{x-3}$; 3) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{3x^2+7x-1}{x^3+4x^2-2x+1}$;
4) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{2x^3-7x^2+5x-2}{4x^2+6x-8}$; 5) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-x-6}{x-3}$; 6) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^2-x-2}{x+1}$;

7) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2-\sqrt{x}}{4-x}$; 8) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{\sqrt{x}-\sqrt{2}}$; 9) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$;

10) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{5-x}-2}{\sqrt{2-x}-1}$; 11) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x}$; 12) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+2}{2\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{x+7}}$;

13) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax}{\sin bx}$; 14) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\frac{x}{2}\cdot\sin 4x}{2x^2}$; 15) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x\cdot\cos x}{\operatorname{arctg} 4x}$;

16) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} 7x\cdot\arcsin 2x}{\sin 3x\cdot\sin 5x}$.

6. Решите неравенство методом интервалов:

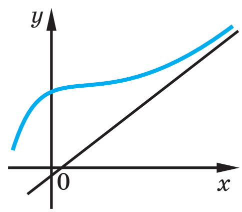
1) $\dfrac{x^2-2x+1}{(2-x)x}\leqslant 0$; 2) $\dfrac{x^3+2x^2-3x}{(x-1)(x-2)}\leqslant 0$; 3) $\dfrac{x^2-x-6}{\sqrt{12+x-x^2}}\geqslant 0$;

4) $\dfrac{x^2+x-12}{\sqrt{x^2+x-6}}\leqslant 0$; 5) $\sqrt{x^2-3x-4}>x-2$; 6) $\sqrt{x^2-5x+4}>x-3$;

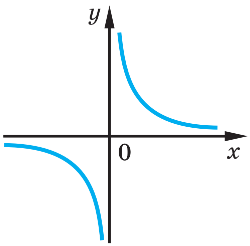
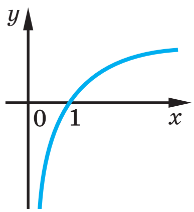
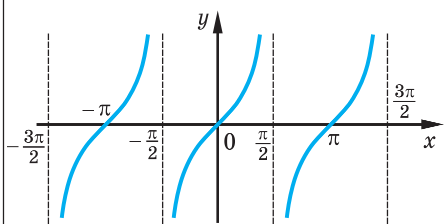
7) $\sqrt{x+2}-\sqrt{x-1}>1$; 8) $\sqrt{x+2}-\sqrt{3-x}<3$.

§8 АСИМПТОТЫ ГРАФИКА ФУНКЦИИ

Таблица 14

<table>
<tr><td colspan="2">1. Определение и иллюстрация</td></tr>
<tr><td>***Асимптота кривой* — это прямая, к которой неограниченно приближается кривая при ее удалении в бесконечность.**</td><td>
</td></tr>
<tr><td colspan="2">2. Вертикальные асимптоты ($x = a$) графика функции $y = f(x)$</td></tr>
<tr><td>**$x = a$ — вертикальная асимптота, если при $x \to a$ $f(x) \to \infty$**</td><td>Вертикальная асимптота $x = a$ может быть в точке a, если точка a ограничивает открытые (или полуоткрытые) промежутки области определения данной функции и вблизи точки a значения функции стремятся к бесконечности.</td></tr>
</table>

Продолж. табл. 14

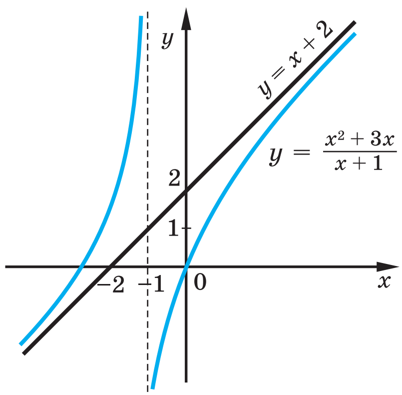
Примеры вертикальных асимптот графиков функций		
$\boldsymbol{y=\frac{1}{x}}$	$\boldsymbol{y=\ln x}$	$\boldsymbol{y=\operatorname{tg} x}$
$D(y)=(-\infty;0)\cup(0;\infty)$. При $x\to+0$ $y\to+\infty$; при $x\to-0$ $y\to-\infty$. $\boldsymbol{x=0}$ **— вертикальная асимптота** (*также* $y=0$ — *горизонтальная асимптота*) 	$D(y)=(0;\infty)$. При $x\to+0$ $y\to-\infty$. $\boldsymbol{x=0}$ **—** **вертикальная асимптота** 	$D(y)$: $x\neq\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in\boldsymbol{Z}$. При $x\to\frac{\pi}{2}-0$ $y\to+\infty$; при $x\to\frac{\pi}{2}+0$ $y\to-\infty$. $\boldsymbol{x=\frac{\pi}{2}}$ **— вертикальная асимптота** $\left(x=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in\boldsymbol{Z}\right)$ 

3. Наклонные и горизонтальные асимптоты ($\boldsymbol{y=kx+b}$)

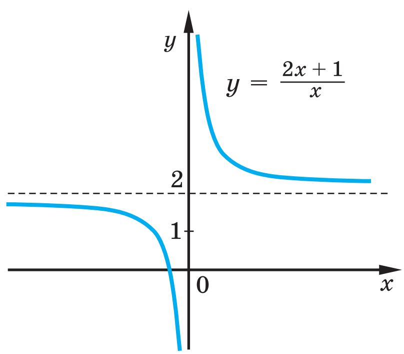
I. *Если $f(x)$ — дробно-рациональная функция, у которой степень числителя на единицу больше степени знаменателя (или равна ей), то выделяем целую часть дроби и используем определение асимптоты*

Примеры

$$f(x)=\frac{x^2+3x}{x+1}=x+2-\frac{2}{x+1}.$$



$$f(x)=\frac{2x+1}{x}=2+\frac{1}{x}.$$



Продолж. табл. 14

При $x \to \infty$ $\frac{2}{x+1} \to 0$, тогда $f(x) \to x+2$. Следовательно, $y = x + 2$ — наклонная асимптота (также $x = -1$ — вертикальная асимптота)	При $x \to \infty$ $\frac{1}{x} \to 0$, тогда $f(x) \to 2$. Следовательно, $y = 2$ — горизонтальная асимптота (также $x = 0$ — вертикальная асимптота)
II. В общем случае уравнения наклонных и горизонтальных асимптот $y = kx + b$ можно получить с использованием формул: $k = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$ $\quad$ $b = \lim\limits_{x\to\infty} (f(x) - kx)$	

Объяснение и обоснование

1. Определение асимптоты. Если кривая $y = f(x)$ имеет бесконечную ветвь, то асимптотой такой кривой называется прямая, к которой эта ветвь неограниченно приближается.

Другими словами, ***асимптота кривой* — это прямая, к которой неограниченно приближается кривая при ее удалении в бесконечность.**

Асимптоты могут быть вертикальными, горизонтальными или наклонными.

Например, для графика функции $y = \frac{1}{x}$ (рис. 75) асимптотами будут оси координат, поскольку при $x \to -\infty$ и при $x \to +\infty$ график функции приближается к прямой $y = 0$: ось Ox — это *горизонтальная асимптота*.

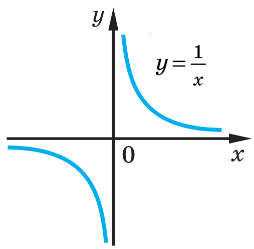


Рис. 75

А когда функция стремится к $+\infty$ (или к $-\infty$), то кривая приближается к прямой $x = 0$: ось Oy — это *вертикальная асимптота*.

Если рассмотреть функцию $y = x + \frac{1}{x}$, то при $x \to \infty$ выражение $\frac{1}{x} \to 0$. Вследствие этого график функции $y = x + \frac{1}{x}$ при $x \to \infty$ приближается к прямой $y = x$. Поэтому эта прямая будет *наклонной асимптотой* графика функции $y = x + \frac{1}{x}$ (рис. 76) (график этой функции имеет также и вертикальную асимптоту $x = 0$).

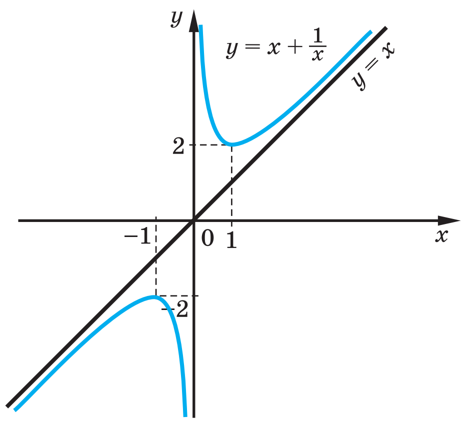


Рис. 76

2. Вертикальные асимптоты. Если прямая $x = a$ — вертикальная асимптота, то по определению около точки a кривая должна иметь бесконечную ветвь, то есть предел данной функции при $x \to a$ (слева или справа) должен равняться бесконечности (∞). Исходя из непрерывности элементарных функций, которые рассматривались в школьном курсе математики, такими точками могут быть только точки, ограничивающие открытые (или полуоткрытые) промежутки области определения данной функции.

Например, у функции $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$ область определения ($x \neq 1$) имеет разрыв в точке $x = 1$ (область определения: $(-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$ и точка 1 ограничивает открытые промежутки области определения). Поэтому можно предположить, что прямая $x = 1$ будет вертикальной асимптотой. Для того чтобы убедиться в этом, необходимо проверить, что функция будет стремиться к бесконечности около точки 1 (слева или справа). Для этого рассмотрим

$$\lim_{x \to 1+0} f(x) = \lim_{x \to 1+0} \frac{x^2}{x-1} = \left(\frac{1}{+0}\right) = +\infty. \text{ Аналогично } \lim_{x \to 1-0} f(x) = \left(\frac{1}{-0}\right) = -\infty.$$

Таким образом, прямая $x = 1$ является вертикальной асимптотой, поскольку при стремлении функции к бесконечности ее график неограниченно приближается к прямой $x = 1$ (рис. 77).

Отметим, что не всегда в точке разрыва области определения функция будет иметь вертикальную асимптоту. Например, функция $f(x) = \dfrac{x^2}{x}$ имеет область определения $x \neq 0$. Поэтому прямая $x = 0$ «подозрительна» на вертикальную асимптоту. Но $\lim\limits_{x \to -0} f(x) = \lim\limits_{x \to -0} \dfrac{x^2}{x} = \lim\limits_{x \to -0} x = 0$. Аналогично $\lim\limits_{x \to +0} f(x) = 0$. Следовательно, около прямой $x = 0$ функция $f(x)$ не стремится к бесконечности, и поэтому прямая $x = 0$ не является асимптотой графика данной функции (рис. 78).

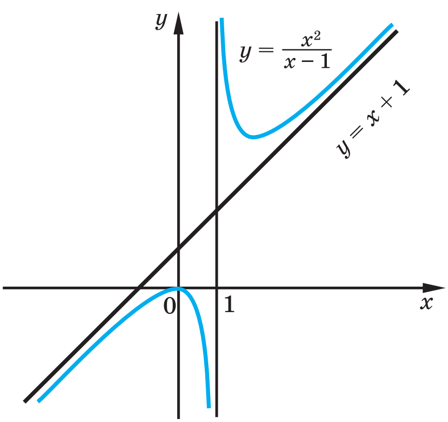


Рис. 77

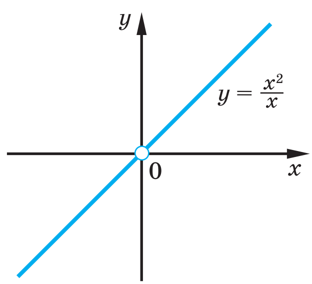


Рис. 78

3. Наклонные и горизонтальные асимптоты довольно просто находятся для графиков дробно-рациональных функций, у которых степень числителя на единицу больше степени знаменателя (или равна степени знаменателя). Для этого достаточно выделить целую часть заданной дроби и использовать определение асимптоты.

Например, еще раз рассмотрим функцию $f(x)=\frac{x^2}{x-1}$.

Выделим целую часть: $f(x)=\frac{(x^2-1)+1}{x-1}=x+1+\frac{1}{x-1}$.

При $x \to \infty$ выражение $\frac{1}{x-1}\to 0$, то есть график нашей функции будет неограниченно приближаться к прямой $y = x + 1$ при $x \to \infty$. Из этого следует, что наклонной асимптотой графика данной функции* будет прямая $y = x + 1$ (см. рис. 77).

Рассмотрим, как находятся наклонные и горизонтальные асимптоты в общем случае.

Пусть наклонной (или горизонтальной) асимптотой графика функции $y = f(x)$ является прямая $y = kx + b$. По определению асимптоты при $x \to \infty$ график функции $f(x)$ неограниченно приближается к прямой $y = kx + b$. Другими словами, при $x \to \infty$ с любой точностью будет выполняться равенство

$$f(x) \approx kx + b. \tag{1}$$

Эта равенство не нарушится, если обе его части разделить на $x \neq 0$. Получим: $\frac{f(x)}{x}\approx k+\frac{b}{x}$.

При $x \to \infty$ отношение $\frac{b}{x}\to 0$, поэтому отношение $\frac{f(x)}{x}\to k$ при $x \to \infty$. То есть

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}. \tag{2}$$

Возвращаясь к формуле (1), получаем, что при $x \to \infty$ $b \approx f(x) - kx$, то есть

$$b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-kx). \tag{3}$$

Полученные формулы (2) и (3) дают возможность находить наклонные и горизонтальные асимптоты для графика любой функции $y = f(x)$ (при условии, что они существуют).

З а м е ч а н и е. Если у графика функции $f(x)$ есть горизонтальная асимптота, то ее уравнение будет $y = b$ (в этом случае $k = 0$). Но при $k = 0$ из формулы (3) получаем $b=\lim_{x\to\infty} f(x)$. Следовательно, *если существует число $b=\lim_{x\to\infty} f(x)$, то график функции $y = f(x)$ имеет горизонтальную асимптоту $y = b$.*

---

* Построение графиков таких функций рассмотрено в § 6.

Задача 1 Пользуясь общими формулами, найдите наклонную асимптоту графика функции $f(x)=\dfrac{x^2}{x-1}$.

Р е ш е н и е. ▶ Будем искать наклонную асимптоту в виде $y = kx + b$, где k и b находятся по формулам (2) и (3):

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{(x-1)x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1-\frac{1}{x}}=\frac{1}{1-0}=1;$$

$$b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x-1}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1-\frac{1}{x}}=\frac{1}{1-0}=1.$$

Асимптотой графика данной функции будет прямая $y = kx + b$, то есть прямая $y = x + 1$. ◁

Задача 2 Найдите асимптоты графика функции $f(x)=\sqrt{x^4+9}-x^2$.

Р е ш е н и е. ▶ Область определения функции: x — любое действительное число. То есть $D(f)=(-\infty;+\infty)$ (или $D(f)=\boldsymbol{R}$). На всей области определения эта функция непрерывна, поэтому вертикальных асимптот график функции не имеет. Будем искать наклонные и горизонтальные асимптоты в виде $y = kx + b$. Тогда

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^4+9}-x^2}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^4+9}-x^2\right)\left(\sqrt{x^4+9}+x^2\right)}{x\left(\sqrt{x^4+9}+x^2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^4+9-x^4}{x\left(\sqrt{x^4+9}+x^2\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{9}{x\left(\sqrt{x^4+9}+x^2\right)}=0;$$

$$b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^4+9}-x^2\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^4+9}-x^2\right)\left(\sqrt{x^4+9}+x^2\right)}{\sqrt{x^4+9}+x^2}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^4+9-x^4}{\sqrt{x^4+9}+x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{9}{\sqrt{x^4+9}+x^2}=0.$$

Поэтому заданная функция имеет только горизонтальную асимптоту $y = 0$ ($y = 0\cdot x + 0$) (рис. 79). ◁

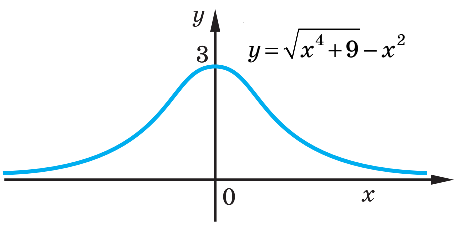


Рис. 79

Отметим, что иногда график функции $y = f(x)$ может иметь разные асимптоты при $x\to-\infty$ и при $x\to+\infty$. Поэтому при использовании формул (2) и (3) иногда приходится отдельно находить значения k и b при $x\to-\infty$ и при $x\to+\infty$.

Вопросы для контроля

1. Объясните смысл понятия асимптота кривой.
2. Приведите примеры графиков функций, имеющих вертикальные, горизонтальные и наклонные асимптоты. Объясните, почему соответствующие прямые являются асимптотами.
3. Обоснуйте формулы для нахождения коэффициентов горизонтальных и наклонных асимптот ($y = kx + b$) графика функции $y = f(x)$:

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x},\quad b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-kx).$$

Упражнения

Найдите асимптоты графиков функций (если они существуют) **(1–4)**.

1. 1) $y=\frac{3}{x}$; 2) $y=4-\frac{1}{x-3}$; 3) $y=\frac{x^2-9}{x-3}$; 4) $y=\frac{x+1}{x-1}$.

2. 1) $f(x)=\frac{2x^2+1}{x}$; 2) $f(x)=\frac{x^2}{x-3}$; 3) $f(x)=\frac{x^2-1}{x+2}$; 4) $f(x)=\frac{x^3+1}{x^2+2}$.

3. 1) $f(x)=\frac{1}{x^2}$; 2) $f(x)=\frac{1}{x^2+1}$; 3) $f(x)=\frac{3x^2+5}{x^2}$; 4) $f(x)=\frac{x^2-4}{x^2+4}$.

4. 1) $y=\frac{\sqrt{1+x^2}}{x+1}$; 2) $y=\sqrt{x^2+3x+2}$; 3) $y=\frac{x\sqrt{x}}{x^2+1}$; 4) $y=\frac{x}{\sqrt{x^2+x}}$.

§9 ПРОИЗВОДНЫЕ ОБРАТНЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТОЖДЕСТВ С ПОМОЩЬЮ ПРОИЗВОДНОЙ

Таблица 15

1. Формулы производных обратных тригонометрических функций	
$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ -1<x<1$	$(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ -1<x<1$
$(\operatorname{arctg} x)'=\frac{1}{1+x^2}$	$(\operatorname{arcctg} x)'=-\frac{1}{1+x^2}$

Продолж. табл. 15

<table>
<tr><td colspan="2">2. Доказательство тождеств с помощью производной</td></tr>
<tr><td colspan="2">Условие постоянства функции</td></tr>
<tr><td colspan="2">Функция $f(x)$ является постоянной ($f(x) = C$) на интервале $(a; b)$ тогда и только тогда, когда $f'(x) = 0$ во всех точках этого интервала (а если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, то $f(x) = C$ на $[a; b]$).</td></tr>
<tr><td>Схема доказательства тождеств вида $\varphi(x) = g(x)$ с помощью производной</td><td>Пример
Доказать, что $\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$ при $-1 \leqslant x \leqslant 1$.</td></tr>
<tr><td>1. Рассмотреть вспомогательную функцию $f(x) = \varphi(x) - g(x)$ (на ее области определения или на заданном интервале).
2. Проверить, что $f'(x) = 0$ на этом интервале.
3. Исходя из условия постоянства функции, сделать вывод, что функция $f(x) = C$ на рассматриваемом интервале.
4. Чтобы найти постоянную C, нужно подставить вместо x любое значение x_0 из рассматриваемого интервала и доказать, что $C = f(x_0) = 0$.
5. Сделать следующий вывод: поскольку $f(x) = \varphi(x) - g(x) = 0$, то $\varphi(x) = g(x)$.</td><td>▶ Рассмотрим функцию
$$f(x) = \arccos x - \frac{\pi}{2} + \arcsin x.$$
Ее область определения $D(f) = [-1; 1]$.
На интервале $(-1; 1)$
$$f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - 0 + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0.$$
Тогда по условию постоянства функции получаем, что $f(x) = C$ при всех значениях x из интервала $(-1; 1)$, а с учетом того, что функция $f(x)$ непрерывна на своей области определения, и при всех значениях x из отрезка $[-1; 1]$. Чтобы найти значение C, подставим в равенство $f(x) = C$ вместо x, например, значение $x = 0$. Получаем:
$$C = f(0) = \arccos 0 - \frac{\pi}{2} + \arcsin 0 = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} + 0 = 0.$$
Значит, при всех значениях x из отрезка $[-1; 1]$ $f(x) = \arccos x - \frac{\pi}{2} + \arcsin x = 0$.
Отсюда $\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$ при $-1 \leqslant x \leqslant 1$. ◁</td></tr>
</table>

Объяснение и обоснование

1. Формулы производных обратных тригонометрических функций докажем, используя определение этих функций (существование их производных примем без доказательства).

● Например, если $y = \arcsin x$, то по определению арксинуса $y \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ и $\sin y = x$. Продифференцируем обе части этого равенства, рассматривая производную $\sin y$ как производную сложной функции. Получаем $(\sin y)' = x'$, то есть $\cos y \cdot y' = 1$. Отсюда $y' = \dfrac{1}{\cos y}$. Но $\cos y = \pm\sqrt{1-\sin^2 y} = \pm\sqrt{1-x^2}$. Учитывая, что $y \in \left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$, где $\cos y \geqslant 0$, получаем $\cos y = \sqrt{1-x^2}$. Тогда при $-1 < x < 1$ (в этом случае $1 - x^2 \neq 0$ и $1 - x^2 > 0$) имеем $y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Поэтому при $-1 < x < 1$

$$\mathbf{(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}.$$

Аналогично если $y = \arccos x$, то по определению арккосинуса $y \in [0; \pi]$ и $\cos y = x$. Продифференцируем обе части этого равенства, рассматривая производную $\cos y$ как производную сложной функции. Получаем $(\cos y)' = x'$, то есть $(-\sin y) \cdot y' = 1$. Отсюда $y' = -\dfrac{1}{\sin y}$. Но $\sin y = \pm\sqrt{1-\cos^2 y} = \pm\sqrt{1-x^2}$. Учитывая, что $y \in [0; \pi]$, где $\sin y \geqslant 0$, получаем $\sin y = \sqrt{1-x^2}$. Тогда при $-1 < x < 1$ (в этом случае $1 - x^2 \neq 0$ и $1 - x^2 > 0$) имеем $y' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Поэтому при $-1 < x < 1$

$$\mathbf{(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}.$$

Найдем производную функции $y = \operatorname{arctg} x$. По определению арктангенса $y \in \left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$ и $\operatorname{tg} y = x$. После дифференцирования последнего равенства получаем $(\operatorname{tg} y)' = x'$, то есть $\dfrac{1}{\cos^2 y} \cdot y' = 1$. Отсюда $y' = \cos^2 y$. Но $1 + \operatorname{tg}^2 y = \dfrac{1}{\cos^2 y}$, тогда $\cos^2 y = \dfrac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y} = \dfrac{1}{1+x^2}$.

Следовательно, при любых значениях x

$$\mathbf{(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}}.$$

Аналогично если $y = \operatorname{arcctg} x$, то по определению арккотангенса $y \in (0; \pi)$ и $\operatorname{ctg} y = x$. После дифференцирования последнего равенства получаем $(\operatorname{ctg} y)' = x'$, то есть $-\dfrac{1}{\sin^2 y} \cdot y' = 1$. Отсюда $y' = -\sin^2 y$. Но $1 + \operatorname{ctg}^2 y = \dfrac{1}{\sin^2 y}$, тогда $\sin^2 y = \dfrac{1}{1+\operatorname{ctg}^2 y} = \dfrac{1}{1+x^2}$.

Следовательно, при любых значениях x

$$\mathbf{(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}}.$$

2. Доказательства тождеств с помощью производной. В пункте 6.1 рассмотрено условие постоянства функции: если на некотором интервале $(a;\ b)$ $f'(x)=0$ во всех точках этого интервала, то функция $f(x)$ постоянна на этом интервале. Если функция $f(x)$ также непрерывна на отрезке $[a;\ b]$, то она постоянна и на отрезке $[a;\ b]$.

Это условие можно использовать для доказательства некоторых тождеств.

Задача 1 Докажите тождество $2\arccos x=\arccos(2x^2-1)$, где $0\leqslant x\leqslant 1$.

Решение. ▶ Рассмотрим вспомогательную функцию
$f(x)=2\arccos x-\arccos(2x^2-1)$ и найдем ее производную при $0<x<1$:

$$f'(x)=-\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{4x}{\sqrt{1-(2x^2-1)^2}}=-\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{4x}{2x\sqrt{1-x^2}}=-\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}=0.$$

По условию постоянства функции получаем, что $f(x)=C$ при всех значениях x из интервала $(0;\ 1)$, а учитывая, что функция $f(x)$ непрерывна на своей области определения, — и при всех x из отрезка $[0;\ 1]$. Чтобы найти C, отметим, что равенство $f(x)=C$ выполняется тождественно, то есть при любом значении x. Подставляя в это равенство $x=0$, получаем

$C=f(0)=2\arccos 0-\arccos(-1)=2\cdot\frac{\pi}{2}-\pi=0$. Поэтому $C=0$ и, значит, $f(x)=0$, то есть $2\arccos x-\arccos(2x^2-1)=0$ или $2\arccos x=\arccos(2x^2-1)$. ◁

Приведенное решение позволяет предложить следующую *схему доказательства тождеств вида $\varphi(x)=g(x)$ с помощью производной.*

1. *Рассмотреть вспомогательную функцию $f(x)=\varphi(x)-g(x)$ (на ее области определения или на заданном интервале).*
2. *Проверить, что $f'(x)=0$ на этом интервале.*
3. *Пользуясь признаком постоянства функции, сделать вывод, что $f(x)=C$ на рассмотренном интервале (если функция $f(x)$ также непрерывна на отрезке, содержащем концы рассмотренного интервала, то $f(x)=C$ на этом отрезке).*
4. *Чтобы найти C, подставляем вместо x любое значение x_0 из рассмотренного промежутка и доказываем, что $C=f(x_0)=0$.*
5. *Сделать вывод: поскольку $f(x)=\varphi(x)-g(x)=0$, то $\varphi(x)=g(x)$.*

Пример использования этой схемы приведен в пункте 2 таблицы 15 на с. 138.

Вопросы для контроля

1. Запишите формулы нахождения производных обратных тригонометрических функций: $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arcctg} x$.
2. Обоснуйте формулы нахождения производных обратных тригонометрических функций.
3. Объясните на примере схему использования производной для доказательства тождеств.

Упражнения

1. Найдите производную функции:

1) $f(x) = \arcsin x \cdot \operatorname{arctg} x$; 2) $f(x) = \operatorname{arcctg}^2 x$; 3) $f(x) = x^4 \arcsin 2x$;

4) $f(x) = \arcsin 3x + \arccos 4x$; 5) $f(x) = \arcsin(\sin x)$; 6) $f(x) = \sqrt{\operatorname{arctg} x^3}$.

2. Запишите уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0, если:

1) $f(x) = \operatorname{arctg} x$, $x_0 = 1$; 2) $f(x) = \arcsin 2x$, $x_0 = \frac{1}{4}$.

3. Докажите тождество, используя производную:

1) $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}$; 2) $\arccos x = \pi + \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ при $-1 \leqslant x < 0$;

3) $\arccos x = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$, $0 < x \leqslant 1$; 4) $\arcsin x = \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, $-1 < x < 1$;

5) $2 \operatorname{arctg} x = \operatorname{arctg} \frac{2x}{1-x^2}$, $-1 < x < 1$; 6) $2 \operatorname{arctg} x + \arcsin \frac{2x}{1+x^2} = \pi$, $x \geqslant 1$;

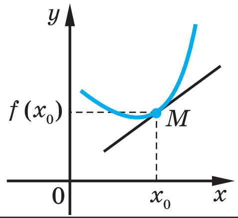
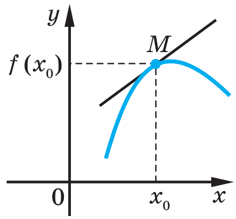
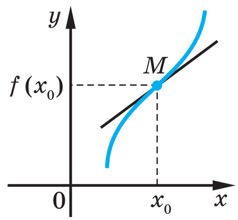
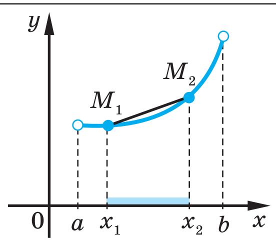
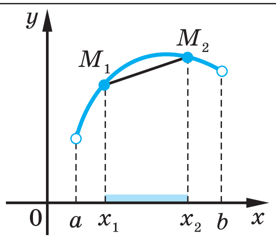
7) $(x + a)^4 = x^4 + 4x^3a + 6x^2a^2 + 4xa^3 + a^4$.

§ 10 ВТОРАЯ ПРОИЗВОДНАЯ. ПРОИЗВОДНЫЕ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ. ПОНЯТИЕ ВЫПУКЛОСТИ ФУНКЦИИ

Таблица 16

1. Понятие второй производной		
Понятие	Запись	Пример
Пусть функция $y = f(x)$ имеет производную $f'(x)$ во всех точках некоторого промежутка. Эта производная, в свою очередь, является функцией аргумента x. Если функция $f'(x)$ дифференцируема, то ее производную называют *второй производной* функции $f(x)$ и обозначают $f''(x)$ (или y'')	$y = f(x)$, $y' = f'(x)$, $y'' = (f'(x))' = (y')'$.	$y = x^5$, $y' = 5x^4$, $y'' = (5x^4)' = 20x^3$.

Продолж. табл. 16

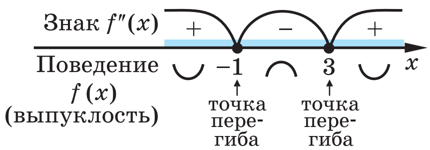
<table>
<tr><td colspan="2">2. Понятие выпуклости и точек перегиба дифференцируемой на интервале $(a; b)$ функции</td></tr>
<tr><td></td><td>Функция $f(x)$ называется выпуклой вниз на интервале $(a; b)$, если для любой точки x_0 из этого интервала при всех $x \in (a; b)$ и $x \neq x_0$ график функции лежит выше касательной к этому графику в точке $(x_0; f(x_0))$.</td></tr>
<tr><td></td><td>Функция $f(x)$ называется выпуклой вверх на интервале $(a; b)$, если для любой точки x_0 из этого интервала при всех $x \in (a; b)$ и $x \neq x_0$ график функции лежит ниже касательной к этому графику в точке $(x_0; f(x_0))$.</td></tr>
<tr><td></td><td>Точка M графика непрерывной функции $f(x)$, в которой существует касательная и при переходе через которую кривая меняет направление выпуклости, называется точкой перегиба графика функции. В точке перегиба график функции переходит с одной стороны касательной на другую.
Абсциссу x_0 точки M перегиба графика функции $f(x)$ называют точкой перегиба функции $f(x)$. Точка x_0 разделяет интервалы выпуклости функции.</td></tr>
<tr><td colspan="2">3. Свойство графиков выпуклых функций</td></tr>
<tr><td></td><td>Если функция $f(x)$ выпукла вниз на интервале $(a; b)$ и точки M_1 и M_2 являются точками ее графика на этом интервале, то на интервале $(x_1; x_2)$ график функции $y = f(x)$ лежит ниже отрезка M_1M_2, то есть график лежит ниже хорды.</td></tr>
<tr><td></td><td>Если функция $f(x)$ выпукла вверх на интервале $(a; b)$ и точки M_1 и M_2 являются точками ее графика на этом интервале, то на интервале $(x_1; x_2)$ график функции $y = f(x)$ лежит выше отрезка M_1M_2, то есть график лежит выше хорды.</td></tr>
</table>

Продолж. табл. 16

<table>
<tr><td colspan="4">4. Достаточные условия выпуклости функции,
имеющей вторую производную на заданном интервале $(a; b)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Условие выпуклости вниз</td><td colspan="2">Условие выпуклости вверх</td></tr>
<tr><td colspan="2">Если на интервале $(a; b)$ дважды дифференцируемая функция $f(x)$ имеет положительную вторую производную (то есть $f''(x) > 0$ при всех $x \in (a; b)$), то ее график на интервале $(a; b)$ направлен выпуклостью вниз.</td><td colspan="2">Если на интервале $(a; b)$ дважды дифференцируемая функция $f(x)$ имеет отрицательную вторую производную (то есть $f''(x) < 0$ при всех $x \in (a; b)$), то ее график на интервале $(a; b)$ направлен выпуклостью вверх.</td></tr>
<tr><td colspan="4">5. Нахождение точек перегиба функции,
имеющей вторую производную на заданном интервале</td></tr>
<tr><td colspan="2">Необходимое условие</td><td colspan="2">Достаточное условие</td></tr>
<tr><td colspan="2">В точках перегиба функции $f(x)$ ее вторая производная равна нулю или не существует.</td><td colspan="2">Пусть функция $f(x)$ имеет на интервале $(a; b)$ вторую производную. Тогда, если $f''(x)$ меняет знак при переходе через x_0, где $x_0 \in (a; b)$, то x_0 — точка перегиба функции $f(x)$.</td></tr>
<tr><td>x_0 — точка перегиба функции $f(x)$ $\Rightarrow$</td><td>$f''(x_0) = 0$ или $f''(x_0)$ не существует</td><td>В точке x_0 знак $f''(x)$ меняется с «+» на «−» или с «−» на «+» $\Rightarrow$</td><td>x_0 — точка перегиба функции $f(x)$</td></tr>
</table>

6. Исследование функции $y = f(x)$ на выпуклость и точки перегиба	
Схема	Пример
1. Найти область определения функции.	Исследовать функцию $f(x) = x^4 - 4x^3 - 18x^2 + 1$ на выпуклость и точки перегиба. ▶ 1. Область определения: $D(f) = \boldsymbol{R}$. Функция $f(x)$ непрерывна в каждой точке своей области определения (как многочлен).
2. Найти вторую производную.	2. $f'(x) = 4x^3 - 12x^2 - 36x$. $f''(x) = 12x^2 - 24x - 36 = 12(x^2 - 2x - 3)$.
3. Найти внутренние точки области определения, в которых вторая производная равна нулю или не существует.	3. $f''(x)$ существует и непрерывна на всей области определения функции $f(x)$. $f''(x) = 0$; $12(x^2 - 2x - 3) = 0$; $x_1 = -1$, $x_2 = 3$.

Продолж. табл. 16

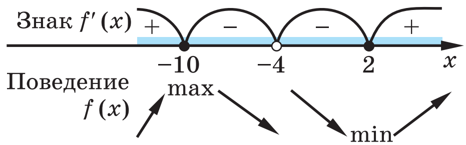
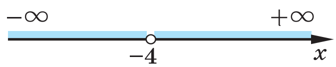
4. Отметить полученные точки на области определения функции, найти знак второй производной и характер поведения функции на каждом из интервалов, на которые разбивается область определения.	4. 
5. Записать нужный результат исследования (интервалы и характер выпуклости и точки перегиба).	5. На интервалах $(-\infty; -1)$ и $(3; +\infty)$ график функции направлен выпуклостью вниз ($f''(x) > 0$), а на интервале $(-1; 3)$ — выпуклостью вверх ($f''(x) < 0$). Точки перегиба: $x = -1$ и $x = 3$ (в этих точках $f''(x)$ меняет знак). ◁

7. Расширенная схема исследования функции для построения ее графика

Схема	Пример
1. Найти область определения функции.	Постройте график функции $f(x) = \frac{x^2 - 5x}{x + 4}$. ▶ 1. Область определения: $x \neq -4$. (то есть $D(f) = (-\infty; -4) \cup (-4; +\infty)$).
2. Выяснить, является ли функция четной или нечетной (или периодической*).	2. Функция $f(x)$ ни четная, ни нечетная, поскольку $f(-x) \neq f(x)$ и $f(-x) \neq -f(x)$, и не периодическая.
3. Точки пересечения графика с осями координат (если их можно найти).	3. На оси Oy значение $x = 0$, тогда $y = 0$. На оси Ox значение $y = 0$: $\frac{x^2 - 5x}{x + 4} = 0$, $x^2 - 5x = 0$, $x(x - 5) = 0$. Тогда $x = 0$, $x = 5$ — абсциссы точек пересечения графика с осью Ox.
4. Производная и критические точки функции.	4. $f'(x) = \frac{(2x - 5)(x + 4) - (x^2 - 5x)}{(x + 4)^2} = \frac{x^2 + 8x - 20}{(x + 4)^2}$. Производная существует на всей области определения функции $f(x)$. Поэтому функция $f(x)$ непрерывна в каждой точке своей области определения. $f'(x) = 0$. При $x \neq -4$ имеем $x^2 + 8x - 20 = 0$, $x_1 = 2$, $x_2 = -10$ — критические точки.

* Чаще всего периодичность устанавливают для тригонометрических функций. В рассмотренном примере функция не может быть периодической, так как ограничения области определения не повторяются.

Продолж. табл. 16

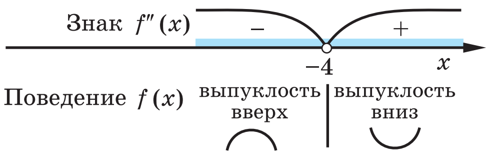
5. Промежутки возрастания и убывания, точки экстремума (и значения функции в этих точках).	5. Отметим критические точки на области определения и найдем знак производной и характер поведения функции на каждом из интервалов, на которые разбивается область определения (см. рисунок).  Следовательно, функция возрастает на каждом из промежутков $(-\infty; -10]$ и $[2; +\infty)$ и убывает на промежутках $[-10; -4)$ и $(-4; 2]$. Так как в критической точке (-10) производная меняет знак с «+» на «−», то $x = -10$ — точка максимума. В критической точке 2 производная меняет знак с «−» на «+», поэтому $x = 2$ — точка минимума. Итак, $x_{max} = -10$, тогда $y_{max} = f(-10) = -25$; $x_{min} = 2$, тогда $y_{min} = f(2) = -1$.
6. Поведение функции на концах промежутков области определения и асимптоты графика функции (вертикальные, горизонтальные и наклонные).	 При $x \to -4$ слева $f(x) \to \left(\frac{26}{-0}\right) \to -\infty$, а при $x \to -4$ справа $f(x) \to \left(\frac{26}{+0}\right) \to +\infty$ (то есть $\lim\limits_{x \to -4-0} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to -4+0} f(x) = +\infty$). Следовательно, прямая $x = -4$ — *вертикальная асимптота*. Так как $f(x) = \frac{x^2 - 5x}{x+4} = \frac{x(x+4) - 9(x+4) + 36}{x+4} = x - 9 + \frac{36}{x+4}$, то при $x \to \infty$ $\frac{36}{x+4} \to 0$, тогда $f(x) \to x + 9$, то есть прямая $y = x + 9$ — *наклонная асимптота*.

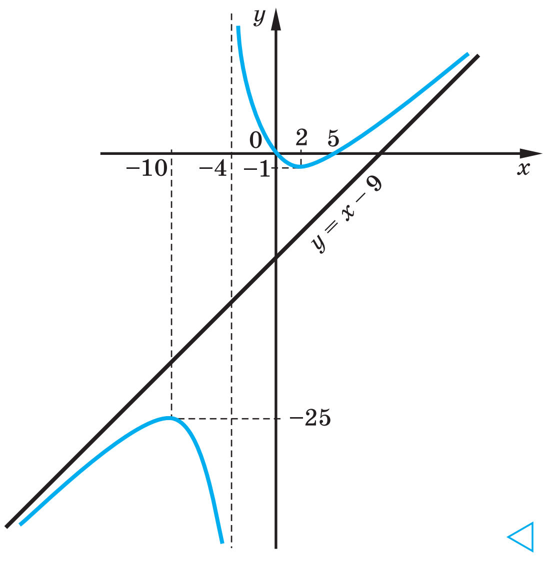
Продолж. табл. 16

<table>
<tr>
<td>7. Вторая производная и исследование функции на выпуклость и точки перегиба (и значения функции в этих точках).</td>
<td>

$$f''(x) = (f'(x))' = \frac{(2x+8)(x+4)^2 - 2(x+4)(x^2+8x-20)}{(x+4)^4} = \frac{72}{(x+4)^3}.$$

Поскольку $f''(x) \neq 0$, то знак второй производной может меняться только в точке $x = -4$. Получаем такие знаки второй производной и соответствующий характер выпуклости (см. рисунок).



</td>
</tr>
<tr>
<td>8. Найти координаты дополнительных точек графика функции (если нужно уточнить его поведение).</td>
<td>
<table>
<tr><td>x</td><td>-7</td><td>-2</td></tr>
<tr><td>y</td><td>-28</td><td>7</td></tr>
</table>
</td>
</tr>
<tr>
<td>9. На основании проведенного исследования построить график функции.</td>
<td>


</td>
</tr>
</table>

Объяснение и обоснование

1. Вторая производная и производные высших порядков. Если функция $y = f(x)$ имеет производную $f'(x)$ во всех точках некоторого промежутка, то эту производную можно рассматривать как функцию от аргумента x. Если функция $f'(x)$ является дифференцируемой, то ее производную называют *второй производной* от $f(x)$ и обозначают $f''(x)$ (или y'').

Например, если $f(x) = 2x - \sin x$, то

$$f'(x) = (2x - \sin x)' = 2 - \cos x, \text{ тогда } f''(x) = (2 - \cos x)' = \sin x.$$

По аналогии со второй производной определяют и производные высших порядков. Производную от второй производной функции $f(x)$ называют *третьей производной*, или *производной третьего порядка* этой функции, и т. д. То есть: *производной n-го порядка функции $f(x)$ называют производную от производной $(n-1)$-го порядка этой функции*. Производную n-го порядка функции $f(x)$ обозначают $f^{(n)}(x)$.

Например, если $f(x) = x^5$, то $f'(x) = (x^5)' = 5x^4$; $f''(x) = (5x^4)' = 20x^3$;
$f'''(x) = (20x^3)' = 60x^2$; $f^{(4)}(x) = (60x^2)' = 120x$; $f^{(5)}(x) = (120x)' = 120$;
$f^{(6)}(x) = (120)' = 0$*.

2. Выпуклость функции. Пусть функция $f(x)$ определена на интервале $(a; b)$, а в точке $x_0 \in (a; b)$ имеет конечную производную. Тогда к графику этой функции в точке $M(x_0; f(x_0))$ можно провести касательную. В зависимости от расположения графика функции относительно касательной функцию называют *выпуклой вниз*, если график расположен выше касательной (рис. 80), или *выпуклой вверх*, если график расположен ниже касательной (рис. 81). Соответственно, и сам график в первом случае называют *выпуклым вниз*, а во втором — *выпуклым вверх*. Приведем соответствующие определения и свойства для функции $f(x)$, определенной и дифференцируемой дважды на интервале $(a; b)$.

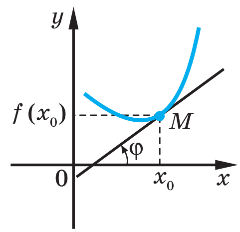


Рис. 80

Функция $f(x)$ называется *выпуклой вниз* на интервале $(a; b)$, если для любой точки x_0 из этого интервала при всех $x \in (a; b)$ и $x \neq x_0$ график функции лежит выше касательной к этому графику в точке $(x_0; f(x_0))$.

Функция $f(x)$ называется *выпуклой вверх* на интервале $(a; b)$, если для любой точки x_0 из этого интервала при всех $x \in (a; b)$ и $x \neq x_0$ график функции лежит ниже касательной к этому графику в точке $(x_0; f(x_0))$.

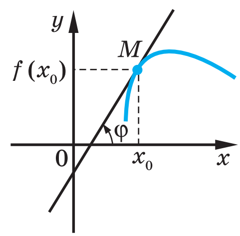


Рис. 81

Отметим, что на интервале, где функция $f(x)$ является выпуклой вниз, ее производная $f'(x)$ возрастает.

* Четвертую, пятую и шестую производные функции $f(x)$ часто обозначают соответственно так: $f^{IV}(x)$, $f^{V}(x)$, $f^{VI}(x)$.

Действительно, как видно из рисунка 80, при возрастании аргумента x величина угла φ, который касательная к графику функции $f(x)$ образует с положительным направлением оси Ox, возрастает, принимая значения между $-\frac{\pi}{2}$ и $\frac{\pi}{2}$. Тогда $\operatorname{tg}\varphi = f'(x)$ также возрастает.

На интервале, где функция $f(x)$ является выпуклой вверх, ее производная $f'(x)$ убывает. Действительно, как видно из рисунка 81, при возрастании аргумента x величина угла φ, который касательная к графику функции $f(x)$ образует с положительным направлением оси Ox, убывает, принимая значения между $\frac{\pi}{2}$ и $-\frac{\pi}{2}$. Тогда $\operatorname{tg}\varphi = f'(x)$ также убывает.

Можно доказать, что имеют место и обратные утверждения.

1. *Если производная* $f'(x)$ *функции* $f(x)$ *возрастает на интервале* $(a; b)$, *то функция* $f(x)$ *является выпуклой вниз на этом интервале.*
2. *Если производная* $f'(x)$ *функции* $f(x)$ *убывает на интервале* $(a; b)$, *то функция* $f(x)$ *является выпуклой вверх на этом интервале.*

Эти свойства позволяют сформулировать *достаточные условия выпуклости функции (и графика функции)*.

1. **Если на интервале $(a; b)$ дважды дифференцируемая функция $f(x)$ имеет положительную вторую производную (то есть $f''(x) > 0$ при всех $x \in (a; b)$), то ее график на интервале $(a; b)$ направлен выпуклостью вниз.**
2. **Если на интервале $(a; b)$ дважды дифференцируемая функция $f(x)$ имеет отрицательную вторую производную (то есть $f''(x) < 0$ при всех $x \in (a; b)$), то ее график на интервале $(a; b)$ направлен выпуклостью вверх.**

Действительно, пусть, например, $f''(x) > 0$ при всех $x \in (a; b)$. Если рассматривать $f'(x)$ как функцию от x, то $f''(x)$ является производной этой функции ($f''(x) = (f'(x))'$). Тогда, имея положительную производную, функция $f'(x)$ возрастает на интервале $(a; b)$. Следовательно, по свойству 1 функция $f(x)$ является выпуклой вниз на этом интервале, а значит, и ее график будет выпуклым вниз на интервале $(a; b)$. Аналогично обосновывается и второе достаточное условие.

Отметим, что эти условия является только достаточными, но не являются необходимыми. Например, функция $y = x^4$ выпуклая вниз на всей числовой прямой (рис. 82), хотя в точке $x = 0$ ее вторая производная $y'' = 12x^2$ равна нулю.

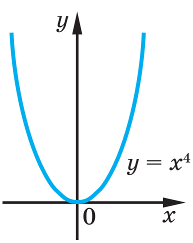


Рис. 82

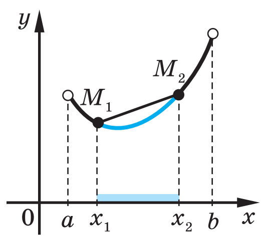


Рис. 83

Обратим внимание, что в случае, когда функция $f(x)$ *выпуклая вниз* на интервале $(a; b)$ и точки M_1 и M_2 являются точками ее графика на этом интервале (рис. 83), то на интервале $(x_1; x_2)$, где $a < x_1 < x_2 < b$, график функции $y = f(x)$ лежит ниже отрезка M_1M_2. Этот отрезок по аналогии с отрезком, соединяющим две точки дуги окружности, часто

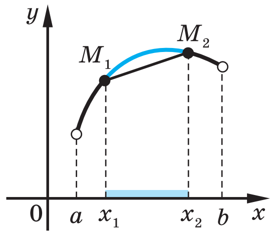


Рис. 84

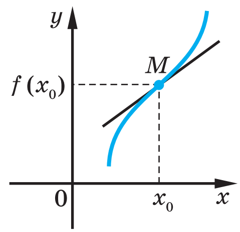


Рис. 85

называют *хордой* кривой. Следовательно, в этом случае на интервале $(x_1; x_2)$ *график лежит ниже хорды*.

Если функция $f(x)$ *выпуклая вверх* на интервале $(a; b)$ и точки M_1 и M_2 являются точками ее графика на этом интервале (рис. 84), то на интервале $(x_1; x_2)$, где $a < x_1 < x_2 < b$, график функции $y = f(x)$ лежит выше отрезка M_1M_2, то есть *график лежит выше хорды*.

3. Точки перегиба.

Точка M графика непрерывной функции $f(x)$, в которой существует касательная и при переходе через которую кривая изменяет направление выпуклости, называется *точкой перегиба графика функции*.

Учитывая определения выпуклости функции вверх и выпуклости функции вниз (с. 147), получаем, что касательная к графику функции по одну сторону от точки касания расположена выше графика, а по другую сторону — ниже графика, то есть в точке перегиба касательная пересекает кривую (рис. 85), а сам график функции переходит с одной стороны касательной на другую.

Отметим, что абсциссу x_0 точки перегиба графика функции $f(x)$ называют *точкой перегиба функции*. Тогда x_0 является одновременно концом интервала выпуклости вверх и концом интервала выпуклости вниз функции $f(x)$.

Точки перегиба дважды дифференцируемой функции можно находить с помощью ее второй производной. Приведем *достаточное условие существования точки перегиба*.

Пусть функция $f(x)$ имеет на интервале $(a; b)$ вторую производную. Тогда, если $f''(x)$ меняет знак при переходе через x_0, где $x_0 \in (a; b)$, то x_0 — точка перегиба функции $f(x)$.

Действительно, если функция $f(x)$ имеет на интервале $(a; b)$ вторую производную, то она имеет на этом интервале и первую производную. Следовательно, функция $f(x)$ непрерывна на заданном интервале и существует касательная к графику функции в точке с абсциссой x_0. Пусть $f''(x) < 0$ при $x < x_0$ и $f''(x) > 0$ при $x > x_0$ (на заданном интервале). Тогда, используя достаточные условия выпуклости функции, получаем, что при $x < x_0$ график функции $f(x)$ направлен выпуклостью вверх, а при $x > x_0$ график направлен выпуклостью вниз. Таким образом, точка x_0 является точкой перегиба функции $f(x)$. Аналогично рассматривается и случай, когда $f''(x) > 0$ при $x < x_0$ и $f''(x) < 0$ при $x > x_0$. И в этом случае x_0 является точкой перегиба функции $f(x)$.

Для нахождения промежутков выпуклости функции и точек ее перегиба следует учесть следующее.

Пусть функция $f(x)$ задана на интервале $(a; b)$ и в каждой точке этого интервала имеет вторую производную $f''(x)$, которая является непрерывной функцией на заданном интервале. Если для точки x_0 из этого интервала $f''(x_0) > 0$, то, учитывая непрерывность функции $f''(x)$, получаем, что в некоторой δ-окрестности этой точки вторая производная также будет положительной. То есть для всех $x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ значения $f''(x) > 0$. Но тогда в интервале $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ функция $f(x)$ направлена выпуклостью вниз и точка x_0 не может быть точкой перегиба функции $f(x)$. Аналогично, если $f''(x_0) < 0$, то в некоторой окрестности точки x_0 функция $f(x)$ направлена выпуклостью вверх и точка x_0 не может быть точкой перегиба функции $f(x)$. Следовательно, в рассмотренном случае точкой перегиба может быть только та точка x_0, в которой вторая производная равна нулю. Получаем *необходимое условие существования точек перегиба*:

если функция $f(x)$ задана на интервале $(a; b)$, в каждой точке этого интервала имеет вторую производную $f''(x)$, которая является непрерывной функцией на заданном интервале и имеет точку перегиба x_0, то $f''(x_0) = 0$.

Например, функция $y = x^3$ (рис. 86) имеет точку перегиба $x = 0$, в которой ее вторая производная равна нулю. Действительно, $y' = 3x^2$, $y'' = 6x$, $y''(0) = 0$. При $x > 0$ значение $y''(x) > 0$: график направлен выпуклостью вниз; при $x < 0$ значение $y''(x) < 0$: график направлен выпуклостью вверх. Следовательно, 0 — точка перегиба функции.

Отметим, что *точка перегиба функции $f(x)$ может быть и в той точке x_0, в которой $f''(x_0)$ не существует* (но $f'(x_0)$ существует).

Например, функция $y = x\sqrt[3]{x^2}$ (рис. 87) определена на всей числовой прямой, имеет перегиб в точке 0, в которой существует ее первая производная $y' = \left(\sqrt[3]{x^5}\right)' = \frac{5}{3}\sqrt[3]{x^2}$ $(y'(0) = 0)$, но не существует вторая производная

$$y'' = \left(\frac{5}{3}\sqrt[3]{x^2}\right)' = \frac{5}{3} \cdot \frac{2x}{3\sqrt[3]{x^4}} = \frac{10}{9\sqrt[3]{x}}$$

($y''(0)$ не существует).

При $x > 0$ значения $y''(x) > 0$ и график направлен выпуклостью вниз, а при $x < 0$ значения $y''(x) < 0$ и график направлен выпуклостью вверх. Следовательно, 0 — точка перегиба функции.

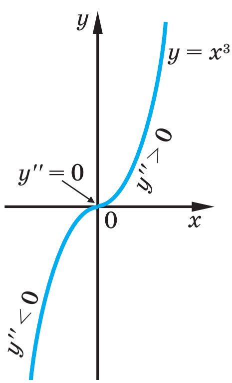


Рис. 86

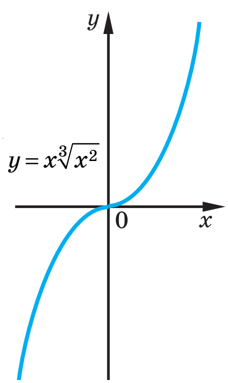


Рис. 87

Для нахождения промежутков выпуклости функции $f(x)$ необходимо решить неравенства $f''(x) > 0$ и $f''(x) < 0$ на области определения функции $f(x)$. Поскольку $f''(x)$ также можно рассматривать как функцию переменной x, то в случае, когда функция $f''(x)$ является непрерывной в каждой точке своей области определения, для решения этих неравенств можно использовать метод интервалов, точнее, его обобщение, основанное на следующем свойстве: *точки, в которых вторая производная равна нулю или не существует, разбивают область определения функции $f(x)$ на промежутки, в каждом из которых $f''(x)$ сохраняет постоянный знак.*

Учитывая это свойство и рассмотренные условия выпуклости функции и существования ее точек перегиба, можно выделить такую *схему исследования функции $f(x)$ на выпуклость и точки перегиба.*

1. *Найти область определения функции.*
2. *Найти вторую производную.*
3. *Найти внутренние точки области определения, в которых вторая производная равна нулю или не существует**.
4. *Отметить полученные точки на области определения функции, найти знак второй производной и характер поведения функции на каждом из интервалов, на которые разбивается область определения.*
5. *Записать необходимый результат исследования (интервалы и характер выпуклости и точки перегиба).*

Применение этой схемы показано в таблице 16.

Обратим внимание, что использование второй производной позволяет более детально исследовать свойства функции для построения ее графика. В таблице 16 (с. 144) приведена расширенная схема (по сравнению со схемой на с. 81) исследования функции для построения ее графика и пример ее использования. В эту схему дополнительно включено нахождение интервалов выпуклости функции, точек перегиба и асимптот графика функции (см. также § 8).

Вопросы для контроля

1. Используя график функции, объясните, какая функция называется выпуклой вверх, а какая — выпуклой вниз.
2. Используя график функции, объясните, какая точка называется точкой перегиба графика функции. Что называют точкой перегиба функции?
3. Объясните, как располагаются на соответствующем интервале графики выпуклых вверх и выпуклых вниз функций относительно хорды, соединяющей две точки этого графика.
4. Сформулируйте достаточные условия выпуклости вверх и выпуклости вниз функции, имеющей вторую производную на заданном интервале. Приведите примеры.

---

* По аналогии с критическими точками (см. с. 62) те внутренние точки области определения, в которых вторая производная равна нулю или не существует, часто называют критическими точками второго рода, или критическими точками по второй производной.

5. Сформулируйте необходимое и достаточное условия существования точек перегиба функции, которая имеет вторую производную на заданном интервале. Приведите примеры.
6. Охарактеризуйте схему исследования функции на выпуклость и точки перегиба.
7. Охарактеризуйте расширенную схему исследования функции для построения ее графика.

Упражнения

1. Найдите вторую производную данной функции:
   1) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5$; 2) $f(x) = x^4 \ln x$;
   3) $f(x) = x \cos x$; 4) $f(x) = x^2 \sin x$.
2. Найдите интервалы выпуклости вверх и выпуклости вниз и точки перегиба для функции:
   1) $f(x) = x^4 - 6x^2 + 1$; 2) $f(x) = \cos 2x$ при $-\pi < x < \pi$;
   3) $f(x) = \dfrac{x}{1-x^2}$; 4) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$.
3. Исследуйте функцию по расширенной схеме и постройте ее график:
   1) $f(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$; 2) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$; 3) $f(x) = \dfrac{x}{x^2-4}$; 4) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2-1}$;
   5) $f(x) = \dfrac{1}{x^2-4x+3}$; 6) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2-1}$; 7) $f(x) = e^{-x^2}$.

§ 11 ПРИМЕНЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ К РЕШЕНИЮ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ

11.1. Применение производной к решению уравнений и неравенств

В учебнике для 10 класса (см. § 18, 26, 35) было рассмотрено использование свойств функций для решения некоторых уравнений. Иногда для выяснения необходимых свойств функций целесообразно использовать производную. Это прежде всего нахождение промежутков возрастания и убывания функции и оценка области значений функции (соответствующие приемы такого исследования приведены в таблице 17).

Таблица 17

1. Оценка значений левой и правой частей уравнения		
Ориентир		
$f(x) = g(x)$ $f(x) \geqslant a$ $g(x) \leqslant a$	$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = a, \\ g(x) = a \end{cases}$	**Если нужно решить уравнение вида $f(x) = g(x)$ и выяснилось, что $f(x) \geqslant a$, $g(x) \leqslant a$, то равенство между левой и правой частями возможно только в случае, если одновременно $f(x)$ и $g(x)$ равны a.**

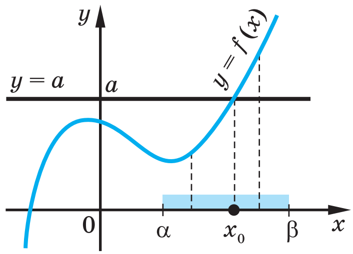
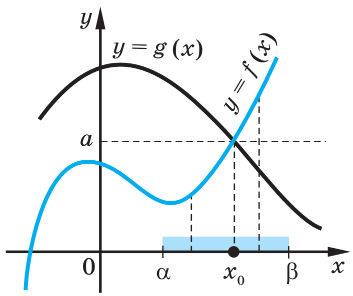
Продолж. табл. 17

Пример
Решите уравнение $\sqrt{x-1}+\sqrt{3-x}=x^2-4x+6.$ ▶ Оценим значения левой и правой частей уравнения. $g(x) = x^2 - 4x + 6 = (x - 2)^2 + 2 \geqslant 2$, $f(x)=\sqrt{x-1}+\sqrt{3-x}$. Исследуем функцию $f(x)$ на наибольшее и наименьшее значения с помощью производной. $D(f)$: $\begin{cases} x-1\geqslant 0, \\ 3-x\geqslant 0, \end{cases}$ то есть $1 \leqslant x \leqslant 3$. $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x-1}}-\frac{1}{2\sqrt{3-x}}$. Производная не существует в точках 1 и 3 из области определения функції $f(x)$, но эти точки не являются внутренними для $D(f)$, следовательно, они не являются критическими. $f'(x) = 0$, $\frac{1}{2\sqrt{x-1}}-\frac{1}{2\sqrt{3-x}}=0$, $\sqrt{3-x}=\sqrt{x-1}$, $3 - x = x - 1$, $x = 2$ — критическая точка ($f'(2) = 0$). Непрерывная функция* $f(x)$ задана на отрезке $[1; 3]$, поэтому она принимает наибольшее и наименьшее значения или на концах этого отрезка, или в критической точке из этого отрезка. Поскольку $f(1)=f(3)=\sqrt{2}$, а $f(2) = 2$, то $\max\limits_{[1;3]} f(x)=f(2)=2$, то есть** $f(x) \leqslant 2$. Кроме того, $g(x) \geqslant 2$. Следовательно, заданное уравнение равносильно системе $\begin{cases} \sqrt{x-1}+\sqrt{3-x}=2, \\ (x-2)^2+2=2 \end{cases} \Leftrightarrow x=2.$ *Ответ*: 2. ◁
2. Использование возрастания и убывания функций
Схема решения уравнения
1. *Подбираем один или несколько корней уравнения.* 2. *Доказываем, что других корней это уравнение не имеет (используя теоремы о корнях уравнения или оценку значений левой и правой частей уравнения, или следующее свойство функций: возрастающая или убывающая функция принимает каждое свое значение только в одной точке ее области определения).*

* В точке $x = 1$ функция $f(x)$ непрерывна справа, а в точке $x = 3$ — слева (см. с. 121).

** Мы могли бы точнее оценить область значений непрерывной функции $f(x)$: поскольку $\min\limits_{[1;3]} f(x)=f(1)=f(3)=\sqrt{2}$, то $\sqrt{2}\leqslant f(x)\leqslant 2$, но для приведенного решения достаточно оценки $f(x) \leqslant 2$.

Продолж. табл. 17

Теоремы о корнях уравнения	Пример
1. Если в уравнении $f(x) = a$ функция $f(x)$ возрастает (убывает) на некотором промежутке, то это уравнение может иметь не больше, чем один корень на этом промежутке.  	1. Уравнение $2x + \cos x = \pi$ имеет корень* $x = \frac{\pi}{2}$ $\left(2 \cdot \frac{\pi}{2} + \cos \frac{\pi}{2} = \pi,\right.$ то есть $\pi = \pi$). Других корней это уравнение не имеет, поскольку функция $f(x) = 2x + \cos x$ возрастающая (ее производная $f'(x) = 2 - \sin x > 0$ при всех значениях x из области определения: $D(f) = \boldsymbol{R}$). *Ответ*: $\frac{\pi}{2}$.
2. Если в уравнении $f(x) = g(x)$ функция $f(x)$ возрастает на некотором промежутке, а функция $g(x)$ убывает на этом промежутке (или наоборот), то это уравнение может иметь не больше, чем один корень на этом промежутке.  	2. Уравнение $e^x - x = \frac{1}{\sqrt{x} + 1}$ имеет корень* $x = 0$ $\left(e^0 - 0 = \frac{1}{\sqrt{0} + 1},\right.$ то есть $1 = 1$). Других корней это уравнение не имеет, поскольку его ОДЗ: $x \geqslant 0$, и на этой ОДЗ функция $f(x) = e^x - x$ является возрастающей (ее производная $f'(x) = e^x - 1$ равна нулю при $x = 0$ и $f'(x) > 0$ при $x > 0$, а, учитывая непрерывность функции $f(x)$, получаем, що $f(x)$ возрастает при $x \geqslant 0$). Функция $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x} + 1}$ убывает при $x \geqslant 0$ $\left(g'(x) = \frac{-\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\left(\sqrt{x} + 1\right)^2} < 0\right.$ при $x \geqslant 0$). Следовательно, уравнение $f(x) = g(x)$ имеет единственный корень $x = 0$. *Ответ*: 0.

* Корни в примерах 1 и 2 получены подбором. Как правило, подбор начинают с целых значений: $x = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$, которые подставляют в заданное уравнение, а для тригонометрических уравнений проверяют также «табличные» значения: $x = 0,\ \pm\frac{\pi}{6},\ \pm\frac{\pi}{4},\ \pm\frac{\pi}{3},\ \pm\frac{\pi}{2},\ \ldots$.

Объяснение и обоснование

В таблице 17 показано применение производной для реализации тех способов решения уравнений, которые связаны с использованием свойств функций и были рассмотрены и обоснованы в учебнике для 10 класса. Напомним, что эти способы чаще используются в тех случаях, когда мы не можем решить заданное уравнение с помощью равносильных преобразований или уравнений-следствий (или тогда, когда такое решение является очень громоздким).

Отметим, что использование производной также позволяет при решении некоторых уравнений реализовать следующую схему рассуждений.

Допустим, мы смогли подобрать два корня заданного уравнения вида $f(x) = a$. Чтобы доказать, что уравнение не имеет других корней, достаточно убедиться, что функция $f(x)$ имеет только два промежутка возрастания или убывания (на каждом из которых уравнение $f(x) = a$ может иметь только один корень). Если функция $f(x)$ дифференцируема на каком-либо промежутке, то характер возрастания или убывания функции $f(x)$ на этом промежутке может измениться только в ее критических точках. Например, если в точке x_0 возрастание дифференцируемой (а следовательно, и непрерывной) функции изменилось на убывание, то это означает, что в точке x_0 функция имеет максимум, но тогда x_0 — критическая точка. Таким образом, *для того чтобы дифференцируемая на интервале функция имела на этом интервале не больше двух промежутков возрастания или убывания, достаточно, чтобы на этом интервале она имела только одну критическую точку*.

Пример Решим с помощью указанной выше схемы уравнение

$$3^{x+2} - 26x = 29.$$

Решение. ▶ Заданное уравнение имеет корни $x = -1$ ($3^{-1+2} - 26 \cdot (-1) = 29$, $29 = 29$) и $x = 2$ ($3^{2+2} - 26 \cdot 2 = 29$, $29 = 29$). Докажем, что других корней это уравнение не имеет. Для этого достаточно доказать, что функция $f(x) = 3^{x+2} - 26x$ имеет не больше двух промежутков возрастания или убывания. Действительно, $D(f) = \boldsymbol{R}$, $f'(x) = 3^{x+2}\ln 3 - 26$ существует на всей области определения функции $f(x)$. Если $f'(x) = 0$, то $3^{x+2}\ln 3 - 26 = 0$, $3^{x+2}\ln 3 = 26$, $3^{x+2} = \frac{26}{\ln 3} > 0$. Тогда $x = \log_3\left(\frac{26}{\ln 3}\right) - 2 = x_0$ — единственная критическая точка функции $f(x)$. Если отметить эту критическую точку на области определения функции $f(x)$ (на множестве $\boldsymbol{R}$), то область определения разобьется на два промежутка, в каждом из которых функция будет или возрастать, или убывать (на промежутке $(-\infty; x_0]$ функция $f(x)$ убывает, а на промежутке $[x_0; +\infty)$ — возрастает). Тогда в каждом из этих промежутков уравнение $f(x) = 29$ может иметь не больше, чем один корень, то есть всего заданное уравнение может иметь не больше двух корня. Два корня этого уравнения мы уже подобрали. Следовательно, заданное уравнение имеет только эти два корня: $x = -1$ и $x = 2$.

Ответ: -1, 2. ◁

Аналогичные рассуждения для случая, когда для уравнение вида $f(x) = a$ удается подобрать три корня, приведены далее в задаче 2 на с. 157.

Отметим также, что при решении неравенств вида $f(x) \gtrless 0$ методом интервалов описанные выше приемы решения уравнений с использованием производной часто приходится применять для нахождения нулей функции $f(x)$ (см. задачу 5, с. 161).

Примеры решения задач

Задача 1 Решите уравнение $3^x + 3^{2-x} = 3(1 + \cos 2\pi x)$. (1)

Комментарий

Поскольку у нас нет формул, которые бы позволяли преобразовывать одновременно и показательные, и тригонометрические выражения, то попробуем решить заданное уравнение, используя свойства соответствующих функций. В частности, оценим область значений функций, стоящих в левой и правой частях уравнения. Для функции, стоящей в правой части уравнения, это легко сделать и без производной, а для исследования функции, стоящей в левой части уравнения, удобно использовать производную.

Решение

▶ ОДЗ заданного уравнения — все действительные числа $\boldsymbol{R}$. Оценим значения левой и правой частей уравнения. Поскольку $\cos 2\pi x$ принимает все значения от (-1) до 1, то $1 + \cos 2\pi x$ принимает всех значения от 0 до 2. Тогда функция $g(x) = 3(1 + \cos 2\pi x)$ принимает все значения от 0 до 6. Следовательно, $0 \leqslant g(x) \leqslant 6$.

Функцию $f(x) = 3^x + 3^{2-x}$ исследуем с помощью производной. $D(f) = \boldsymbol{R}$.

$f'(x) = 3^x \ln 3 - 3^{2-x} \ln 3 = 3^{2-x} \ln 3\,(3^{2x-2} - 1)$ существует на всей области определения функции $f(x)$.

$f'(x) = 0$, $3^{2-x} \ln 3\,(3^{2x-2} - 1) = 0$. Поскольку $3^{2-x} \ln 3 \neq 0$, то $3^{2x-2} - 1 = 0$, $3^{2x-2} = 1$, $2x - 2 = 0$, $x = 1$ — критическая точка. Отмечаем критическую точку на области определения функции $f(x)$ и находим знаки производной в каждом из полученных промежутков (рис. 88).

Непрерывная функция $f(x)$ имеет на интервале $(-\infty; +\infty)$ только одну критическую точку, и это точка минимума (в ней производная меняет знак с минуса на плюс). Следовательно, в этой точке функция принимает свое наименьшее значение: $f(1) = 6$. Таким образом, $f(x) \geqslant 6$.

Учитывая, что $g(x) \leqslant 6$, получаем, что заданное уравнение $f(x) = g(x)$ равносильно системе $\begin{cases} f(x) = 6, \\ g(x) = 6. \end{cases}$

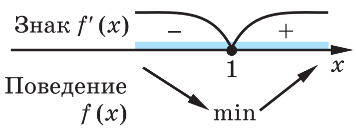


Рис. 88

Но значение 6 функция $f(x)$ принимает только при $x = 1$, что удовлетворяет и второму уравнению системы:

$g(1) = 3(1 + \cos 2\pi) = 6$. Следовательно, полученная система (а значит, и заданное уравнение) имеет единственный корень $x = 1$.

Ответ: 1. ◁

Отметим, что уравнение (1) можно решить еще одним способом, описанным в учебнике для 10 класса (см. с. 405) под названием «Ищи квадратный трехчлен», в котором предлагается *попробовать рассмотреть заданное уравнение как квадратное относительно какой-либо переменной (или относительно какой-либо функции)*.

▶ В частности, заданное уравнение можно записать так:

$3^x + \frac{3^2}{3^x} - 3(1 + \cos 2\pi x) = 0$. Замена $3^x = t$, где $t > 0$, дает уравнение $t + \frac{9}{t} - 3(1 + \cos 2\pi x) = 0$, которое при $t > 0$ равносильно уравнению

$$t^2 - 3(1 + \cos 2\pi x)\,t + 9 = 0. \qquad (2)$$

Если уравнение (2) рассмотреть как квадратное относительно переменной t, то для существования корней его дискриминант должен быть неотрицательным. Следовательно, $D = 9(1 + \cos 2\pi x)^2 - 36 \geqslant 0$. Тогда $(1 + \cos 2\pi x)^2 \geqslant 4$, а учитывая, что $1 + \cos 2\pi x \geqslant 0$ всегда, получаем $1 + \cos 2\pi x \geqslant 2$, то есть $\cos 2\pi x \geqslant 1$. Но в последнем неравенстве знак «больше» не может выполняться (значения косинуса не бывают больше 1), следовательно,

$$\cos 2\pi x = 1. \qquad (3)$$

Тогда уравнение (2) преобразуется в уравнение $t^2 - 6t + 9 = 0$, то есть

$$(t - 3)^2 = 0,\ t = 3.$$

Обратная замена дает: $3^x = 3$, следовательно, $x = 1$, что удовлетворяет и уравнению (3).

Ответ: 1. ◁

Задача 2 Решите уравнение $2^{x+3} + 2^{2x+1} = 7 \cdot 3^x + 3$.

Комментарий

Если попробовать применить к заданному уравнению схему решения показательных уравнений (см. учебник для 10 класса, с. 344), то удается реализовать только первый ее пункт — избавиться от числовых слагаемых в показателях степеней. А вот привести все степени к одному основанию (с удобными показателями) или к двум основаниям так, чтобы получить однородное уравнение, или перенести все члены в одну сторону и разложить полученное выражение на множители — не удается. Остается единственная возможность — применить свойства соответствующих функций. Но и на этом пути (см., например, учебник для 10 класса, табл. 58, с. 403) нам не удается использовать конечность ОДЗ (она бесконечна), оценку левой и правой частей уравнения (они обе в границах от 0 до $+\infty$). Остается только надеяться на возможность использования монотонности функции. Хотя и здесь мы не можем использовать теоремы о корнях (в обеих частях заданного уравнения стоят возрастающие функции). Тогда *попробуем подобрать корни* *этого уравнения и доказать, что других корней оно не имеет* (удобно предварительно привести уравнение к виду $f(x) = 0$). Последовательно подставляя $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$, выясняем, что $f(0) = 0$, $f(1) = 0$, $f(3) = 0$, то есть уравнение $f(x) = 0$ имеет три корня. Чтобы доказать, что других корней нет, достаточно доказать, что у функции $f(x)$ не больше трех промежутков возрастания или убывания; а учитывая непрерывность $f(x)$ на всей числовой прямой, для этого достаточно доказать, что у нее не больше двух критических точек, то есть уравнение $f'(x) = 0$ имеет не больше двух корней. Рассматривая теперь уравнение $f'(x) = 0$, мы после его преобразования можем провести аналогичные рассуждения, но уже для двух корней (как это было сделано в примере на с. 155). Выполняя преобразования уравнения $f'(x) = 0$, учтем, что все его члены имеют одинаковую степень — x (то есть оно является однородным относительно трех функций от переменной x, а именно: 2^x, 3^x, 4^x). С помощью деления обеих частей уравнения $f'(x) = 0$ на степень с основанием 2, 3 или 4 удается уменьшить количество выражений с переменной на одно.

Решение

Заданное уравнение равносильно уравнению $2^x \cdot 2^3 + 2^{2x} \cdot 2^1 - 7 \cdot 3^x - 3 = 0$, то есть

$$8 \cdot 2^x + 2 \cdot 4^x - 7 \cdot 3^x - 3 = 0. \qquad (1)$$

Обозначим $f(x) = 8 \cdot 2^x + 2 \cdot 4^x - 7 \cdot 3^x - 3$. Поскольку $f(0) = 8 + 2 - 7 - 3 = 0$, $f(1) = 16 + 8 - 21 - 3 = 0$, $f(3) = 64 + 128 - 189 - 3 = 0$, то уравнение $f(x) = 0$ имеет три корня: 0, 1, 3. Докажем, что других корней уравнение (1) не имеет. Для этого достаточно доказать, что у функции $f(x)$ есть не больше трех промежутков возрастания или убывания, а учитывая непрерывность функции $f(x)$ на всей числовой прямой, достаточно доказать, что функция имеет не больше двух критических точек.

Область определения: $D(f) = \boldsymbol{R}$.

Производная $f'(x) = 8 \cdot 2^x \ln 2 + 2 \cdot 4^x \ln 4 - 7 \cdot 3^x \ln 3$ существует при всех значениях x. Следовательно, критическими точками могут быть только те значения x, при которых $f'(x) = 0$. Получаем уравнение

$8 \cdot 2^x \ln 2 + 2 \cdot 4^x \ln 4 - 7 \cdot 3^x \ln 3 = 0$. Поскольку $3^x \neq 0$, то после деления обеих частей последнего уравнения на 3^x получаем равносильное уравнение

$$8 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^x \cdot \ln 2 + 2 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^x \cdot \ln 4 - 7 \ln 3 = 0. \qquad (2)$$

Чтобы доказать, что уравнение (2) имеет не больше двух корней, достаточно доказать, что функция $\varphi(x) = 8 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^x \cdot \ln 2 + 2 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^x \cdot \ln 4 - 7 \ln 3$, стоящая в левой части уравнения, имеет не больше двух промежутков возрастания или убывания. Учитывая непрерывность этой функции на всей числовой прямой, достаточно доказать, что она имеет только одну критическую точку. Действительно, $\varphi'(x) = (8 \ln 2) \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^x \cdot \ln \frac{2}{3} + (2 \ln 4) \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^x \cdot \ln \frac{4}{3}$ существует при всех значениях x. Следовательно, критическими точками могут быть только те значения x, при которых $\varphi'(x) = 0$. Получаем однородное уравнение

$$(8\ln 2)\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^x\cdot\ln\frac{2}{3}+(4\ln 2)\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^x\cdot\ln\frac{4}{3}=0.$$

Поскольку $(4\ln 2)\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^x \neq 0$, то после деления обеих частей уравнения на это выражение получаем равносильное уравнение $2\ln\frac{2}{3}+2^x\cdot\ln\frac{4}{3}=0$. Отсюда $2^x=\dfrac{-2\ln\frac{2}{3}}{\ln\frac{4}{3}}$. Учитывая, что $\ln\frac{2}{3}<0$, а $\ln\frac{4}{3}>0$, получаем, что $\dfrac{-2\ln\frac{2}{3}}{\ln\frac{4}{3}}>0$. Следовательно, последнее уравнение имеет единственный корень. Тогда функция $\varphi(x)$ имеет единственную критическую точку, и поэтому уравнение (2) имеет не больше двух корней. Это означает, что функция $f(x)$ имеет не больше двух критических точек. Тогда уравнение (1) (а значит, и заданное уравнение) имеет не больше трех корней. Но три корня заданного уравнения мы уже знаем: 0, 1, 3. Следовательно, других корней заданное уравнение не имеет.

Ответ: 0, 1, 3. ◁

Задача 3 Решите систему уравнений $\begin{cases}3x-3y=\sin x-\sin y,\\ 2x^3-y^3=1.\end{cases}$

Решение

▶ Заданная система равносильна системе $\begin{cases}3x-\sin x=3y-\sin y,\\ 2x^3-y^3=1.\end{cases}$ (1)

Рассмотрим функцию

$$f(t) = 3t - \sin t.$$

Поскольку $f'(t) = 3 - \cos t > 0$ всегда, то на своей области определения ($t \in \boldsymbol{R}$) функция $f(t)$ является возрастающей. Тогда первое уравнение системы (1), которое имеет вид $f(x) = f(y)$, равносильно уравнению $x = y$. Следовательно, система (1) равносильна системе $\begin{cases}x=y,\\ 2x^3-y^3=1.\end{cases}$ Подставляя $x = y$ во второе уравнение системы, имеем

Комментарий

Решить заданную систему с помощью равносильных преобразований не удается. Поэтому попробуем использовать свойства функций.

Если в первом уравнении системы члены с переменной x перенести в одну сторону, а с y — в другую, то получим в левой и правой частях уравнения значения одной и той же функции. С помощью производной легко проверить, что эта функция является возрастающей. Но *равенство $f(x) = f(y)$ для возрастающей функции возможно тогда и только тогда, когда $x = y$*, поскольку каждое свое значение возрастающая (или убывающая) функция может принимать только при одном значе-

$$2y^3 - y^3 = 1,$$
$y^3 = 1$, $y = 1$. Тогда
$$x = y = 1.$$

Ответ: (1; 1).

нии аргумента. Коротко этот результат можно сформулировать так: **если функция $f(x)$ является возрастающей (или убывающей) на определенном множестве, то на этом множестве $f(\alpha) = f(\beta) \Leftrightarrow \alpha = \beta$.**

Задача 4 Решите неравенство $x^{11} - x^6 + 2x < -4$.

Решение

Заданное неравенство равносильно неравенству $x^{11} - x^6 + 2x + 4 < 0$. Функция $f(x) = x^{11} - x^6 + 2x + 4$ непрерывна в каждой точке своей области определения, поэтому для решения неравенства можно использовать метод интервалов.

1. ОДЗ: $x \in \boldsymbol{R}$.
2. Нули функции: $f(x) = 0$. Найдем производную функции $f(x)$: $f'(x) = 11x^{10} - 6x^5 + 2$. Если обозначить $x^5 = t$, то $f' = 11t^2 - 6t + 2$. Но квадратный трехчлен $11t^2 - 6t + 2$ имеет отрицательный дискриминант, тогда для всех t: $11t^2 - 6t + 2 > 0$. Следовательно, для всех x значение $f'(x) > 0$. Тогда функция $f(x)$ возрастает на всей числовой прямой и уравнение $f(x) = 0$ может иметь только один корень. Поскольку $f(-1) = 0$, то $x = -1$ — единственный нуль функции $f(x)$.
3. Отмечаем нули на ОДЗ и находим знак в каждом из промежутков, на которые разбивается ОДЗ (рис. 89).

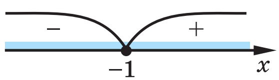


Рис. 89

Ответ: $(-\infty; -1)$.

Комментарий

Заданное неравенство не удается решить с помощью равносильных преобразований, поэтому используем метод интервалов. Для этого неравенство необходимо привести к виду $f(x) \gtrless 0$, где $f(x)$ — непрерывная в каждой точке своей области определения функция, поскольку она является многочленом.

Напомним схему решения неравенств методом интервалов.

1. *Найти ОДЗ неравенства.*
2. *Найти нули функции*: $f(x) = 0$.
3. *Отметить нули на ОДЗ и найти знак функции $f(x)$ в каждом из промежутков, на которые разбивается ОДЗ.*
4. *Записать ответ, учитывая знак данного неравенства.*

Для нахождения нулей функции надо решить уравнение $f(x) = 0$, которое не удается решить с помощью равносильных преобразований. Поэтому для его решения целесообразно использовать свойства функции $f(x)$, в частности, ее монотонность, которую можно обосновать с помощью производной.

Задача 5 Решите неравенство $\sqrt{x-3}+\sqrt{5-x}\geqslant 3-\dfrac{\arccos\left(-\frac{x}{4}\right)}{\pi}$.

Комментарий

Попробуем решить заданное неравенство методом интервалов (см. схему решения в задаче 4). Для этого его необходимо привести к виду $f(x)\geqslant 0$ (где функция $f(x)$ непрерывна в каждой точке своей области определения).

При нахождении нулей функции для решения уравнения $f(x)=0$ целесообразно использовать свойства соответствующих функций, в частности, оценку значений левой и правой частей уравнения вида $g(x)=\varphi(x)$. Значение функции $\varphi(x)=3-\dfrac{\arccos\left(-\frac{x}{4}\right)}{\pi}$ легко оценить и без применения производной, а для исследования функции $g(x)=\sqrt{x-3}+\sqrt{5-x}$ используем производную. Отметим, что в данном случае внутри ОДЗ мы не найдем ни одного нуля функции $f(x)$ (см. далее решение: нулем является только крайняя точка ОДЗ). Но метод интервалов применим и в этом случае — мы получаем единственный интервал, в котором функция сохраняет свой знак.

Решение

► Заданное неравенство равносильно неравенству

$$\sqrt{x-3}+\sqrt{5-x}-3+\frac{\arccos\left(-\frac{x}{4}\right)}{\pi}\geqslant 0. \qquad (1)$$

Функция $f(x)=\sqrt{x-3}+\sqrt{5-x}-3+\dfrac{\arccos\left(-\frac{x}{4}\right)}{\pi}$ непрерывна в каждой точке* своей области определения, поэтому для решения неравенства (1) можно использовать метод интервалов.

1. ОДЗ: $\begin{cases} x-3\geqslant 0,\\ 5-x\geqslant 0,\\ -1\leqslant -\frac{x}{4}\leqslant 1,\end{cases}$ $\begin{cases} x\geqslant 3,\\ x\leqslant 5,\\ -4\leqslant x\leqslant 4,\end{cases}$ $3\leqslant x\leqslant 4.$

2. Нули: $f(x)=0$. $\sqrt{x-3}+\sqrt{5-x}-3+\dfrac{\arccos\left(-\frac{x}{4}\right)}{\pi}=0.$

Это уравнение равносильно уравнению

$$\sqrt{x-3}+\sqrt{5-x}=3-\frac{\arccos\left(-\frac{x}{4}\right)}{\pi}=0. \qquad (2)$$

* Конечно, если учесть, что в точке 3 функция $f(x)$ непрерывна справа, а в точке 4 — слева (см. ее ОДЗ).

Оценим значения функций $g(x)$ и $\varphi(x)$, стоящих соответственно в левой и правой частях уравнения (2).

Поскольку $0 \leqslant \arccos\left(-\frac{x}{4}\right) \leqslant \pi$, то $0 \leqslant \frac{\arccos\left(-\frac{x}{4}\right)}{\pi} \leqslant 1$.

Тогда $2 \leqslant 3 - \frac{\arccos\left(-\frac{x}{4}\right)}{\pi} \leqslant 3$.

Исследуем функцию $g(x) = \sqrt{x-3} + \sqrt{5-x}$ на ОДЗ неравенства (1), то есть при $x \in [3; 4]$.

Функция $g(x)$ непрерывна на отрезке $[3; 4]$, поэтому она принимает наибольшее и наименьшее значения или на концах, или в критических точках этого отрезка.

$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-3}} - \frac{1}{2\sqrt{5-x}}$ не существует в точке 3 отрезка $[3; 4]$, но эта точка не является внутренней точкой этого отрезка, следовательно, она не является критической. Выясним, когда $g'(x) = 0$.

$\frac{1}{2\sqrt{x-3}} - \frac{1}{2\sqrt{5-x}} = 0$, $\frac{1}{2\sqrt{x-3}} = \frac{1}{2\sqrt{5-x}}$, $\sqrt{5-x} = \sqrt{x-3}$, $5 - x = x - 3$, $x = 4$.

Сравнивая значения $g(3) = \sqrt{2}$ и $g(4) = 2$, получаем, что $\min\limits_{[3;\,4]} g(x) = g(3) = \sqrt{2}$, $\max\limits_{[3;\,4]} g(x) = g(4) = 2$. Следовательно, $\sqrt{2} \leqslant g(x) \leqslant 2$. Тогда уравнение (2) равносильно системе $\begin{cases} \varphi(x) = 2, \\ g(x) = 2. \end{cases}$ Поскольку 2 — наибольшее значение функции $g(x)$, которое достигается только при $x = 4$, то уравнение $g(x) = 2$ имеет единственный корень $x = 4$, удовлетворяющий и уравнению $\varphi(x) = 2$ (действительно, $\varphi(4) = 3 - \frac{\arccos(-1)}{\pi} = 3 - \frac{\pi}{\pi} = 2$). Следовательно, функция $f(x)$ имеет только один нуль: $x = 4$.

Отмечаем нуль на ОДЗ и находим знак функции в полученном промежутке (рис. 90).

Как видим, функция $f(x)$ не принимает положительных значений и в неравенстве (1) знак «больше» не может выполняться. Следовательно, может выполняться только знак «равно», но $f(x) = 0$ только при $x = 4$.

Ответ: 4. ◁

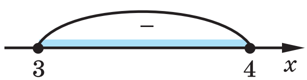


Рис. 90

З а м е ч а н и е. Используя введенные обозначения, заданное неравенство можно записать так: $g(x) \geqslant \varphi(x)$. После выполнения оценки значений функций $g(x)$ и $\varphi(x)$: $\sqrt{2} \leqslant g(x) \leqslant 2$ и

$2 \leqslant \varphi(x) \leqslant 3$ и без метода интервалов можно сделать вывод, что неравенство $g(x) > \varphi(x)$ не может выполняться. Следовательно, заданное неравенство равносильно уравнению $g(x) = \varphi(x)$, которое равносильно системе $\begin{cases} \varphi(x) = 2, \\ g(x) = 2, \end{cases}$ имеющей единственное решение $x = 4$. Но такие рассуждения можно провести только для этого конкретного неравенства, в то время как метод интервалов можно использовать для решения любого неравенства вида $f(x) \gtrless 0$ (где функция $f(x)$ непрерывна в каждой точке своей области определения). Поэтому основным способом решения таких неравенств мы выбрали метод интервалов.

Вопросы для контроля

1. Объясните, в каких случаях удается решить уравнение с помощью оценки значений его левой и правой частей. Приведите пример.
2. Объясните, как можно использовать возрастание и убывание функций для решения уравнений. Приведите примеры.

Упражнения

Решите уравнение **(1—7)**.

1. 1) $\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}=x^2-6x+11$; 2) $\sqrt{x-1}+\sqrt{9-x}=x^2-10x+29$.

2. 1) $x+\dfrac{1}{x}=2\sin\dfrac{\pi x}{2}$; 2) $2^x+2^{-x}=2\cos\dfrac{x}{3}$; 3) $4^x+4^{1-x}=1+3\sin\pi x$.

3. 1) $x^5-x^3+2x-28=0$; 2) $5x-3\cos x=3$; 3) $2x^3-3x^2+\sqrt{x-1}=5$.

4. 1) $\sin 5x-2\cos x-8x=x^5-2$; 2) $4\cos 3x+5\sin\dfrac{x}{2}+15x=4-x^3$;
3) $4^{\frac{1}{x}}-1=3^{2x-1}$.

5. 1) $2^{x+1}-4x=0$; 2) $3^{x-1}-4x=-3$; 3) $5^{x+2}-12x=25$.

6. 1) $3\cdot 2^{x+2}+5^x=8\cdot 3^x+5$; 2) $3\cdot 2^x-3^{x+1}+4^x=1$;
3) $3\cdot 2^{x+4}+6\cdot 7^{x+1}=3\cdot 5^{x+2}+15$.

7. Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} 4x-\sin x=4y-\sin y, \\ 3x^2-y=2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x-2y=\sin x-\sin y, \\ x+2y=9. \end{cases}$

Решите неравенство **(8—9)**.

8. 1) $x^7-x^4+3x>-5$; 2) $2x^9-x^5+x>2$; 3) $\log_2(2-x)>4x+1$.

9. 1) $\sqrt{x+1}+\sqrt{7-x}\geqslant\dfrac{9}{2}-\dfrac{\arcsin\left(\frac{x}{3}\right)}{\pi}$; 2) $\sqrt{x-2}+\sqrt{20-x}\geqslant 7-\dfrac{\arccos\left(-\frac{x}{11}\right)}{\pi}$.

11.2. Применение производной к доказательству неравенств

Производную иногда удается использовать при доказательстве неравенств с одной переменной. Рассмотрим схему такого доказательства.

Пример Докажите неравенство $\ln(1+x) \leqslant x$ при $x \geqslant 0$.

Решение. ▶ Для доказательства данного неравенства достаточно доказать неравенство $\ln(1+x) - x \leqslant 0$ при $x \geqslant 0$. Рассмотрим функцию $f(x) = \ln(1+x) - x$ при $x \geqslant 0$. Ее производная $f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = \frac{-x}{1+x} < 0$ при $x > 0$. Следовательно, функция $f(x)$ убывает на интервале $(0; +\infty)$, а учитывая непрерывность функции $f(x)$ в точке 0 (она непрерывна на всей области определения), получаем, что функция $f(x)$ убывает и на промежутке $[0; +\infty)$. Но $f(0) = 0$. Тогда при $x \geqslant 0$ значение $f(x) \leqslant f(0) = 0$. Следовательно, $\ln(1+x) - x \leqslant 0$, то есть $\ln(1+x) \leqslant x$ при $x \geqslant 0$, что и требовалось доказать. (Отметим, что при $x > 0$ значение $f(x) < f(0) = 0$, а при $x = 0$ заданное неравенство обращается в равенство.) ◁

Это решение позволяет предложить следующую *схему доказательства неравенств вида* $\varphi(x) > g(x)$ (*или* $\varphi(x) < g(x)$) *с помощью производной.*

1. *Рассмотреть вспомогательную функцию* $f(x) = \varphi(x) - g(x)$ (на ее области определения или на заданном промежутке).
2. *Исследовать с помощью производной поведение функции* $f(x)$ (возрастание или убывание, ее наибольшее или наименьшее значения) *на рассматриваемом промежутке.*
3. *Обосновать* (опираясь на поведение функции $f(x)$), *что* $f(x) > 0$ (*или* $f(x) < 0$) *на рассматриваемом промежутке, и сделать вывод, что* $\varphi(x) > g(x)$ (*или* $\varphi(x) < g(x)$) *на этом промежутке.*

Обратим внимание, что при доказательстве некоторых неравенств эту схему приходится использовать несколько раз (см. решение задачи 1).

Примеры решения задач

Задача 1 Докажите неравенство $\sin x > x - \frac{2x^2}{\pi}$ при $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Комментарий

Попробуем применить производную к доказательству данного неравенства. Для этого исследуем функцию, которая является разностью левой и правой частей неравенства:

$$f(x) = \sin x - x + \frac{2x^2}{\pi}.$$

Учитывая, что эта функция непрерывна на всей числовой прямой и $f(0) = 0$, достаточно доказать, что функция возрастает на заданном промежутке. (Тогда из непрерывности функции следует, что она будет возрастать и на промежутке $\left[0;\frac{\pi}{2}\right)$ и в этом промежутке из неравенства $x > 0$ будет вытекать неравенство $f(x) > f(0) = 0$, равносильное заданному.) Для доказательства того, что функция возрастает на заданном промежутке, достаточно доказать, что ее производная $f'(x) > 0$. Если обозначить производную $f'(x)$ как новую функцию $g(x) = f'(x)$, то нам надо доказать неравенство $g(x) > 0$, а для этого снова можно использовать приведенные выше рассуждения.

Решение

▶ Заданное неравенство равносильно неравенству $\sin x - x + \frac{2x^2}{\pi} > 0$. Рассмотрим функцию $f(x) = \sin x - x + \frac{2x^2}{\pi}$. Эта функция непрерывна на всей числовой прямой и имеет производную $f'(x) = \cos x - 1 + \frac{4x}{\pi}$. Теперь рассмотрим функцию $g(x) = \cos x - 1 + \frac{4x}{\pi}$ и докажем, что $g(x) > 0$ на промежутке $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$. Функция $g(x)$ непрерывна на всей числовой прямой и имеет производную $g'(x) = -\sin x + \frac{4}{\pi}$. Учитывая, что $\frac{4}{\pi} > 1 \geqslant \sin x$, получаем $g'(x) = -\sin x + \frac{4}{\pi} > 0$. Следовательно, функция $g(x)$ возрастает на всей числовой прямой и, в частности, на промежутке $\left[0;\frac{\pi}{2}\right)$. Тогда по определению возрастающей функции при $x > 0$ получаем, что $g(x) > g(0)$. Но $g(0) = \cos 0 - 1 + \frac{4 \cdot 0}{\pi} = 0$. То есть при $x \in \left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ $f'(x) = g(x) > 0$. Это означает, функция $f(x)$ возрастает на интервале $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$, а так как она непрерывна, то она возрастает и на промежутке $\left[0;\frac{\pi}{2}\right)$. Тогда из неравенства $x > 0$ будет вытекать неравенство $f(x) > f(0)$. Но $f(0) = \sin 0 - 0 + \frac{2 \cdot 0^2}{\pi} = 0$, следовательно, $f(x) > 0$ при всех $x \in \left(0;\frac{\pi}{2}\right)$. Таким образом, на этом интервале выполняется неравенство $\sin x - x + \frac{2x^2}{\pi} > 0$, а значит, и неравенство $\sin x > x - \frac{2x^2}{\pi}$. ◁

Задача 2 Докажите, что при всех действительных значениях x выполняется неравенство $e^x \geqslant 1 + x$.

Решение

▶ Рассмотрим функцию

$f(x) = e^x - 1 - x$.

Область определения: $D(f) = \mathbf{R}$. Производная $f'(x) = e^x - 1$ существует на всей области определения.

Комментарий

Используем производную для доказательства данного неравенства. Для этого исследуем функцию $f(x)$, которая является разностью левой и правой частей неравенства. При всех

Следовательно, функция $f(x)$ непрерывна на всей числовой прямой;

$$f'(x) = 0,\ e^x - 1 = 0,\ e^x = 1,$$

$x = 0$ — критическая точка.

Отмечаем критическую точку на области определения функции $f(x)$, определяем знаки производной и поведение функции в каждом из полученных промежутков (рис. 91).

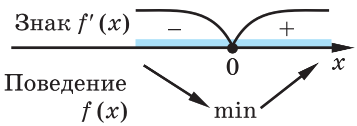


Рис. 91

Как видим, непрерывная функция $f(x)$ имеет на интервале $(-\infty; +\infty)$ только одну критическую точку, и это точка минимума. Следовательно, в этой точке функция принимает свое наименьшее значение на этом интервале. Тогда при всех действительных значениях x значения $f(x) \geqslant f(0) = 0$, то есть $e^x - 1 - x \geqslant 0$. Следовательно, $e^x \geqslant 1 + x$ при всех действительных значениях x. ◁

Замечание. ... действительных значениях x эта функция не является ни возрастающей, ни убывающей, и поэтому рассуждения, приведенные при решении предыдущих задач, нельзя использовать. Тогда попробуем в результате исследования найти наибольшее или наименьшее значение функции $f(x)$ на всей числовой прямой. Для этого можно использовать свойство: *если непрерывная функция $f(x)$ имеет на заданном интервале только одну точку экстремума x_0 и это точка минимума, то на заданном интервале функция принимает свое наименьшее значение в точке x_0*. Далее воспользуемся тем, что когда в точке x_0 функция принимает наименьшее значение на заданном интервале, то для всех значений x из этого интервала $f(x) \geqslant f(x_0)$ (если необходимо, то можно также уточнить, что знак равенства достигается только в точке x_0).

При доказательстве числовых неравенств или для сравнения двух чисел часто бывает удобно перейти к более общему функциональному неравенству.

Задача 3 Сравните числа π^e и e^π.

Комментарий

Чтобы составить план решения, можно рассуждать следующим образом. Мы не знаем, какое из заданных чисел больше: π^e или e^π, поэтому в ходе анализа поставим между ними знак «$\vee$». Это знак неравенства, направленный вниз острым концом, свидетельствующий о том, что мы не знаем, в какую сторону его следует направить. Будем выполнять преобразование неравенства до тех пор, пока не выясним, какое число больше. Затем заменим знак «$\vee$» соответствующим знаком неравенства: «$>$» или «$<$», которое и запишем в решении. (В ходе анализа, в случае необходимости поменять знак неравенства, знак «$\vee$» меняем на знак «$\wedge$», а в записи решения в соответствующем месте меняем знак неравенства.) При анализе запись вида $\pi^e \vee e^\pi$ также будем называть неравенством (но, конечно, не в решении).

Рассмотрим неравенство $\pi^e \vee e^\pi$. Это неравенство с положительными членами ($\pi > 0$ и $e > 0$), следовательно, обе его части можно прологарифмировать. Поскольку функция $\ln t$ является возрастающей, то после логарифмирования обеих частей по основанию e знак неравенства не изменится, и мы получим неравенство $\ln(\pi^e) \vee \ln(e^\pi)$, то есть неравенство $e \ln \pi \vee \pi \ln e$. Так как $e\pi > 0$, то после деления обеих частей последнего неравенства на $e\pi$ знак неравенства не изменится, и мы получим неравенство $\frac{\ln \pi}{\pi} \vee \frac{\ln e}{e}$. Замечаем, что в левой и правой частях этого неравенства стоят значения одной и той же функции $f(x) = \frac{\ln x}{x}$. Исследуем эту функцию с помощью производной на возрастание и убывание. Далее, учитывая, что $\pi > e$, сравним полученные выражения, а затем и заданные выражения (выполняя все те преобразования, что и в ходе анализа, только в обратном порядке).

Решение

▶ Рассмотрим функцию $f(x) = \frac{\ln x}{x}$. Ее область определения: $x > 0$. Производная $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$ существует на всей области определения. Выясним, когда $f'(x) = 0$: $\frac{1 - \ln x}{x^2} = 0$. Тогда на области определения получаем равносильное уравнение $\ln x = 1$, то есть $x = e$ — критическая точка. Отмечаем критическую точку на области определения функции $f(x)$ и определяем знаки производной и поведение функции в каждом из полученных промежутков (рис. 92).

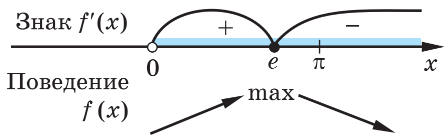


Рис. 92

Функция $f(x)$ убывает на интервале $(e; +\infty)$, а так как она непрерывна на всей области определения, то она убывает и на промежутке $[e; +\infty)$.

Поскольку $\pi > e$, то $f(\pi) < f(e)$, то есть $\frac{\ln \pi}{\pi} < \frac{\ln e}{e}$. Умножив обе части этого неравенства на положительное число πe (знак неравенства не меняется), получаем неравенство $e \ln \pi < \pi \ln e$. Тогда $\ln(\pi^e) < \ln(e^\pi)$. Поскольку функция $\ln t$ является возрастающей ($e > 1$), то $\pi^e < e^\pi$.

Ответ: $\pi^e < e^\pi$. ◁

При доказательстве некоторых неравенств иногда можно использовать вторую производную и выпуклость соответствующих функций.

Задача 4 Докажите, что при всех $0 < x < \frac{\pi}{2}$ выполняется неравенство $\sin x > \frac{2}{\pi} x$.

Решение

▶ Если $f(x) = \sin x$, то $f'(x) = \cos x$, $f''(x) = -\sin x$. При $0 < x < \frac{\pi}{2}$ $f''(x) < 0$,

Комментарий

На тех интервалах, где функция $f(x) = \sin x$ выпукла вверх, график функции $f(x)$ лежит выше соответследовательно, на интервале $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ функция $f(x) = \sin x$ выпукла вверх. Тогда на этом интервале ее график лежит выше хорды OA (рис. 93).

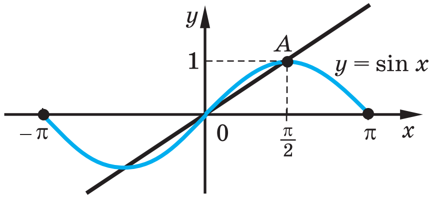


Рис. 93

Прямая OA имеет уравнение $y = kx$ и проходит через точку $A\left(\frac{\pi}{2}; 1\right)$. Следовательно, $1 = k\cdot\frac{\pi}{2}$, то есть $k = \frac{2}{\pi}$. Отсюда уравнение прямой OA: $y = \frac{2}{\pi}x$. Таким образом, при всех $0 < x < \frac{\pi}{2}$ выполняется неравенство

$$\sin x > \frac{2}{\pi}x. \quad \triangleleft$$

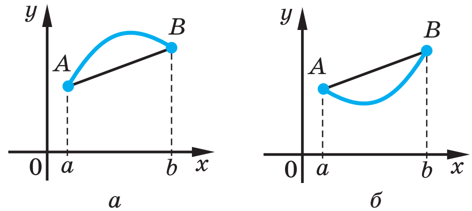


Рис. 94

ствующей хорды (рис. 94, *а*), а на тех интервалах, где эта функция выпукла вниз, график лежит ниже хорды (рис. 94, *б*). Используем это при доказательстве данного неравенства: с помощью второй производной исследуем функцию $f(x) = \sin x$ на выпуклость, рассмотрим уравнение соответствующей хорды AB и сравним уравнение хорды с уравнением прямой $y = \frac{2}{\pi}x$ (где $\frac{2}{\pi}x$ — функция, стоящая в правой части неравенства).

Вопросы для контроля

1. Объясните, как можно применить производную к доказательству неравенства с одной переменной. Приведите примеры.

Упражнения

Докажите неравенство **(1–4)**.

1. 1) $x^5 - 2x^3 + 2x > 20$ при $x > 2$; 2) $a^3 + 4 > a^2 + 3a$ при $a \geqslant 0$;

3) $2x + \frac{1}{x^2} > 5$ при $0 < x < \frac{1}{2}$.

2. 1) $e^{-x} > 1 - x$ при $x < 0$; 2) $e^x > ex$ при $x > 1$; 3) $e^x \geqslant 1 + x + \frac{x^2}{2}$ при $x \geqslant 0$.

3. 1) $\operatorname{tg} x > x$ при $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$; 2) $\cos x > 1 - \frac{x^2}{2}$ при $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$;

4. 1) $\ln(1 + x) \geqslant \frac{x}{x+1}$ при $x > -1$; 2) $2x \ln x \leqslant x^2 - 1$ при $x \geqslant 1$.

5. Сравните числа:

1) 1000^{1001} и 1001^{1000}; 2) $\left(\sqrt{2}\right)^{\sqrt{3}}$ и $\left(\sqrt{3}\right)^{\sqrt{2}}$; 3) $(\lg 5)^3$ и $3^{\lg 5}$.

§ 12 ПРИМЕНЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ С ПАРАМЕТРАМИ

При решении задач с параметрами производная может использоваться для исследования функции на монотонность и экстремумы, для исследования функции и построения ее графика, для записи уравнений касательных к графикам функций, для нахождения наибольшего и наименьшего значений функции.

Задача 1 Найдите все значения параметра a, при которых функция $y = (a + 2)\,x^3 - 3ax^2 + 9ax - 2$ убывает для всех $x \in \boldsymbol{R}$.

Решение

► Область определения функции:

$$D\,(y) = \boldsymbol{R}.$$

Функция дифференцируема на всей числовой прямой: $y' = 3\,(a + 2)x^2 - 6ax + 9a$. Заданная функция будет убывать при всех $x \in \boldsymbol{R}$, если $y' \leqslant 0$ на всей числовой прямой, причем уравнение $y' = 0$ имеет только конечное (или счетное) множество корней.

Если $a = -2$, то $y' = 12x - 18$ и неравенство $y' \leqslant 0$ не выполняется на всей числовой прямой ($12x - 18 \leqslant 0$ только при $x \leqslant 1{,}5$).

Если $a \neq -2$, то производная является квадратичной функцией относительно переменной x, она принимает значения $y' \leqslant 0$ на всей числовой прямой тогда и только тогда (см. таблицу в комментарии), когда выполняются условия $\begin{cases} a + 2 < 0, \\ D \leqslant 0 \end{cases}$ (1)

(при этом уравнение $y' = 0$ может иметь разве что один корень).

Из неравенства $a + 2 < 0$ получаем

$$a < -2.$$

Из неравенства $D \leqslant 0$ имеем:

$$36a^2 - 4 \cdot 3\,(a + 2) \cdot 9a \leqslant 0,$$
$$36a\,(a - 3a - 6) \leqslant 0,$$
$$36a\,(-2a - 6) \leqslant 0,$$
$$-72a\,(a + 3) \leqslant 0. \qquad (2)$$

Комментарий

Используем уточненный вариант условия убывания функции (с. 73).

Если $f'(x) \leqslant 0$ в каждой точке интервала $(a; b)$, причем уравнение $f'(x) = 0$ имеет только конечное (или счетное) множество корней, то функция $f(x)$ убывает на этом интервале.

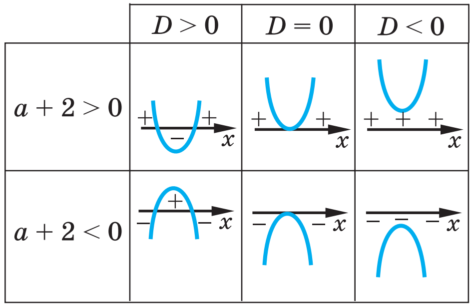
Отметим, что это условие является не только достаточным, но и необходимым для дифференцируемой на интервале функции (*если на каком-либо интервале функция $f(x)$ дифференцируема и убывает, то $f'(x) \leqslant 0$ на этом интервале* — см. с. 65). Следовательно, условию задачи могут удовлетворять те и только те значения параметра, которые мы найдем по этому условию.

Анализируя производную данной функции, учитываем, что она является квадратичной функцией только в случае, когда $a + 2 \neq 0$ (то есть $a \neq -2$). Поэтому случай $a + 2 = 0$ (то есть $a = -2$) следует рассмотреть отдельно.

Для квадратичной функции вспоминаем все возможные варианты расположения параболы относительно оси абсцисс (см. таблицу ниже) и выясняем, когда неравенство $y' \leqslant 0$ выполняется для всех $x \in \boldsymbol{R}$.

Учитывая полученное условие $a < -2$, получаем, что $(-72a) > 0$, тогда из неравенства (2) имеем $a + 3 \leqslant 0$, то есть $a \leqslant -3$. Следовательно, система (1) равносильна системе $\begin{cases} a < -2, \\ a \leqslant -3. \end{cases}$ Отсюда получаем $a \leqslant -3$.

Ответ: $(-\infty; -3]$. ◁



Обратим внимание, что неравенство $D \leqslant 0$ (при $a \neq -2$), которое свелось к неравенству (2), можно было решать отдельно или методом интервалов, или с помощью графика квадратичной функции (исключая точку с абсциссой $a = -2$), а уже затем находить общее решение системы (1).

Задача 2 Найдите наименьшее значение k, при котором график функции $y = (k - 1)\,x^2 + 2kx + 3k - 2$ касается оси абсцисс.

Решение

▶ По условию ось абсцисс (имеющая уравнение $y = 0$ и угловой коэффициент 0) должна быть касательной к графику функции

$$y = f(x) = (k - 1)\,x^2 + 2kx + 3k - 2.$$

Если x_0 — абсцисса точки касания, то, учитывая геометрический смысл производной, получаем $f'(x_0) = 0$. Чтобы касательной была именно ось абсцисс (а не параллельная ей прямая, имеющая такой же угловой коэффициент), достаточно проверить, что $f(x_0) = 0$.

Поскольку $f'(x) = 2(k - 1)x + 2k$, то $f'(x) = 0$, если

$$2(k - 1)x + 2k = 0. \qquad (1)$$

При $k = 1$ уравнение (1) не имеет решения (получаем уравнение $0x + 2 = 0$).

При $k \neq 1$ получаем: $(k - 1)x = -k$,

$$x = -\frac{k}{k-1} = x_0.$$ Тогда

$$f(x_0) = (k-1)\frac{k^2}{(k-1)^2} - \frac{2k^2}{k-1} + 3k - 2 = \frac{2k^2 - 5k + 2}{k-1}.$$

Комментарий

Для того чтобы график функции касался оси абсцисс, необходимо, чтобы ось абсцисс была касательной к этому графику. Зная уравнение оси абсцисс: $y = 0$ (то есть $y = 0x + 0$), заданную ситуацию можно исследовать двумя способами.

1. Если касательная к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0 имеет уравнение $y = 0$, то угловой коэффициент касательной равен 0. Тогда по геометрическому смыслу производной $f'(x_0) = 0$. Но угловой коэффициент 0 имеет не только ось абсцисс, но и все прямые, параллельные оси Ox (рис. 95, *а*, *б*). Чтобы касательной была именно ось абсцисс, необходимо чтобы точка касания M находилась на оси Ox (рис. 95, *а*), то есть чтобы ордината этой точки равнялась 0, следовательно, $f(x_0) = 0$.

2. Можно записать также уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0:

Выясним, при каких значениях k $f(x_0) = 0$. Учитывая, что $k \neq 1$, получаем

$$2k^2 - 5k + 2 = 0,$$
$$k_1 = 2,\ k_2 = 0{,}5.$$

Следовательно, при этих значениях k график функции $f(x)$ касается оси абсцисс. Наименьшее из этих значений $k = 0{,}5$.

Ответ: 0,5. ◁

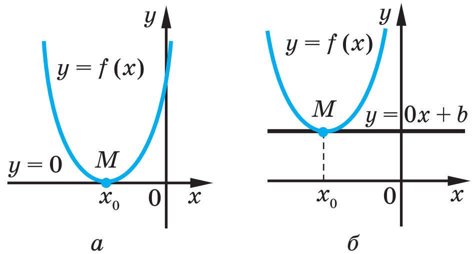


Рис. 95

$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ и сравнить полученное уравнение с уравнением оси абсцисс: $y = 0x + 0$ (снова получим те же условия $f'(x_0) = 0$ и $f(x_0) = 0$).

При исследовании уравнения $f'(x_0) = 0$ случай $k = 1$ необходимо рассмотреть отдельно.

Задача 3 Найдите все значения a, при которых уравнение $\cos 2x + \dfrac{a}{\sin x} = -7$ имеет хотя бы один корень.

Решение

▶ ОДЗ: $\sin x \neq 0$. На этой ОДЗ заданное уравнение равносильно уравнениям

$$1 - 2\sin^2 x + \frac{a}{\sin x} = -7,$$
$$a = 2\sin^3 x - 8\sin x.$$

Замена $\sin x = t$ (где $t \in [-1; 1]$ и $t \neq 0$ на ОДЗ) дает равносильное уравнение

$$2t^3 - 8t = a. \qquad (1)$$

Для заданного уравнения требование задачи будет выполняться тогда и только тогда, когда уравнение (1) будет иметь хотя бы один не нулевой корень в промежутке $[-1; 1]$. Для этого достаточно обеспечить, чтобы число a входило в область значений функции $f(t) = 2t^3 - 8t$ при $t \in [-1; 1]$

Комментарий

Сначала начнем решать заданное уравнение по схеме решения тригонометрических уравнений (см. учебник для 10 класса, с. 170), а именно: *попробуем привести все тригонометрические функции* ***к одному аргументу****; если удалось привести к одному аргументу, то попробуем привести все тригонометрические выражения* ***к одной функции...*** Указанные два этапа можно выполнить одновременно, используя формулу

$$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x.$$

После замены $\sin x = t$ для исследования существования корней у полученного кубического уравнения удобно использовать графическую иллюстрацию решений (приведя уравнение к виду $f(t) = a$). Также можно найти наибольшее и наии $t \neq 0$. Найдем эту область значений. Производная $f'(t) = 6t^2 - 8$ существует на всей числовой прямой, и $f'(t) = 0$ при $6t^2 - 8 = 0$, $t = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}$ (то есть критические точки не входят в отрезок $[-1; 1]$, поскольку $\frac{2}{\sqrt{3}} > 1$).

Следовательно, на всем заданном отрезке $f'(t)$ сохраняет свой знак. Поскольку $f'(0) = -8 < 0$, то $f'(t) < 0$ при $t \in [-1; 1]$, то есть функция $f(t)$ убывает на отрезке $[-1; 1]$. Тогда ее наибольшее значение на этом отрезке равно $f(-1) = 6$, а наименьшее — $f(1) = -6$.

Учитывая, что $f(0) = 0$, получаем, что при $t \in [-1; 1]$ и $t \neq 0$ непрерывная функция $f(t)$ принимает все значения из промежутков $[-6; 0)$ и $(0; 6]$. Именно при этих значениях a и будет выполняться требование задачи.

Ответ: $[-6; 0) \cup (0; 6]$. ◁

меньшее значения непрерывной функции $f(t)$, заданной на отрезке, или воспользоваться свойствами функции $f(t)$ на отрезке $[-1; 1]$, исследованными с помощью производной (см. решение). Напомним, что после замены переменной требование задачи в задачах с параметрами чаще всего изменяется, поэтому необходимо выяснить новое требование для уравнения (1).

Отметим, что достаточно наглядной является графическая иллюстрация решения (рис. 96), но исследование функции $f(t)$ для построения графика более громоздко, чем в приведенном решении.

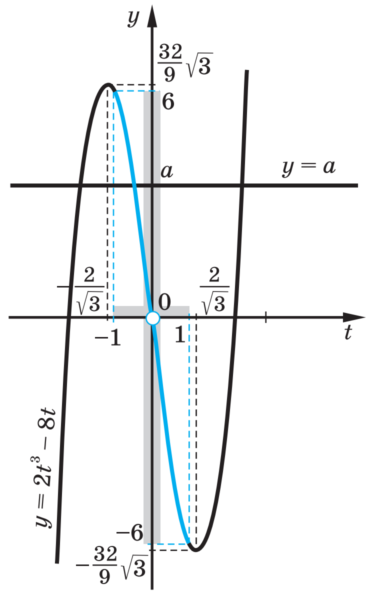


Рис. 96

Задача 4 При каких отрицательных значениях a уравнение $\sin^3 x \cos x = a$ имеет единственный корень на интервале $(0; \pi)$?

Комментарий

Поскольку в условии задачи идет речь о количестве корней уравнения, то для его исследования удобно использовать графическую иллюстрацию решения. Для этого исследуем функцию $y = \sin^3 x \cos x$ с помощью производной и построим на интервале $(0; \pi)$ график этой функции, а также график функции $y = a$. Количество точек пересечения этих графиков и будет равняться количеству корней заданного уравнения. При построении графика функции $y = \sin^3 x \cos x$ удобно воспользоваться непрерывностью функции на всей числовой прямой и построить график на отрезке $[0; \pi]$, а затем исключить крайние точки. Для определения критических точек функции y приходится решать уравнение $\sin^2 x\,(3\cos^2 x - \sin^2 x) = 0$, из которого получаем $\sin^2 x = 0$ или $3\cos^2 x - \sin^2 x = 0$. Последнее уравнение — однородное — решается делением на наивысшую степень одной из переменных. Учитывая, что случай $\sin^2 x = 0$ уже рассмотрен, удобно обе части полученного однородного уравнения разделить на $\sin^2 x \neq 0$ (напомним, что при делении на $\cos^2 x$ случай $\cos x = 0$ необходимо рассмотреть отдельно).

Решение

Исследуем функцию $y = \sin^3 x \cos x$ на интервале $(0; \pi)$.

Область определения функции $y = \sin^3 x \cos x$ — множество всех действительных чисел, следовательно, заданный интервал полностью входит в область определения функции.

Найдем точки пересечения с осями координат. На оси Oy $x = 0$, тогда $y = 0$ (но значение $x = 0$ не принадлежит заданному промежутку). На оси Ox $y = 0$: $\sin^3 x \cos x = 0$, отсюда $\sin x = 0$ или $\cos x = 0$, то есть $x = \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$, или $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. В интервал $(0; \pi)$ входит только значение $x = \frac{\pi}{2}$ (а в отрезок $[0; \pi]$ входят также точки $x = 0$ и $x = \pi$, которые также являются нулями функции).

Производная $y' = 3\sin^2 x \cos^2 x - \sin^4 x = \sin^2 x\,(3\cos^2 x - \sin^2 x)$ существует на всей области определения функции. Следовательно, в критических точках $y' = 0$, то есть

$$\sin^2 x\,(3\cos^2 x - \sin^2 x) = 0. \text{ Тогда}$$

$$\sin^2 x = 0 \qquad (1)$$

или

$$3\cos^2 x - \sin^2 x = 0. \qquad (2)$$

Уравнение (1) имеет корни $x = \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$, которые не принадлежат интервалу $(0; \pi)$. Если $\sin x \neq 0$, то, разделив обе части однородного уравнения (2) на $\sin^2 x \neq 0$, получим равносильное ему уравнение $3\operatorname{ctg}^2 x - 1 = 0$. Отсюда $\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ или $\operatorname{ctg} x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$. Тогда $x = \frac{\pi}{3} + \pi m$, $m \in \boldsymbol{Z}$, или $x = \frac{2\pi}{3} + \pi m$, $m \in \boldsymbol{Z}$. Интервалу $(0; \pi)$ из множества корней, заданных первой формулой, принадлежит только $x = \frac{\pi}{3}$, а из множества корней, заданных второй формулой — только $x = \frac{2\pi}{3}$.

Отмечаем эти критические точки

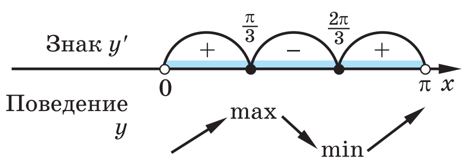


Рис. 97

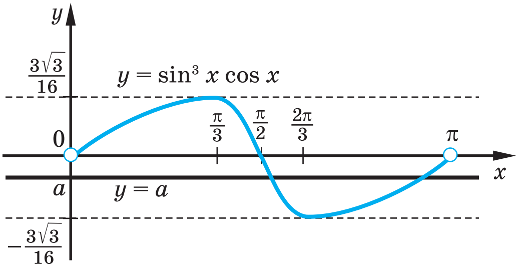


Рис. 98

на интервале $(0; \pi)$ и выясняем поведение функции в каждом из полученных промежутков (рис. 97).

Находим значения функции в критических точках $y\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{16}$, $y\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{3\sqrt{3}}{16}$ и строим график функции на интервале $(0; \pi)$ (рис. 98). На этом же рисунке строим и график функции $y = a$ при $a < 0$. Как видим, при $a < 0$ уравнение $\sin^3 x \cos x = a$ имеет единственный корень на интервале $(0; \pi)$ только при $a = -\frac{3\sqrt{3}}{16}$.

Ответ: $-\frac{3\sqrt{3}}{16}$. ◁

Упражнения

1. Найдите все значения параметра a, при которых функция

$y = \frac{a^2 - 1}{3}x^3 - (a-1)x^2 + 2x + 1$ возрастает при всех $x \in \boldsymbol{R}$.

2. При каком значении a прямая $16x + y - 13 = 0$ является касательной к графику функции $y = \frac{a + x^2}{x^2}$?

3. Найдите наибольшее значение k, при котором график функции $y = x^2 + 2(k+1)x + 2k^2 + k - 1$ касается оси абсцисс.

4. Зная, что уравнение $x^3 + 2 = ax$ при $x > 0$ имеет только один корень, найдите этот корень и соответствующее значение a.

5. График функции $y = -x^3 + ax^2 + bx + c$ пересекает ось Ox в точке с абсциссой $x = -2$ и касается оси Ox в точке с абсциссой $x = 7$. Найдите точки локального минимума этой функции.

6. Найдите значения a и b, при которых прямая $y = 7x - 2$ касается графика функции $y = ax^2 + bx + 1$ в точке $A(1; 5)$.

7. Найдите значение a, при котором касательная к параболе $y = 2x^2 + 3x + 5$ в точке $x_0 = -2$ является касательной к параболе $y = -x^2 + 4x + a$.

8. Найдите все значения параметра a, при которых функция

$f(x) = \frac{3 - x^2}{a - 2 - 3x - x^2}$ не является убывающей ни на каком отрезке, который принадлежит ее области определения.

9. При каких значениях параметра a уравнение $x^3 + \frac{48}{x} = a$ имеет хотя бы один корень?

10. Найдите все значения a, при которых уравнение $4\sin^3 x = a + 7\cos 2x$ не имеет корней.

11. Найдите все значения a, при которых уравнение $3\cos 2x + \frac{2a}{\sin x} = -17$ имеет хотя бы один корень.

12. Найдите все значения a, при которых уравнение $7 - 2\cos x = a(1 + \operatorname{tg}^2 x)$ имеет хотя бы один корень.

13. Стороны треугольника лежат на осях координат и касательной к графику функции $y = x^2 + 4x + 4$ в точке, абсцисса a которой удовлетворяет условию $1 \leqslant a \leqslant 0$. Найдите значение a, при котором площадь треугольника будет наибольшей.

§ 13 ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИИ

Пусть функция $f(x)$ в точке x_0 имеет производную $f'(x_0)$.

Дифференциалом функции $f(x)$ ***в точке*** x_0 **называется произведение производной** $f'(x_0)$ **на приращение аргумента** Δx **в точке** x_0.

Дифференциал функции обозначается символом $df(x_0)$. Поэтому

$$df(x_0) = f'(x_0) \cdot \Delta x. \qquad (1)$$

Рассмотрим геометрический смысл дифференциала. На рисунке 99 MB — это касательная в точке M к графику функции $y = f(x)$, длина отрезка $MA = \Delta x$. Учитывая, что по геометрическому смыслу производной $\operatorname{tg}\varphi = f'(x_0)$, из прямоугольного треугольника AMB получаем $AB = AM \operatorname{tg}\varphi$, то есть $AB = f'(x_0)\,\Delta x$. Поэтому длина отрезка AB равна величине дифференциала функции $f(x_0)$ в точке x_0: $AB = df(x_0)$.

Исходя из того, что $AB = BK - AK$, можно сформулировать геометрический смысл понятия дифференциала: $df(x_0) = BK - AK$.

С геометрической точки зрения $df(x_0)$ является приращением ординаты касательной, проведенной к графику функции $y = f(x)$ в точке x_0, которому соответствует приращение аргумента Δx.

При нахождении дифференциала функции $f(x)$ в любой точке $x \in D(f)$ на основании формулы (1) получим

$$df(x) = f'(x) \cdot \Delta x. \qquad (2)$$

Эта равенство справедливо для любой функции. В частности, для функции $f(x) = x$ равенство (2) обращается в следующее равенство: $df(x_0) = 1 \cdot \Delta x$. Отсюда получаем, что дифференциал аргумента dx равен приращению аргумента Δx: $dx = \Delta x$.

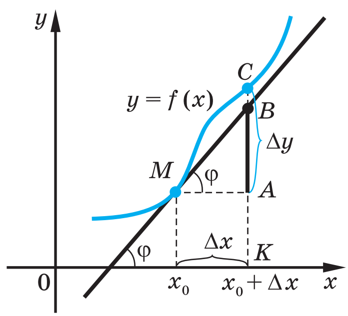


Рис. 99

Подставляя dx вместо Δx в формулу (2), получаем

$$df(x) = f'(x)dx. \qquad (3)$$

Найденное равенство является основанием для нахождения дифференциала функции.

Задача 1 Найдите $df(x)$ для функции $f(x) = \sin x$.

Решение

▶ Поскольку $f'(x) = \cos x$, то $d(\sin x) = \cos x \cdot dx$. ◁

Равенство (3) также показывает, что между понятием производной и понятием дифференциала существует тесная связь. Поэтому и **правила нахождения дифференциалов** аналогичны правилам дифференцирования функций, а именно:

1. $dC = 0.$
2. $d(Cu) = C \cdot du.$
3. $d(u \pm v) = du \pm dv.$
4. $d(uv) = (du) \cdot v + (dv) \cdot u.$
5. $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{(du) \cdot v - (dv) \cdot u}{v^2}.$

Обоснуем, например, правило 2:

$$d(Cu) = (Cu)'\,dx = Cu'dx = Cdu.$$

Другие правила обосновываются аналогично (обоснуйте их самостоятельно).

Вспомним, что по определению производной $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$. Используя понятие бесконечно малой функции (таблица 11), это равенство можно записать так: $\frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha(x)$, где $\alpha(x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$. Тогда приращение Δf дифференцируемой в точке x_0 функции $f(x)$ равно:

$$\Delta f = f'(x_0) \cdot \Delta x + \alpha(x) \cdot \Delta x, \text{ где } \alpha(x) \to 0 \text{ при } \Delta x \to 0.$$

В этом равенстве первое слагаемое правой части является дифференциалом функции, следовательно,

$$\Delta f(x_0) = df(x_0) + \alpha(x) \cdot \Delta x. \qquad (4)$$

Учитывая, что $\alpha(x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$, получаем, что второе слагаемое при $\Delta x \to 0$ стремится к нулю быстрее, чем Δx. В этом случае говорят, что $\alpha(x) \cdot \Delta x$ является величиной более высокого порядка малости, чем Δx, то есть второе слагаемое значительно меньше первого слагаемого. Это позволяет сделать следующий вывод:

дифференциал функции $df(x_0)$ является главной частью приращения функции.

С геометрической точки зрения (см. рис. 99) при $\Delta x \to 0$ расстояние BC становится значительно меньше, чем расстояние $AB = df(x_0)$, поэтому $AB = df(x_0)$ — главная (т. е. бóльшая) часть отрезка $AC = \Delta f$.

Если в равенстве (4) принебречь вторым слагаемым (которое при малых значениях Δx значительно меньше первого слагаемого), то получим приближенное равенство $\Delta f(x_0) \approx df(x_0)$, то есть $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0) \cdot \Delta x$. Тогда

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x. \qquad (5)$$

Последнее равенство используется для разных приближенных вычислений функций в тех случаях, когда $f(x_0)$ и $f'(x_0)$ нетрудно вычислить.

Задача 2 Пользуясь формулой (5), найдите приближенное значение $\sqrt{9,06}$.

Решение

Если рассмотреть функцию $f(x) = \sqrt{x}$, то $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Возьмем $x_0 = 9$. Тогда $f(x_0) = \sqrt{x_0} = \sqrt{9} = 3$ и $f'(x_0) = \frac{1}{2\sqrt{x_0}} = \frac{1}{2\sqrt{9}} = \frac{1}{6}$. По формуле (5) имеем:

$$\sqrt{x_0 + \Delta x} \approx \sqrt{x_0} + \frac{1}{2\sqrt{x_0}} \cdot \Delta x.$$

При $\Delta x = 0,06$ и $x_0 = 9$ получаем

$$\sqrt{9,06} \approx 3 + \frac{1}{6} \cdot 0,06 = 3,01.$$

Комментарий

При вычислении значения $\sqrt{9,06}$ по формуле (5):

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x$$

естественно рассмотреть функцию $f(x) = \sqrt{x}$ и взять за x_0 число 9, поскольку 9,06 близко к 9. Тогда $\Delta x = 0,06$ и значения $f(x_0) = \sqrt{x_0}$ и $f'(x_0) = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$ легко находятся при $x_0 = 9$.

Отметим, что значение $\sqrt{9,06}$, вычисленное с помощью калькулятора, равно 3,00998...

Упражнения

1. Найдите дифференциал функции:

1) $f(x) = \frac{1}{x}$; 2) $f(x) = \operatorname{tg} x$; 3) $f(x) = \arcsin x$;

4) $f(x) = \sin^2 3x$; 5) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4} \cdot \operatorname{ctg} x$; 6) $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x + 1}$.

2. Вычислите с помощью формулы (5) приближенное значение:

1) $\sqrt{4,08}$; 2) $\sqrt{9,06}$; 3) $\sqrt{1,004}$; 4) $\sqrt{25,012}$.

3. Докажите приближенную формулу $(1 + \Delta x)^n \approx 1 + n\Delta x$.

4. Вычислите значение:

1) $1,001^{100}$; 2) $1,03^{200}$; 3) $0,995^6$; 4) $0,998^{20}$.

5. Вычислите с помощью формулы (5) приближенное значение:

1) $\sin\left(\frac{\pi}{6} + 0,03\right)$; 2) $\cos\left(\frac{\pi}{6} + 0,04\right)$; 3) $\sin\left(\frac{\pi}{3} - 0,02\right)$; 4) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + 0,05\right)$.

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ УПРАЖНЕНИЯ К РАЗДЕЛУ 1

1. Определите сумму решений уравнения:
1) $|x+5|=7$; 2) $|2x-1|=5$; 3) $|x+7|=2$;
4) $|4x-8|+|2-x|=4$; 5) $2|x-3|-|3-x|=5$; 6) $5|x+4|-2|4-x|=4$.

2. Определите $x+y$, если:
1) $|x-y|+|4-x|=0$; 2) $|2x-y|+2|2-x|=0$.

3. Определите xy, если:
1) $|x-2|+4x^2-4xy+y^2=0$; 2) $|y-1|+x^2-2xy+y^2=0$.

4. Найдите количество целых решений неравенства:
1) $|x-1|\leqslant 2$; 2) $|x+2|\leqslant 4$; 3) $|x-3|\leqslant 6$; 4) $|x+4|<5$.

5. Найдите количество целых решений неравенства в промежутке $[-5;5]$:
1) $|x+2|\geqslant 3$; 2) $|x-1|\geqslant 4$; 3) $|x-2|\geqslant 3$; 4) $|2x-1|\geqslant 3$.

6. Определите наибольшее целое решение неравенства:
1) $|3x-1|<2x+2$; 2) $|2-3x|-x\leqslant 8$; 3) $|7-3x|-2x\leqslant 2$.

7. Определите наименьшее целое решение неравенства:
1) $|1-2x|-x\leqslant 10$; 2) $|3x-2|+2x\leqslant 8$; 3) $|4x-4|+4x\geqslant 5$.

8. Определите наименьшее решение неравенства:
1) $|3x+1|\leqslant x+7$; 2) $|2x+3|\leqslant x+12$; 3) $|4x+3|\leqslant x+21$.

9. Найдите наибольшее значение параметра a, при котором уравнение имеет решение:
1) $|2x-1|=1-4a$; 2) $|3x+2|=3-4a$.

10. Найдите наименьшее значение параметра a, при котором уравнение имеет решение:
1) $|2x-1|=4a+1$; 2) $|3x+3|=5a-7$.

11. Найдите наибольшее целое значение параметра a, при котором уравнение имеет решение:
1) $2|x-3|-a|3-x|=5$; 2) $3|x-2|+a|2-x|=-4$.

12. Найдите наименьшее целое значение параметра a, при котором уравнение имеет решение:
1) $8|x-3|+a|3-x|=5$; 2) $3|x-2|-a|2-x|=-6$.

13. Определите значение параметра m, при котором уравнение имеет точно четыре решения:

1) $\left|x(|x|-5)\right|=m$; 2) $\left|(x+1)(|x+1|-3)\right|=m$; 3) $\left|2(5-|x|)x\right|=m$.

14. При каком наименьшем приближенном целом значении параметра m уравнение $x^2-|16x-48|=m$ имеет четыре решения?

15. При каком значении параметра m уравнение $x^2-|14x-28|=m$ имеет одно решение?

16. К какому числу стремится значение функции, если:

1) $f(x)=\dfrac{x^2-5x+6}{x^2+5x+6}$, $x\to 1$; 2) $f(x)=\dfrac{x^2+5x+6}{x^2-5x+6}$, $x\to 1$;

3) $f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$, $x\to 1$; 4) $f(x)=\dfrac{2}{\pi^x-\pi^{-x}}$, $x\to 1$;

5) $f(x)=\cos x+\sin x$, $x\to\dfrac{\pi}{4}$; 6) $f(x)=\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x$, $x\to\dfrac{\pi}{4}$?

17. Найдите предел:

1) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{9x^2+1}-\sqrt[4]{x^4+1}}{\sqrt[3]{x^3+2}}$; 2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{9x^2+1}-\sqrt[4]{x^4+1}}{\sqrt[3]{x^3+2}}$; 3) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x-\sin a}{\cos x-\cos a}$;

4) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x-\sin a}{\operatorname{tg} x-\operatorname{tg} a}$; 5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}$; 6) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{\sqrt{x+1}-2}$.

18. Найдите асимптоты графика функции:

1) $y=\dfrac{2x^2+x}{x-3}$; 2) $y=\dfrac{x^3+1}{x^3-2x+4}$;

3) $y=\ln(3-x^2)$; 4) $y=\log_2(\operatorname{arctg} x)$;

19. Исследуйте на непрерывность функцию:

1) $f(x)=x^3-3x^2+3x-1$; 2) $f(x)=x^3+3x^2+3x+1$; 3) $f(x)=\sin x$;

4) $f(x)=\cos x$; 5) $f(x)=\begin{cases}\cos\dfrac{\pi x}{2} \text{ при } |x|\leqslant 1,\\ |x-1| \text{ при } |x|>1;\end{cases}$ 6) $f(x)=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{x} \text{ при } x\neq 0,\\ 0 \text{ при } x=0;\end{cases}$

7) $f(x)=\begin{cases}\sin\pi x, \text{ если } x \text{ — рациональное число},\\ 0, \text{ если } x \text{ — иррациональное число};\end{cases}$

8) $f(x)=\begin{cases}3x-2, \text{ если } x \text{ — рациональное число},\\ x^2, \text{ если } x \text{ — иррациональное число}.\end{cases}$

20. Исследуйте на непрерывность функцию на указанном промежутке:

1) $f(x)=\dfrac{x^2-5x+6}{x^2+5x+6}$, $[-5;\,0]$; 2) $f(x)=\dfrac{x^2+5x+6}{x^2-5x+6}$, $[0;\,5]$.

21. Найдите точки разрыва функции:

1) $\begin{cases}\dfrac{|x+2|}{x+2} \text{ при } x\neq -2,\\ 1 \text{ при } x=-2;\end{cases}$ 2) $y=\begin{cases}\dfrac{1}{(x-1)^2} \text{ при } x\neq 1,\\ 3 \text{ при } x=1.\end{cases}$

3) $f(x)=\begin{cases}x^2, \text{ если } x \text{ — рациональное число},\\ -x^2, \text{ если } x \text{ — иррациональное число};\end{cases}$

4) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{n}, \text{ если } x \text{ — несократимая дробь}, x=\dfrac{m}{n},\\ 0, \text{ если } x \text{ — иррациональное число}.\end{cases}$

Исследуйте функцию и постройте ее график **(22–23)**.

22. 1) $y=\frac{4x}{x^2+1}$; 2) $y=\frac{2x}{x^2+2}$; 3) $y=\frac{x^3-x}{x^2-4}$; 4) $y=\frac{x^3}{x^2-1}$; 5) $y=\frac{x^2-1}{x^2-9}$;

6) $y=\frac{x^2-4}{x^2-25}$; 7) $y=\frac{1}{x^2-5x+6}$; 8) $y=\frac{1}{x^2+5x+6}$.

23. 1) $y = x^3 + 6x^2 + 9x$; 2) $y=\frac{4}{3}x^3-3x^2-4x$; 3) $y = x^4 - 4x^2 + 4$;

4) $y = x^4 + 6x^2 + 9$; 5) $y=\sqrt{x^2-2x+1}$; 6) $y=\sqrt{x^2+2x+1}$;

7) $y=\frac{x^2-1}{|x-1|}$; 8) $y=\frac{x^2-1}{|x+1|}$.

24. Решите неравенство:

1) $f'(x) < g'(x)$, если $f(x)=\frac{x^3+1}{x}$, $g(x)=5x+\frac{1}{x}$;

2) $f'(x) + g'(x) \leqslant 0$, если $f(x) = 2x^3 + 12x^2$, $g(x) = 9x^2 + 72x$.

25. Решите уравнение:

1) $f'(x)=\frac{2}{x}\cdot f(x)=0$, если $f(x) = x^3 \ln x$;

2) $1 + 5f(x) + 6f'(x) = 0$, если $f(x)=\frac{1}{1-x}$.

26. Найдите область определения функции и ее производную:

а) $y=\operatorname{arctg}\frac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}$; б) $y=\operatorname{arcctg}\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}$.

27. Найдите производную функции $y(x)$ и вычислите ее значение в точке x_0:

1) $y=\sqrt{\sin\left(\cos\frac{1}{x^2}\right)}$, $x_0 = 1$; 2) $y=\operatorname{tg}^2\left(\operatorname{ctg}\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$, $x_0 = 1$;

3) $y=\frac{\operatorname{arctg} x}{2^x+x^2}$, $x_0 = 1$; 4) $y=\log_{x^2}4+\log_{-x}2$, $x_0 = -e$;

5) $y=\log_x 2+\log_{x^2}(x^2+1)$, $x_0 = e$; 6) $y=\ln^2\left(\arccos\frac{1}{\sqrt{x}}\right)+e^{-x^2}\cdot e^x$, $x_0 = \pi$;

7) $y = (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{ctg} x}$, $x_0=\frac{\pi}{4}$; 8) $y = (\operatorname{ctg} x)^{\operatorname{tg} x}$, $x_0=\frac{\pi}{4}$.

28. Под каким углом* пересекается с осью Oy график функции:

1) $y=\frac{1}{2}\operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$; 2) $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$?

29. 1) На кривой $y = x^2 - 7x + 3$ найдите точку, в которой касательная параллельна прямой $y = -5x + 3$.

---

* Имеется в виду угол между осью Oy и касательной к графику функции, проведенной в точке пересечения графика и оси.

2) В каких точках касательные к кривой $y=\frac{x^3}{3}-x^2-x+1$ параллельны прямой $y = 2x - 1$.

30. 1) Найдите точку, в которой касательная к графику функции $y = x^2$ перпендикулярна к прямой $2x - y + 1 = 0$.

2) Найдите на графике функции $y=\frac{1}{3}x^3-x^2-\frac{18}{5}x+\frac{14}{5}$ все точки, в каждой из которых касательная к графику перпендикулярна к прямой $5x - 3y + 2 = 0$.

31. 1) В какой точке кривой $y = ax^2 + bx + c$ необходимо провести касательную к ней для того, чтобы касательная проходила через начало координат? Исследуйте, при каких значениях a, b и c задача имеет решение.

2) В какой точке кривой $y = x^2 - 5x + 6$ необходимо провести касательную, чтобы она проходила через точку M $(a; b)$? Исследуйте, при каких значениях a и b задача имеет решение.

32. 1) Найдите угол между касательными к графику функции $y = x^3 - x$ в точках с абсциссами -1 и 0.

2) Найдите угол между касательными к графику функции $y = x^2$, проходящими через точку с координатами $(0; -1)$.

33. 1) Из точки A $(1; 6)$ проведены касательные к окружности $x^2 + y^2 + 2x - 19 = 0$. Составьте уравнение этих касательных.

2) Составьте уравнение касательных к кривой $y = x^2 - 4x + 3$, проходящих через точку M $(2; -5)$.

34. 1) Составьте уравнения касательных к кривым $y = 2x^2 - 5$ и $y = x^2 - 3x + 5$, проходящих через точки пересечения этих кривых.

2) Составьте уравнения касательных к графикам функций $y=\sqrt{2x}$ и $y=\frac{x^2}{2}$, проведенных через точку пересечения этих кривых.

35. 1) При каких значениях a функция $f(x) = x^3 + 3(a - 7)x^2 + 3(a^2 - 9)x + 1$ имеет точку максимума?

2) При каких значениях a функция $f(x)=\frac{a}{3}x^3+(a+2)x^2+(a-1)x+2$ имеет точку минимума?

36. 1) Найдите наименьшее из расстояний от точки M с координатами $(0; -2)$ до точек $(x; y)$, таких, что $y=\frac{16}{\sqrt{3x^3}}-2$, $x > 0$.

2) Найдите расстояние от точки M $(1; 0)$ до графика функции $y = x^2 + 6x + 10$ (то есть наименьшее из всех расстояний от точки M до точек графика).

37. 1) Найдите координаты точки M, лежащей на графике функции $y = 1 + \cos x$ при $0 \leqslant x \leqslant \pi$ и наименее удаленной от прямой $x\sqrt{3}+2y+4=0$.

2) Найдите координаты точки M, которая лежит на графике функции $y = 1 - \sin x$ при $\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{3\pi}{2}$ и которая наименее удалена от прямой $x - \sqrt{2}y - 5 = 0$.

38. 1) Найдите расстояние между графиками функций $y = x^2$ и $y = x - 1$ (то есть наименьшее из всех расстояний между точками этих графиков).

2) Найдите расстояние между графиками функций $y = -x$ и $y = \frac{1}{x}$.

39. 1) Фигура ограничена параболой $y = x^2 + 1$ и отрезками прямых $y = 0$, $x = 1$, $x = 2$. В какой точке M данной кривой $y = x^2 + 1$, $x \in [1; 2]$, необходимо провести касательную, чтобы она отсекала от этой фигуры трапецию наибольшей площади?

2) В фигуру, ограниченную линиями $y = 3x$ и $y = x^2$, вписан прямоугольник наибольшей площади так, что две его вершины лежат на прямой, а две другие — на параболе. Найдите площадь этого прямоугольника.

40. 1) Найдите все значения a, при которых функция $f(x) = a \cdot 8^x - (3a - 2) \cdot 4^x + 3(3a - 2) \cdot 2^x$ не имеет экстремумов.

2) Найдите все значения a, при которых функция $f(x) = a \cdot 8^x + (3a + 1) \cdot 4^x + (9a + 1) \cdot 2^x - 1$ не имеет экстремумов.

41. 1) Найдите число, которое в сумме со значениями своего квадрата дает наименьшее значение этой суммы.

2) Найдите такое положительное число, чтобы разность между ним и его кубом была наибольшей.

42. 1) Из всех цилиндров, вписанных в данный шар, найдите тот, который имеет наибольший объем.

2) Из всех цилиндров, вписанных в данный шар, найдите тот, который имеет наибольшую боковую поверхность.

43. Боковое ребро правильной треугольной пирамиды имеет постоянную заданную длину и образует с плоскостью основания угол α. При каком значении α объем пирамиды будет наибольшим?

СВЕДЕНИЯ ИЗ ИСТОРИИ

1. Из истории дифференциального исчисления. Раздел математики, в котором изучаются производные и их применение к исследованию функций, называется *дифференциальным исчислением*. Приращения аргумента и функции вида Δx и Δf, которые являются разностями, играют заметную роль в работе с производными. Поэтому естественно появление латинского корня *differentia* (разность) в названии *calculis differentialis* нового исчисления, которое переводится как *исчисление разностей*; это название появилось уже в конце XVII в., то есть во время возникновения нового метода.

Термин «производная» является буквальным переводом на русский французского слова *dérivée*, которое ввел в 1797 г. Ж. Л а г р а н ж (1736–1813); он же ввел современное обозначение y', f'. Такое название отражает смысл понятия: функция $f'(x)$ происходит от $f(x)$, является производной от $f(x)$.

Дифференциальное исчисление создано сравнительно недавно, в конце XVII в. Тем удивительнее, что задолго до этого А р х и м е д (ок. 287–212 гг. до н. э.) не только решил задачу на построение касательной к такой сложной кривой, как спираль (используя при этом предельные переходы), но и смог найти максимум функции $f(x) = x^2(a - x)$.

Развитию начал дифференциального исчисления способствовали работы математика и юриста П. Ф е р м а (1601–1665), который в 1629 г. предложил правила нахождения экстремумов многочленов. Следует подчеркнуть, что фактически, выводя эти правила, Ферма активно применял предельные переходы, имея простейшее дифференциальное условие максимума и минимума. Развитию нового исчисления способствовали также работы Р. Д е к а р т а (1596–1650), разработавшего метод координат и основания аналитической геометрии.

Систематическое учение о производных было развито И. Н ь ю т о н о м (1643–1727) и Г. Л е й б н и ц е м (1646–1716), которые независимо друг от друга создали теорию дифференциального исчисления. Ньютон исходил в основном из задач механики (ньютонов анализ создавался одновременно с ньютоновой классической механикой), а Лейбниц преимущественно исходил из геометрических задач. В частности, к определению производной Ньютон пришел, решая задачу о мгновенной скорости, а Лейбниц — рассматривая геометрическую задачу о проведении касательной к кривой.

В дальнейшем работами Л. Э й л е р а (1707–1783), О. К о ш и (1789–1857), К. Г а у с с а (1777–1855) и других математиков дифференциальное исчисление было превращено в целостную теорию для исследования функциональных зависимостей.

2. О понятии действительного числа. Хотя математический анализ возник в конце XVII в., однако полное его обоснование было дано только в конце XIX в., когда вслед за теорией пределов, созданной О. Коши, сразу была построена немецкими математиками Р. Д е д е к и н д о м (1831–1916), К. Вейерштрассом (1815–1897) и Г. К а н т о р о м (1845–1918) в нескольких формах теория действительного числа.

Первые представления о числах формировались постепенно под влиянием практики. С давних времен числа применялись в ходе счета и измерения величин.

Ответ на вопрос «Сколько элементов содержит данное конечное множество?» всегда выражается или натуральным числом, или числом нуль. Следовательно, множество

$$\{0;\ 1;\ 2;\ \ldots\}$$

всех неотрицательных чисел обслуживает все потребности счета.

Иначе с измерением величин. Расстояние между двумя пунктами может равняться 3,5 километра, площадь комнаты — 16,45 квадратных метра и т. п.

Исторически положительные действительные числа появились как отношение длин отрезков.

С открытием несоизмеримости диагонали единичного квадрата с его стороной стало понятным, что отношение длин отрезков не всегда можно выразить не только натуральным, но и рациональным числом. Чтобы числовое значение каждого отрезка при фиксированной единице измерения было определено, необходимо было ввести новые числа — иррациональные.

Все практические измерения величин имеют только приближенный характер. Их результат с необходимой точностью можно выразить с помощью рациональных дробей или конечных десятичных дробей. Например, измеряя диагональ квадрата со стороной 1 м с точностью до 1 см, мы выясним, что ее длина приближенно равна 1,41 м. Измеряя с точностью до 1 мм, получим, что эта длина приближенно равна 1,414 м.

Однако в математике часто уклоняются от приближенного характера практических измерений. Последовательный теоретический подход к измерению длин отрезков приводит к необходимости рассмотрения бесконечных десятичных дробей. (Именно такими дробями являются числа $\frac{2}{3} = 0{,}666\ldots$, $\sqrt{2} = 1{,}41421356\ldots$, $\pi = 3{,}14159265\ldots$.)

Отношение длины любого отрезка к длине отрезка, принятого за единицу измерения, всегда можно выразить числом, представленным в виде бесконечной десятичной дроби.

Полная теория действительных чисел достаточно сложна и не входит в программу средней школы. Она обычно рассматривается в курсах математического анализа. Однако с одним из способов ее построения мы ознакомимся в общих чертах.

1. Пусть:
   а) каждому действительному числу соответствует (как его запись) бесконечная десятичная дробь:
   $$x = a_0{,}a_1a_2 \ldots a_n \ldots;$$
   б) каждая бесконечная десятичная дробь является записью действительного числа.

   Но при этом естественно считать десятичную дробь, оканчивающуюся бесконечной последовательностью девяток, только другой записью числа, представленного десятичной дробью, оканчивающей бесконечной последовательностью нулей (см. также с. 9): $0{,}9999\ldots = 1{,}0000\ldots$; $12{,}765999\ldots = 12{,}766000\ldots$.

   Только исключив из рассмотрения десятичные дроби с девяткой в периоде, получим взаимно однозначное соответствие между множеством действительных чисел и множеством бесконечных десятичных дробей.

Число a_0 — это *целая часть* положительного числа x, а

$x - a_0 = 0,a_1a_2 \dots a_n \dots$ — *дробная* часть числа x.

Число $x_n = a_0,a_1a_2 \dots a_n$ называют *десятичным приближением x с точностью до 10^{-n} с недостатком,* а число $x'_n = x_n + 10^{-n}$ называют *десятичным приближением с точностью до 10^{-n} с избытком* для числа

$$x = a_0,a_1a_2 \dots \dots a_n \dots .$$

Если число x отрицательно, то есть

$x = -a_0,a_1a_2 \dots a_n \dots$, то считают, что

$x'_n = -a_0,a_1a_2 \dots a_n$ и $x_n = x'_n - 10^{-n}$.

2. Вводят *правило сравнения* двух действительных чисел. По определению число x меньше числа y, когда по меньшей мере для одного n выполняется неравенство $x_n < y_n$, где x_n и y_n — десятичные приближения с точностью до 10^{-n} с недостатком для чисел x и y. (Мы воспользовались тем, что правило сравнения конечных десятичных дробей уже известно.)
3. Определяют *арифметические действия* над действительными числами (при этом также пользуются тем, что эти действия уже определены для конечных десятичных дробей).

   Суммой двух действительных чисел x и y (обозначается $x + y$) называют такое действительное число z, что для любого n выполняются неравенства

$$x_n + y_n < x + y < x'_n + y'_n.$$

   В курсах математического анализа доказывается, что такое число существует и оно единственное.

   Аналогично *произведением* двух неотрицательных чисел x и y называют такое число z (обозначают xy), что при любом n выполняются неравенства

$$x_n y_n < xy < x'_n y'_n.$$

   Такое число существует, и оно единственное.

   Напомним, что примеры выполнения таким образом определенных действий сложения и умножения действительных чисел было рассмотрены в курсе алгебры 8 класса (см. также с. 10).

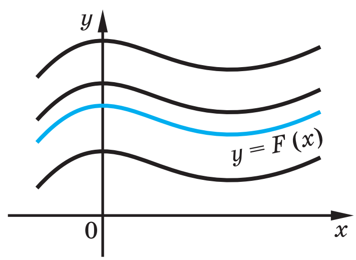
   Воспользовавшись тем, что произведение неотрицательных чисел $|x|$ и $|y|$ уже определено, полагают, что для действительных чисел разных знаков $xy = -|x| \cdot |y|$, а для чисел одинаковых знаков — $xy = |x| \cdot |y|$ (как обычно, модулем каждого из чисел $a_0,a_1a_2 \dots a_n \dots$ и $-a_0,a_1a_2 \dots a_n \dots$ называют число $a_0,a_1a_2 \dots a_n \dots$).

   Вычитание определяется как действие, обратное сложению: *разностью* $x - y$ чисел x и y называется такое число z, что $y + z = x$. Деление определяется как действие, обратное умножению: *частным* $x : y$ называется такое число z, что $yz = x$.
4. Показывают, что неравенства и арифметические операции, определенные выше, сохраняют основные свойства, присущие им во множестве рациональных чисел (соответствующие свойства для операций сложения и умножения приведены в § 22).

Раздел 2
Интеграл и его применение

§ 14 ПЕРВООБРАЗНАЯ И ЕЕ СВОЙСТВА

Таблица 18

1. Первообразная	
Определение	**Пример**
Функция $F(x)$ называется *первообразной для функции* $f(x)$ на заданном промежутке, если для любого x из этого промежутке $F'(x) = f(x)$.	Для функции $f(x) = x^3$ на интервале $(-\infty; +\infty)$ первообразной является функция $F(x) = \frac{x^4}{4}$, поскольку $$F'(x) = \left(\frac{x^4}{4}\right)' = \frac{1}{4} \cdot 4x^3 = x^3.$$
2. Основное свойство первообразной	
Свойство	**Геометрический смысл**
Если функция $F(x)$ является первообразной для функции $f(x)$ на данном промежутке, а C — произвольной постоянной, то функция $F(x) + C$ также является первообразной для функции $f(x)$, при этом любая первообразная для функции $f(x)$ на данном промежутке может быть записана в виде $F(x) + C$, где C — произвольная постоянная. Пример Поскольку функция $F(x) = \frac{x^4}{4}$ является первообразной для функции $f(x) = x^3$ на интервале $(-\infty; +\infty)$ (см. выше), то *общий вид всех первообразных для функции* $f(x) = x^3$ можно записать следующим образом: $\frac{x^4}{4} + C$, где C — произвольная постоянная.	*Графики любых первообразных для данной функции получаются один из другого параллельным переносом вдоль оси Oy.* 

Продолж. табл. 18

3. Неопределенный интеграл	
Определение	Пример
Совокупность всех первообразных для данной функции $f(x)$ называется неопределенным интегралом и обозначается символом $\int f(x)\,dx$, то есть $$\int f(x)\,dx = F(x) + C,$$ где $F(x)$ — одна из первообразных для функции $f(x)$, а C — произвольная постоянная.	$$\int x^3\,dx = \frac{x^4}{4} + C,$$ поскольку для функции $f(x) = x^3$ на интервале $(-\infty; +\infty)$ все первообразные можно записать следующим образом: $\frac{x^4}{4} + C$ (см. пункт 2 табл. 18).
4. Правила нахождения первообразных (правила интегрирования)	
1. Если F — первообразная для f, а G — первообразная для g, то $F + G$ — первообразная для $f + g$. *Первообразная для суммы равна сумме первообразных для слагаемых.*	**1.** $\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$ *Интеграл от суммы равен сумме интегралов от слагаемых.*
2. Если F — первообразная для f и c — постоянная, то cF — первообразная для функции cf.	**2.** $\int c \cdot f(x)\,dx = c \cdot \int f(x)\,dx$, где c — постоянная. *Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла.*
3. Если F — *первообразная для* f, а k и b — постоянные (причем $k \neq 0$), то $\frac{1}{k}F(kx+b)$ — первообразная для функции $f(kx + b)$.	**3.** $\int f(kx+b)\,dx = \frac{1}{k}F(kx+b) + C.$

5. Таблица первообразных (неопределенных интегралов)		
Функция $f(x)$	Общий вид первообразных $F(x) + C$, *где C — произвольная постоянная*	Запись с помощью неопределенного интеграла
0	C	$\int 0 \cdot dx = C$
1	$x + C$	$\int dx = x + C$
x^α $(\alpha \neq -1)$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$	$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$ $(\alpha \neq -1)$
$\frac{1}{x}$	$\ln\|x\| + C$	$\int \frac{dx}{x} = \ln\|x\| + C$

Продолж. табл. 18

$\sin x$	$-\cos x + C$	$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$
$\cos x$	$\sin x + C$	$\int \cos x\,dx = \sin x + C$
$\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\mathrm{tg}\,x + C$	$\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg}\,x + C$
$\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$-\mathrm{ctg}\,x + C$	$\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg}\,x + C$
e^x	$e^x + C$	$\int e^x dx = e^x + C$
a^x $(a > 0,\ a \neq 1)$	$\dfrac{a^x}{\ln a} + C$	$\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$

Объяснение и обоснование

1. Понятие первообразной. Основное свойство первообразной. В первом разделе мы по заданной функции находили ее производную и применяли эту операцию дифференцирования к решению разнообразных задач. Одной из таких задач было нахождение скорости и ускорения прямолинейного движения по известному закону изменения координаты $x(t)$ материальной точки:

$$v(t) = x'(t),\ a(t) = v'(t) = x''(t).$$

Например, если в начальный момент времени $t = 0$ скорость тела равна нулю, то есть $v(0) = 0$, то при свободном падении тело на момент времени t пройдет путь

$$s(t) = \frac{gt^2}{2}.$$

Тогда скорость и ускорение находят с помощью дифференцирования:

$$v(t) = s'(t) = \left(\frac{gt^2}{2}\right)' = \frac{g}{2}\cdot 2t = gt,\ \ a(t) = v'(t) = (gt)' = g.$$

Важно уметь не только находить производную заданной функции, но и решать обратную задачу: находить функцию $f(x)$ по ее заданной производной $f'(x)$. Например, в механике часто приходится определять координату $x(t)$, зная закон изменения скорости $v(t)$, а также определять скорость $v(t)$, зная закон изменения ускорения $a(t)$. Нахождение функции $f(x)$ по ее заданной производной $f'(x)$ называют операцией *интегрирования*.

Таким образом, операция интегрирования является обратной операции дифференцирования. Операция интегрирования позволяет по заданной производной $f'(x)$ найти (восстановить) функцию $f(x)$ (латинское слово *integratio* означает «восстановление»).

Приведем определения понятий, связанных с операцией интегрирования.

Функция $F(x)$ называется *первообразной для функции* $f(x)$ на данном промежутке, если для любого x из этого промежутка $F'(x) = f(x)$.

Например, для функции $f(x) = 3x^2$ на интервале $(-\infty; +\infty)$ первообразной является функция $F(x) = x^3$, поскольку $F'(x) = (x^3)' = 3x^2$.

Отметим, что функция $x^3 + 5$ имеет ту же производную $(x^3 + 5)' = 3x^2$. Следовательно, функция $x^3 + 5$ также является первообразной для функции $3x^2$ на множестве $\boldsymbol{R}$. Понятно, что вместо числа 5 можно подставить любое другое число. Поэтому задача нахождения первообразной имеет бесконечное множество решений. Найти все эти решения позволяет *основное свойство первообразной*.

Если функция $F(x)$ является первообразной для функции $f(x)$ на заданном промежутке, а C — произвольной постоянной, то функция $F(x) + C$ также является первообразной для функции $f(x)$, при этом любая первообразная для функции $f(x)$ на данном промежутке может быть записана в виде $F(x) + C$, где C — произвольная постоянная.

Выражение $F(x) + C$ называют *общим видом первообразных* для функции $f(x)$.

1) По условию функция $F(x)$ является первообразной для функции $f(x)$ на некотором промежутке I. Следовательно, $F'(x) = f(x)$ для любого x из этого промежутка I. Тогда

$$(F(x) + C)' = F'(x) + C' = f(x) + 0 = f(x),$$

то есть $F(x) + C$ также является первообразной для функции $f(x)$.

2) Пусть функция $F_1(x)$ — другая первообразная для функции $f(x)$ на том же промежутке I, то есть $F_1'(x) = f(x)$ для всех $x \in I$. Тогда

$$(F_1(x) - F(x))' = F'(x) - F_1'(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

По условию постоянства функции (с. 61), если производная функции $F_1(x) - F(x)$ равна нулю на промежутке I, то эта функция принимает некоторое постоянное значение C на этом промежутке. Следовательно, для всех $x \in I$ функция $F_1(x) - F(x) = C$. Отсюда $F_1(x) = F(x) + C$. Таким образом, любая первообразная для функции $f(x)$ на данном промежутке может быть записана в виде $F(x) + C$, где C — произвольная постоянная.

Например, поскольку для функции $f(x) = 2x$ на интервале $(-\infty; +\infty)$ одной из первообразных является функция $F(x) = x^2$ (действительно, $F'(x) = (x^2)' = 2x$), то общий вид всех первообразных функции $f(x) = 2x$ можно записать так: $x^2 + C$, где C — произвольная постоянная.

З а м е ч а н и е. Для краткости при нахождении первообразной функции $f(x)$ промежуток, на котором задана функция $f(x)$, чаще всего не указывают. При этом имеются в виду промежутки возможно большей длины.

Геометрически основное свойство первообразной означает, что *графики любых первообразных для данной функции $f(x)$ получаются друг из друга параллельным переносом вдоль оси Oy* (рис. 100). Действительно, график произвольной первообразной $F(x) + C$ можно получить из графика первообразной $F(x)$ параллельным переносом вдоль оси Oy на C единиц.

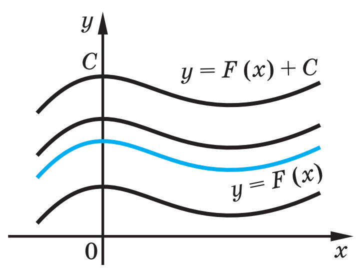


Рис. 100

2. Неопределенный интеграл. Пусть функция $f(x)$ имеет на некотором промежутке первообразную $F(x)$. Тогда по основному свойству первообразной совокупность всех первообразных для функции $f(x)$ на заданном промежутке задается формулой $F(x) + C$, где C — произвольная постоянная.

Совокупность всех первообразных для данной функции $f(x)$ называется *неопределенным интегралом* и обозначается символом $\int f(x)\,dx$, то есть

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C,$$

где $F(x)$ — одна из первообразных для функции $f(x)$, а C — произвольная постоянная.

В приведенном равенстве знак $\int$ называют знаком интеграла, функцию $f(x)$ — подынтегральной функцией, выражение $f(x)\,dx$ — подынтегральным выражением, переменную x — переменной интегрирования и слагаемое C — постоянной интегрирования.

Например, как отмечалось выше, общий вид первообразных для функции $f(x) = 2x$ записывается так: $x^2 + C$, следовательно, $\int 2x\,dx = x^2 + C$.

3. Правила нахождения первообразных (правила интегрирования). Эти правила аналогичны соответствующим правилам дифференцирования.

Правило 1. **Если F — первообразная для f, а G — первообразная для g, то $F + G$ — первообразная для $f + g$.**

Первообразная для суммы равна сумме первообразных для слагаемых.

Действительно, если F — первообразная для f (в этой кратком формулировке имеется в виду, что функция $F(x)$ — первообразная для функции $f(x)$), то $F' = f$. Аналогично, если G — первообразная для g, то $G' = g$. Тогда по правилу вычисления производной суммы имеем

$$(F + G)' = F' + G' = f + g,$$

а это и означает, что $F + G$ — первообразная для $f + g$.

С помощью неопределенного интеграла это правило можно записать так:

$$\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx,$$

то есть *интеграл от суммы равен сумме интегралов от слагаемых.*

Отметим, что правило 1 может быть распространено на любое количестве слагаемых (поскольку производная от любого количества слагаемых равна сумме производных слагаемых).

Правило 2. **Если F — первообразная для f и c — постоянная, то cF — первообразная для функции cf.**

Действительно, если F — первообразная для f, то $F' = f$. Учитывая, что постоянный множитель можно выносить за знак производной, имеем $(cF)' = cF' = cf$, следовательно, cF — первообразная для cf.

С помощью неопределенного интеграла это правило можно записать так:

$$\int c\cdot f(x)\,dx = c\cdot\int f(x)\,dx, \text{ где } c \text{ — постоянная,}$$

то есть *постоянный множитель можно выносить за знак интеграла*.

Правило 3. **Если F — первообразная для f, а k и b — постоянные (причем $k\neq 0$), то $\frac{1}{k}F(kx+b)$ — первообразная для функции $f(kx+b)$.**

Действительно, если F — первообразная для f, то $F'=f$. Учитывая правило вычисления производной сложной функции, имеем

$$\left(\frac{1}{k}F(kx+b)\right)' = \frac{1}{k}F'(kx+b)\cdot k = f(kx+b),$$

а это и означает, что $\frac{1}{k}F(kx+b)$ — первообразная для функции $f(kx+b)$.

С помощью неопределенного интеграла это правило можно записать так:

$$\int f(kx+b)\,dx = \frac{1}{k}F(kx+b)+C.$$

4. Таблица первообразных (неопределенных интегралов). Для вычисления первообразных (или неопределенных интегралов), кроме правил нахождения первообразных, полезно помнить табличные значения первообразных для некоторых функций, которые приведены в пункте 5 таблицы 18. Чтобы обосновать правильность этих формул, достаточно проверить, что производная от указанной первообразной (без постоянного слагаемого C) равна заданной функции. Это будет означать, что рассмотренная функция действительно является первообразной для заданной функции. Поскольку в записи всех первообразных во второй колонке присутствует постоянное слагаемое C, то по основному свойству первообразных можно сделать вывод, что это действительно общий вид всех первообразных заданной функции. Приведем обоснование формул для нахождения первообразных функций x^α и $\frac{1}{x}$, а для других функций предлагаем провести аналогичную проверку самостоятельно.

Для всех $x\in R$ при $\alpha\neq -1$ производная $\left(\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right)' = \frac{1}{\alpha+1}\cdot(\alpha+1)\cdot x^\alpha = x^\alpha$.

Следовательно, функция $\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ при $\alpha\neq -1$ является первообразной для функции x^α. Тогда по основному свойству первообразных **общий вид всех первообразных для функции x^α при $\alpha\neq -1$ будет**

$$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C.$$

С помощью неопределенного интеграла это утверждение записывается так:

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C \quad (\alpha\neq -1).$$

У функции $f(x)=\dfrac{1}{x}$ область определения $x \neq 0$. Рассмотрим функцию $F(x) = \ln|x|$ отдельно при $x > 0$ и при $x < 0$.

При $x > 0$ $F(x) = \ln x$, тогда $F'(x)=(\ln x)'=\dfrac{1}{x}.$

При $x < 0$ $F(x) = \ln(-x)$, тогда $F'(x)=(\ln(-x))'=\dfrac{1}{-x}\cdot(-x)'=\dfrac{1}{-x}\cdot(-1)=\dfrac{1}{x}.$

Следовательно, на каждом из промежутков $(-\infty;\ 0)$ и $(0;\ +\infty)$ функция $F(x) = \ln|x|$ является первообразной для функции $f(x)=\dfrac{1}{x}$. Тогда **общий вид всех первообразных для функции $f(x)=\dfrac{1}{x}$ будет $\ln|x|+C$.**

С помощью неопределенного интеграла это утверждение записывается так:

$$\int\frac{dx}{x}=\ln|x|+C.$$

Примеры решения задач

Задача 1 Проверьте, что функция $F(x)=2\sqrt{x}$ является первообразной для функции $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ на промежутке $(0;\ +\infty)$.

Решение

$F'(x)=\left(2\sqrt{x}\right)'=2\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}}=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$, а это и означает, что $F(x)$ является первообразной для функции $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

Комментарий

По определению функция $F(x)$ является первообразной для функции $f(x)$, если $F'(x) = f(x)$.

Задача 2 1) Найдите одну из первообразных для функции $f(x) = x^4$ на $\boldsymbol{R}$.
2) Найдите все первообразные для функции $f(x) = x^4$.
3*) Найдите $\int x^4dx$.

Решение

1) Одной из первообразных для функции $f(x) = x^4$ на множестве $\boldsymbol{R}$ будет функция $F(x)=\dfrac{x^5}{5}$, поскольку

$$F'(x)=\left(\frac{x^5}{5}\right)'=\frac{1}{5}\cdot 5x^4=x^4.$$

Комментарий

1) Первообразную для функции $f(x) = x^4$ можно попытаться найти подбором. При этом можно рассуждать так: чтобы после нахождения производной получить x^4, необходимо брать производную от x^5. Но $(x^5)' = 5x^4$. Чтобы производная равнялась x^4, достаточно поставить перед функцией x^5 коэффициент $\dfrac{1}{5}$.

Проще непосредственно использовать формулу из пункта 5 таблицы 17: *одной из первообразных для функции x^{α} является функция* $\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$.

▶ 2) По основному свойству первообразных все первообразные для функции $f(x) = x^4$ можно записать в виде $\frac{x^5}{5}+C$, где C — произвольная постоянная. ◁

2) *если мы знаем одну первообразную $F(x)$ для функции $f(x)$, то* по основному свойству первообразных *любую первообразную для функции $f(x)$ можно записать в виде $F(x)+C$,* где C — произвольная постоянная.

▶ 3*) $\int x^4dx=\frac{x^5}{5}+C$, где C — произвольная постоянная. ◁

3) По определению $\int f(x)\,dx=F(x)+C$, то есть неопределенный интеграл $\int f(x)\,dx$ — это просто специальное обозначение общего вида всех первообразных для данной функции $f(x)$ (которые мы уже нашли в пункте 2 решения).

Задача 3 Для функции $f(x)=\sqrt{x}$ найдите первообразную, график которой проходит через точку M (9; 10).

Решение

▶ $D(f) = [0; +\infty)$. Тогда $f(x)=x^{\frac{1}{2}}$.

Общий вид всех первообразных для функции $f(x)$ следующий:

$$\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}+C=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+C=\frac{2}{3}\sqrt{x^3}+C=\frac{2}{3}x\sqrt{x}+C.$$

По условию график первообразной проходит через точку M (9; 10). Следовательно, при $x = 9$ получаем

$$\frac{2}{3}\cdot 9\sqrt{9}+C=10.$$

Отсюда $C = -8$. Тогда искомая первообразная:

$$\frac{2}{3}x\sqrt{x}-8. \triangleleft$$

Комментарий

Сначала запишем общий вид первообразных для заданной функции $F(x) + C$, затем воспользуемся тем, что график полученной функции проходит через точку M (9; 10). Следовательно, при $x = 9$ значение функции $F(x) + C$ равно 10. Чтобы найти первообразную для функции $f(x)=\sqrt{x}$, учтем, что область определения этой функции $x \geqslant 0$. Тогда эту функцию можно записать так: $f(x)=x^{\frac{1}{2}}$ и использовать формулу нахождения первообразной для функции x^{α}, а именно: $\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C$.

Задача 4* Найдите общий вид первообразных для функции $f(x)=\frac{1}{\sin^2 2x}+\frac{1}{\sqrt{2-x}}-2\cos 3x.$

Решение

▶ Запишем одну из первообразных для каждого слагаемого.

Для функции $\frac{1}{\sin^2 2x}$ первообразной является функция $-\frac{1}{2}\text{ctg}\,2x.$

Второе слагаемое запишем так: $\frac{1}{\sqrt{2-x}}=(2-x)^{-\frac{1}{2}}.$ Тогда первообразной для этой функции будет функция:

$$\frac{1}{-1}\cdot\frac{(2-x)^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}=-2\,(2-x)^{\frac{1}{2}}=-2\sqrt{2-x}.$$

Первообразной для функции $2\cos 3x$ будет функция $2\cdot\frac{1}{3}\sin 3x=\frac{2}{3}\sin 3x.$

Тогда общий вид первообразных для заданной функции будет:

$$-\frac{1}{2}\,\text{ctg}\,2x-2\sqrt{2-x}-\frac{2}{3}\sin 3x+C.$$ ◁

Комментарий

Используем правила нахождения первообразных. Сначала обратим внимание на то, что заданная функция является алгебраической суммой трех слагаемых. Следовательно, ее первообразная равна соответствующей алгебраической сумме первообразных для слагаемых (правило 1). Затем учтем, что все функции-слагаемые являются сложными функциями от аргументов вида $kx+b$. Следовательно, по правилу 3 мы должны перед каждой функцией-первообразной (аргумента $kx+b$), которую мы получим по таблице первообразных, поставить множитель $\frac{1}{k}$.

Для каждого из слагаемых удобно сначала записать одну из первообразных (без постоянного слагаемого C), а затем уже записать общий вид первообразных для заданной функции (прибавить к полученной функции постоянное слагаемое C).

Для третьего слагаемого также учтем, что постоянный множитель 2 можно поставить перед соответствующей первообразной (правило 2).

Для первого слагаемого учитываем (см. таблицу первообразных, с. 188), что первообразной для $\frac{1}{\sin^2 x}$ является $(-\text{ctg}\,x)$, для второго — первообразной для x^α является $\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$, для третьего — первообразной для $\cos x$ является $\sin x$ (конечно, преобразование второго слагаемого выполняются на области определения этой функции, то есть при $2-x>0$).

Вопросы для контроля

1. Объясните, в каком случае функция $F(x)$ называется первообразной для функции $f(x)$ на заданном промежутке. Приведите примеры.
2. Сформулируйте основное свойство первообразных и проиллюстрируйте его на примерах.
3*. Сформулируйте определение неопределенного интеграла. Приведите примеры его вычисления.
4. Сформулируйте правила нахождения первообразных. Объясните их на примерах.
5*. Докажите правила нахождения первообразных.
6*. Запишите и сформулируйте правила нахождения первообразных с помощью неопределенных интегралов.
7*. Запишите и докажите общий вид первообразных для функций:

$$x^{\alpha}\ (\alpha \neq -1),\ \frac{1}{x},\ \sin x,\ \cos x,\ \frac{1}{\cos^2 x},\ \frac{1}{\sin^2 x},\ e^x,\ a^x\ (a > 0,\ a \neq 1).$$

Запишите соответствующие формулы с помощью неопределенного интеграла.

Упражнения

Докажите, что функция $F(x)$ — первообразная для функции $f(x)$ на указанном промежутке **(1—2)**.

1°. 1) $F(x) = x^5$, $f(x) = 5x^4$, $x \in (-\infty;\ \infty)$;

2) $F(x) = x^{-3}$, $f(x) = -3x^{-4}$, $x \in (0;\ \infty)$;

3) $F(x) = \frac{1}{7}x^7$, $f(x) = x^6$, $x \in (-\infty;\ \infty)$;

4) $F(x) = -\frac{1}{6}x^{-6}$, $f(x) = x^{-7}$, $x \in (0;\ \infty)$.

2. 1) $F(x) = \sin^2 x$, $f(x) = \sin 2x$, $x \in \boldsymbol{R}$;

2) $F(x) = \frac{1}{2}\cos 2x$, $f(x) = -\sin 2x$, $x \in \boldsymbol{R}$;

3) $F(x) = \sin 3x$, $f(x) = 3\cos 3x$, $x \in \boldsymbol{R}$;

4) $F(x) = 3 + \operatorname{tg}\frac{x}{2}$, $f(x) = \dfrac{1}{2\cos^2 \frac{x}{2}}$, $x \in (-\pi;\ \pi)$.

3. Проверьте, что функция $F(x)$ является первообразной для функции $f(x)$. Найдите общий вид первообразных для f, если:

1) $F(x) = \sin x - x\cos x$, $f(x) = x\sin x$;

2) $F(x) = \sqrt{x^2+1}$, $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$; 3) $F(x) = \cos x + x\sin x$, $f(x) = x\cos x$;

4) $F(x) = x - \frac{1}{x}$, $f(x) = \dfrac{1+x^2}{x^2}$.

Определите, является ли функция $F(x)$ первообразной для функции $f(x)$ на указанном промежутке **(4–5)**.

4°. 1) $F(x) = 3 - \sin x$, $f(x) = \cos x$, $x \in (-\infty; \infty)$;

2) $F(x) = 5 - x^4$, $f(x) = -4x^3$, $x \in (-\infty; \infty)$;

3) $F(x) = \cos x - 4$, $f(x) = -\sin x$, $x \in (-\infty; \infty)$;

4) $F(x) = x^{-2} + 2$, $f(x)=\dfrac{1}{2x^3}$, $x \in (0; \infty)$.

5. 1) $F(x)=2x+\cos\dfrac{x}{2}$; $f(x)=2-\dfrac{1}{2}\sin\dfrac{x}{2}$, $x \in \boldsymbol{R}$;

2) $F(x)=\sqrt{4-x^2}$, $f(x)=-\dfrac{x}{\sqrt{4-x^2}}$, $x \in (-2; 2)$;

3) $F(x)=\dfrac{1}{x^2}$, $f(x)=14-\dfrac{1}{x^2}$, $x \in (0; \infty)$;

4) $F(x)=4x\sqrt{x}$, $f(x)=6\sqrt{x}$, $x \in (0; \infty)$.

6°. Найдите общий вид первообразных для функции **(6–8)**.

1) $f(x) = 2 - x^4$; 2) $f(x) = x + \cos x$; 3) $f(x) = 4x$; 4) $f(x) = -8$;

5) $f(x) = x^6$; 6) $f(x)=\dfrac{1}{x^3}-2$; 7) $f(x)=1-\dfrac{1}{x^4}$; 8) $f(x) = x^3$.

7*. 1) $f(x)=2-x^3+\dfrac{1}{x^3}$; 2) $f(x)=x-\dfrac{2}{x^5}+\cos x$; 3) $f(x)=\dfrac{1}{x^2}-\sin x$;

4) $f(x) = 5x^2 - 1$; 5) $f(x) = (2x - 8)^5$; 6) $f(x) = 3\sin 2x$;

7) $f(x) = (4 - 5x)^7$; 8) $f(x)=-\dfrac{1}{3}\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$; 9) $f(x)=\dfrac{3}{(4-15x)^4}$;

10) $f(x)=\dfrac{2}{\cos^2\left(\dfrac{\pi}{3}-x\right)}$; 11) $f(x)=\dfrac{4}{(3x-1)^2}$; 12) $f(x)=-\dfrac{2}{x^5}+\dfrac{1}{\cos^2(3x-1)}$.

8*. 1) $f(x)=1-\cos 3x+2\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-x\right)$; 2) $f(x)=\dfrac{1}{\sin^2 4x}+\dfrac{1}{\sqrt{2-x}}-3x^2$;

3) $f(x)=\dfrac{2}{\cos^2(3x+1)}-3\sin(4-x)+2x$; 4) $f(x)=\dfrac{1}{(3-2x)^3}+\dfrac{3}{\sqrt{5x-2}}-2\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)$.

9. Для функции $f(x)$ найдите первообразную $F(x)$, принимающую заданное значение в указанной точке:

1) $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$, $F\left(\dfrac{1}{2}\right)=-12$; 2) $f(x)=\dfrac{1}{\cos^2 x}$, $F\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=0$;

3) $f(x) = x^3$, $F(-1) = 2$; 4) $f(x) = \sin x$, $F(-\pi) = -1$.

Для функции $f(x)$ найдите первообразную, график которой проходит через точку M **(10–12)**.

10. 1) $f(x) = 2x + 1$, $M(0; 0)$; 2) $f(x) = 3x^2 - 2x$, $M(1; 4)$;
3) $f(x) = x + 2$, $M(1; 3)$; 4) $f(x) = -x^2 + 3x$, $M(2; -1)$.

11°. 1) $f(x) = 2\cos x$, $M\left(-\frac{\pi}{2}; 1\right)$; 2) $f(x) = 1 - x^2$, $M(-3; 9)$;
3) $f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$, $M\left(\frac{2\pi}{3}; -1\right)$; 4) $f(x) = \frac{1}{x^4}$, $M\left(\frac{1}{2}; 3\right)$.

12. 1) $f(x) = 4x + \frac{1}{x^2}$, $M(-1; 4)$; 2) $f(x) = x^3 + 2$, $M(2; 15)$;
3) $f(x) = 1 - 2x$, $M(3; 2)$; 4) $f(x) = \frac{1}{x^2} - 10x^4 + 3$, $M(1; 5)$.

13*. Скорость точки, которая двигается прямолинейно, задана формулой $v(t) = t^2 + 2t - 1$. Запишите формулу зависимости ее координаты x от времени t, если известно, что в начальный момент времени ($t = 0$) точка находилась в начале координат.

14*. Скорость точки, которая двигается прямолинейно, задана формулой $v(t) = 2\cos\frac{t}{2}$. Запишите формулу зависимости координаты точки от времени, если известно, что в момент $t = \frac{\pi}{3}$ с точка находилась на расстоянии 4 м от начала координат.

15*. Точка двигается прямолинейно с ускорением $a(t) = 12t^2 + 4$. Найдите закон движения точки, если в момент $t = 1$ с ее скорость равна 10 м/с, а координата равна 12 (единица измерения a равна 1 м/с^2).

16*. Материальная точка массой m двигается по оси Ox под действием силы, направленной вдоль этой оси. В момент времени t сила равна $F(t)$. Найдите формулу зависимости $x(t)$ от времени t, если известно, что при $t = t_0$ скорость точки равна v_0, а координата равна x_0 ($F(t)$ измеряется в ньютонах, t — в секундах, v — в метрах в секунду, m — в килограммах):

1) $F(t) = 6 - 9t$, $t_0 = 1$, $v_0 = 4$, $x_0 = -5$, $m = 3$;
2) $F(t) = 14\sin t$, $t_0 = \pi$, $v_0 = 2$, $x_0 = 3$, $m = 7$;
3) $F(t) = 25\cos t$, $t_0 = \frac{\pi}{2}$, $v_0 = 2$, $x_0 = 4$, $m = 5$;
4) $F(t) = 8t + 8$, $t_0 = 2$, $v_0 = 9$, $x_0 = 7$, $m = 4$.

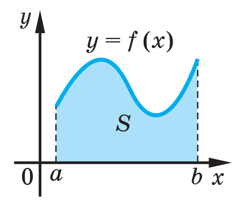
§ 15 ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ

15.1. Геометрический смысл и определение определенного интеграла

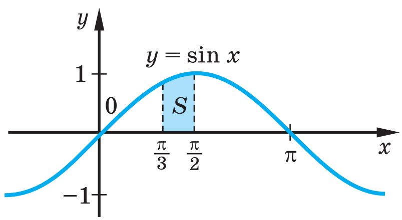
Таблица 19

<table>
<tr><td colspan="2">1. Вычисление определенного интеграла (формула Ньютона—Лейбница)</td></tr>
<tr><td>Формула</td><td>Пример</td></tr>
<tr><td>Если функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a; b]$, а $F(x)$ — произвольная ее первообразная на этом отрезке (то есть $F'(x) = f(x)$), то

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$</td><td>Так как для функции $f(x) = x^2$ одной из первообразных является $F(x) = \frac{x^3}{3}$, то

$$\int_1^2 x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_1^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3} = 2\frac{1}{3}$$</td></tr>
<tr><td colspan="2">2. Криволинейная трапеция</td></tr>
<tr><td>Определение</td><td>Иллюстрация</td></tr>
<tr><td>Пусть на отрезке $[a; b]$ оси Ox задана непрерывная функция $f(x)$, принимающая на этом отрезке только неотрицательные значения. **Фигуру, ограниченную графиком функции $y = f(x)$, отрезком $[a; b]$ оси Ox и прямыми $x = a$ и $x = b$ называют *криволинейной трапецией*.**</td><td>
</td></tr>
<tr><td colspan="2">3. Площадь криволинейной трапеции</td></tr>
<tr><td>Формула</td><td>Пример</td></tr>
<tr><td>$$S = \int_a^b f(x)\,dx$$</td><td>Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \sin x$, $y = 0$,

$$x = \frac{\pi}{3},\quad x = \frac{\pi}{2}.$$



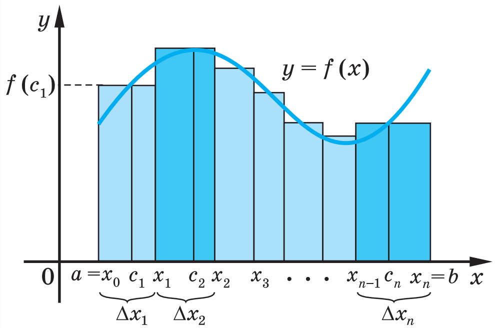
▶ Изображая эти линии, видим, что заданная фигура — криволинейная трапеция. Тогда

$$S = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx = -\cos x\Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = -\cos\frac{\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}.$$ ◁</td></tr>
</table>

Продолж. табл. 19

4. Свойства определенных интегралов		
$\int\limits_a^a f(x)\,dx=0$	$\int\limits_a^b f(x)\,dx=-\int\limits_b^a f(x)\,dx$	$\int\limits_a^b (f(x)+g(x))\,dx=\int\limits_a^b f(x)\,dx+\int\limits_a^b g(x)\,dx$
$\int\limits_a^b k\cdot f(x)\,dx=k\cdot\int\limits_a^b f(x)\,dx$	Если функция $f(x)$ интегрируема на $[a; b]$ и $c\in[a; b]$, то $\int\limits_a^b f(x)\,dx=\int\limits_a^c f(x)\,dx+\int\limits_c^b f(x)\,dx$	

5. Определение определенного интеграла через интегральные суммы



Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$.

Выполним следующие операции.

1. Разобьем отрезок $[a; b]$ на n отрезков точками $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ (полагаем, что $a = x_0$, $b = x_n$).
2. Обозначим длину первого отрезка через Δx_1, второго — через Δx_2 и т. д. (то есть $\Delta x_1 = x_1 - x_0$, $\Delta x_2 = x_2 - x_1, \ldots, \Delta x_n = x_n - x_{n-1}$).
3. На каждом из полученных отрезков выберем произвольную точку $c_i \in [x_{i-1}; x_i]$, где $i = 1, 2, \ldots, n$.
4. Составим **сумму** $S_n = f(c_1)\,\Delta x_1 + f(c_2)\,\Delta x_2 + \ldots + f(c_n)\,\Delta x_n$.

   Эту сумму **называют *интегральной суммой функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$*.**

Если $n \to \infty$ и длины отрезков разбиения стремятся к нулю, то интегральная сумма S_n стремится к некоторому числу, которое называют определенным интегралом функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$ и обозначают $\int\limits_a^b f(x)\,dx$.

Объяснение и обоснование

1. Геометрический смысл и определение определенного интеграла. Как отмечалось в § 14, интегрирование — это действие, обратное дифференцированию. Оно позволяет по заданной производной функции найти (восстановить) эту функцию. Покажем, что эта операция тесно связана с задачей вычисления площади.

Например, в механике часто приходится определять координату $x(t)$ точки при прямолинейном движении, зная закон изменения ее скорости $v(t)$ (напомним, что $v(t) = x'(t)$).

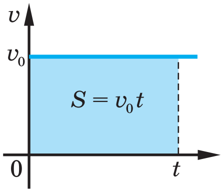


Рис. 101

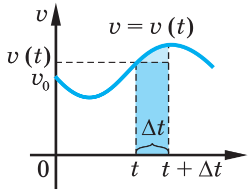


Рис. 102

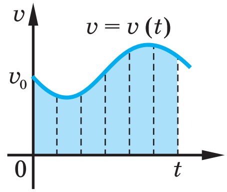


Рис. 103

Рассмотрим сначала случай, когда точка двигается с постоянной скоростью $v = v_0$. Графиком скорости в системе координат $(t;\ v)$ является прямая $v = v_0$, параллельная оси времени t (рис. 101). Если считать, что в начальный момент времени $t = 0$ точка находилась в начале координат, то ее путь s, пройденный за время t, вычисляется по формуле $s = v_0 t$. Величина $v_0 t$ равна площади прямоугольника, ограниченного графиком скорости, осью абсцисс и двумя вертикальными прямыми, то есть путь точки можно вычислить как площадь под графиком скорости.

Рассмотрим случай неравномерного движения. Теперь скорость можно считать постоянной только на маленьком отрезке времени Δt. Если скорость v изменяется по закону $v = v\,(t)$, то путь, пройденный за отрезок времени $[t;\ t + \Delta t]$, приближенно выражается произведением $v\,(t)\,\Delta t$. А на графике это произведение равно площади прямоугольника со сторонами Δt и $v\,(t)$ (рис. 102). Точное значение пути за отрезок времени $[t;\ t + \Delta t]$ равно площади *криволинейной трапеции*, выделенной на этом рисунке. Тогда весь путь за отрезок времени $[0;\ t]$ может быть вычислен в результате сложения площадей таких криволинейных трапеций, то есть путь будет равняться площади заштрихованной фигуры под графиком скорости (рис. 103).

Приведем соответствующие определения и обоснования, которые позволяют сделать эти рассуждения более строгими.

Пусть на отрезке $[a;\ b]$ оси Ox задана непрерывная функция $f\,(x)$, которая принимает на этом отрезке только положительные значения. Фигуру, ограниченную графиком функции $y = f\,(x)$, отрезком $[a;\ b]$ оси Ox и прямыми $x = a$ и $x = b$, называют *криволинейной трапецией* (рис. 104).

Отрезок $[a;\ b]$ называют *основанием этой криволинейной трапеции.*

Выясним, как можно вычислить площадь криволинейной трапеции с помощью первообразной для функции $f\,(x)$.

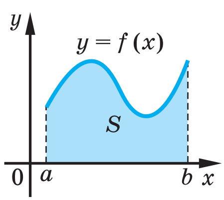
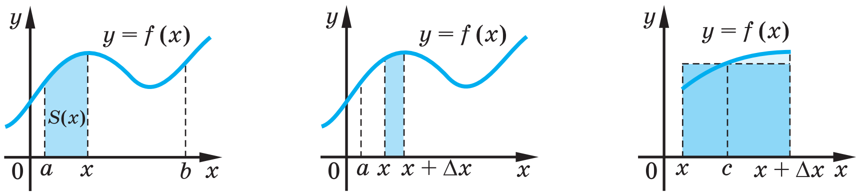


Рис. 104

Обозначим через $S\,(x)$ площадь криволинейной трапеции с основанием $[a;\ x]$ (рис. 105, *а*), где x — любая точка отрезка $[a;\ b]$. При $x = a$ отрезок $[a;\ x]$ вырождается в точку, и поэтому $S\,(a) = 0$, при $x = b$ имеем $S\,(b) = S$, где S — площадь криволинейной трапеции с основанием $[a;\ b]$ (см. рис. 104).



а *б* *в*

Рис. 105

Покажем, что $S(x)$ *является первообразной для функции* $f(x)$, то есть что $S'(x) = f(x)$.

По определению производной нам необходимо доказать, что $\frac{\Delta S}{\Delta x} \to f(x)$ при $\Delta x \to 0$. Для упрощения рассуждений рассмотрим случай $\Delta x > 0$ (случай $\Delta x < 0$ рассматривается аналогично).

Поскольку $\Delta S = S(x + \Delta x) - S(x)$, то геометрически ΔS — площадь фигуры, выделенной на рисунке 105, *б*.

Рассмотрим теперь прямоугольник с такой же площадью ΔS, одной из сторон которого является отрезок $[x; x + \Delta x]$ (рис. 105, *в*). Поскольку функция $f(x)$ непрерывна, то верхняя сторона этого прямоугольника пересекает график функции в некоторой точке с абсциссой $c \in [x; x + \Delta x]$ (иначе, рассмотренный прямоугольник или содержит криволинейную трапецию, выделенную на рисунке 105, *в*, или содержится в ней, и соответственно его площадь будет больше или меньше площади ΔS). Высота прямоугольника равна $f(c)$.

По формуле площади прямоугольника имеем $\Delta S = f(c)\,\Delta x$. Тогда $\frac{\Delta S}{\Delta x} = \frac{f(c)\Delta x}{\Delta x} = f(c)$. (Эта формула будет верной и при $\Delta x < 0$.)

Поскольку точка c лежит между x и $x + \Delta x$, то c стремится к x, если $\Delta x \to 0$. Учитывая непрерывность функции $f(x)$, также получаем, что

$$f(c) \to f(x) \text{ при } \Delta x \to 0.$$

Следовательно, $\frac{\Delta S}{\Delta x} \to f(x)$ при $\Delta x \to 0$. А это и означает, что $S'(x) = f(x)$, то есть $S(x)$ является первообразной для функции $f(x)$.

Поскольку $S(x)$ является первообразной для функции $f(x)$, то по основному свойству первообразных любая другая первообразная $F(x)$ для функции $f(x)$ для всех $x \in [a; b]$ отличается от $S(x)$ на постоянную C, то есть

$$F(x) = S(x) + C. \qquad (1)$$

Чтобы найти C, подставим $x = a$. Получаем $F(a) = S(a) + C$. Поскольку $S(a) = 0$, то $C = F(a)$, и равенство (1) можно записать так:

$$S(x) = F(x) - F(a). \qquad (2)$$

Учитывая, что площадь криволинейной трапеции равна $S(b)$, подставляем в формулу (2) $x = b$ и получаем $S = S(b) = F(b) - F(a)$. Следовательно,

площадь криволинейной трапеции (рис. 104) можно вычислить по формуле

$$S = F(b) - F(a), \tag{3}$$

где $F(x)$ — произвольная первообразная для функции $f(x)$.

Таким образом, вычисление площади криволинейной трапеции сводится к нахождению первообразной $F(x)$ для функции $f(x)$, то есть к интегрированию функции $f(x)$.

Разность $F(b) - F(a)$ называют определенным интегралом функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$ и обозначают так: $\int\limits_a^b f(x)\,dx$.

Запись $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ читается: «Интеграл от a до b эф от икс де икс». Числа a и b называются *пределами интегрирования*: a — нижним пределом, b — верхним. Следовательно, по приведенному определению

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a). \tag{4}$$

Формулу (4) называют **формулой Ньютона–Лейбница.**

Вычисляя определенный интеграл, удобно разность $F(b) - F(a)$ обозначать следующим образом: $F(x)\Big|_a^b$, то есть $F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$. Пользуясь этим обозначением, формулу Ньютона–Лейбница можно записать в следующем виде:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Например, поскольку для функции $f(x) = e^x$ одной из первообразных является $F(x) = e^x$, то

$$\int\limits_0^1 e^x\,dx = e^x\Big|_0^1 = e^1 - e^0 = e - 1.$$

Отметим, что в том случае, когда для функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$ существует определенный интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$, функцию $f(x)$ называют *интегрируемой на отрезке* $[a; b]$.

Из формул (3) и (4) получаем, что *площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком непрерывной и неотрицательной на отрезке* $[a; b]$ *функции* $y = f(x)$, *отрезком* $[a; b]$ *оси* Ox *и прямыми* $x = a$ *и* $x = b$ (рис. 104), *можно вычислить по формуле*

$$S = \int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

Например, площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $y = \cos x$, отрезком $\left[0; \frac{\pi}{6}\right]$ оси Ox и прямыми $x = 0$ и $x = \frac{\pi}{6}$ (рис. 106), можно вычислить по формуле

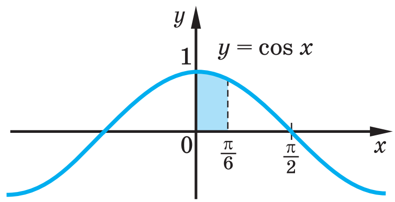


Рис. 106

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos x\, dx = \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = \sin \frac{\pi}{6} - \sin 0 = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}.$$

(При вычислении определенного интеграла учтено, что для функции $f(x) = \cos x$ одной из первообразных является функция $F(x) = \sin x$.)

З а м е ч а н и е. В задачах из курса алгебры и начал анализа на вычисление площадей как ответ чаще всего приводится числовое значение площади. Поскольку на координатной плоскости, где изображается фигура, всегда указывается единица измерения по осям, то в этом случае мы всегда имеем и единицу измерения площади — квадрат со стороной 1. Иногда, чтобы подчеркнуть, что полученное число выражает именно площадь, ответ записывают так: $S = \frac{1}{2}$ (кв. ед.), то есть квадратных единиц. Отметим, что так записываются только числовые ответы. Если в результате вычисления площади мы получили, например, что $S = 2a^2$, то никаких обозначений квадратных единиц не записывается, поскольку отрезок a был измерен в каких-то линейных единицах и тогда выражение a^2 уже содержит информацию о тех квадратных единицах, в которых измеряется площадь в этом случае.

2. Свойства определенных интегралов. При формулировании определения определенного интеграла мы полагали, что $a < b$. Удобно расширить понятие определенного интеграла и для случая $a > b$ принять по определению, что

$$\int_a^b f(x)\, dx = -\int_b^a f(x)\, dx. \qquad (5)$$

Для случая $a = b$ также по определению будем считать, что

$$\int_a^a f(x)\, dx = 0. \qquad (6)$$

Отметим, что формальное применение формулы Ньютона–Лейбница к вычислению интегралов в формулах (5) и (6) дает такой же результат. Действительно, если функция $F(x)$ является первообразной для функции $f(x)$, то

$\int_a^a f(x)\, dx = F(x)\Big|_a^a = F(a) - F(a) = 0.$ Также

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a) = -(F(a) - F(b)) = -\int_b^a f(x)\, dx.$$

С помощью формулы Ньютона–Лейбница легко обосновываются и другие свойства определенных интегралов, приведенные в пункте 4 таблицы 18.

- Если $F(x)$ является первообразной для функции $f(x)$, то для функции $kf(x)$ первообразной будет функция $kF(x)$. Тогда

$\int\limits_a^b kf(x)\,dx = kF(x)\Big|_a^b = kF(b) - kF(a) = k(F(b) - F(a)) = k\int\limits_a^b f(x)\,dx.$ Следовательно,

$$\int\limits_a^b k\cdot f(x)\,dx = k\cdot\int\limits_a^b f(x)\,dx. \qquad (7)$$

- Если $F(x)$ является первообразной для функции $f(x)$, а $G(x)$ — первообразной для функции $g(x)$, то для функции $f(x) + g(x)$ первообразной будет функция $F(x) + G(x)$. Тогда

$$\int\limits_a^b (f(x)+g(x))\,dx = (F(x)+G(x))\Big|_a^b = (F(b)+G(b)) - (F(a)+G(a)) =$$

$$= (F(b)-F(a)) + (G(b)-G(a)) = \int\limits_a^b f(x)\,dx + \int\limits_a^b g(x)\,dx.$$

Следовательно,

$$\int\limits_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \int\limits_a^b f(x)\,dx + \int\limits_a^b g(x)\,dx. \qquad (8)$$

- Если $F(x)$ является первообразной для функции $f(x)$ и $c \in [a; b]$, то

$$\int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^c + F(x)\Big|_c^b = F(c) - F(a) + F(b) - F(c) =$$

$$= F(b) - F(a) = \int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

Следовательно, если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a; b]$ и $c \in [a; b]$, то

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^b f(x)\,dx.$$

3. Определение определенного интеграла через интегральные суммы. Исторически интеграл возник в связи с вычислением площадей фигур, ограниченных кривыми, в частности, в связи с вычислением площади криволинейной трапеции.

Рассмотрим криволинейную трапецию, изображенную на рисунке 107 (функция $f(x)$ — непрерывна на отрезке $[a; b]$). На этом рисунке основание трапеции— отрезок $[a; b]$ — разбито на n отрезков (не обязательно равных) точками $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ (для удобства будем считать, что $a = x_0$, $b = x_n$). Через эти точки проведены вертикальные прямые. На первом отрезке выбрана произвольная точка c_1, и на этом отрезке как на основании построен прямоугольник с высотой $f(c_1)$. Аналогично на втором отрезке выбрана произвольная точка c_2, и на этом отрезке как на основании построен прямоугольник с высотой $f(c_2)$ и т. д.

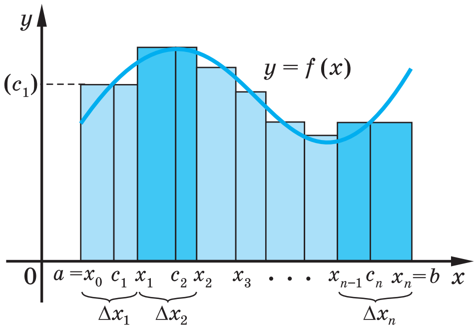


Рис. 107

Площадь S заданной криволинейной трапеции приближенно равна сумме площадей построенных прямоугольников. Обозначим эту сумму через S_n, длину первого отрезка через Δx_1, второго — через Δx_2 и т. д. (то есть $\Delta x_1 = x_1 - x_0$, $\Delta x_2 = x_2 - x_1$, ..., $\Delta x_n = x_n - x_{n-1}$). Тогда

$$S_n = f(c_1)\,\Delta x_1 + f(c_2)\,\Delta x_2 + \ldots + f(c_n)\,\Delta x_n. \tag{9}$$

Следовательно, площадь S криволинейной трапеции можно приближенно вычислять по формуле (9), то есть $S \approx S_n$.

Сумму (9) называют *интегральной суммой функции* $f(x)$ *на отрезке* $[a; b]$. При этом считают, что функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и может принимать любые значения: положительные, отрицательные и равные нулю (а не только неотрицательные, как для случая криволинейной трапеции). Если $n \to \infty$ и длины отрезков, на которые разбито основание трапеции, стремятся к нулю, то интегральная сумма S_n стремится к некоторому числу, которое называют определенным интегралом функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$ и обозначают $\int\limits_a^b f(x)\,dx$. Можно доказать, что при этом также выполняется формула Ньютона – Лейбница и все рассмотренные свойства определенного интеграла.

Замечание. Изменяя способ разбиения отрезка $[a; b]$ на n частей (то есть фиксируя другие точки $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$) и выбирая на каждом из полученных отрезков другие точки c_i (где $c_i \in [x_{i-1}; x_i]$, $i = 1, 2, \ldots, n$), мы будем получать для функции $f(x)$ другие интегральные суммы. В курсе математического анализа доказывается, что для любой непрерывной на отрезке $[a; b]$ функции $f(x)$ независимо от способа разбиения этого отрезка и выбора точек c_i, если $n \to \infty$ и длины отрезков стремятся к нулю, то интегральные суммы S_n стремятся к одному и тому же числу.

Определение определенного интеграла через интегральные суммы позволяет приближенно вычислять определенные интегралы по формуле (9). Но такой способ требует громоздких вычислений, и его используют в тех случаях, когда для функции $f(x)$ не удается найти первообразную (в этих случаях приближенное вычисление определенного интеграла обычно проводят на компьютере с использованием специальных программ). Если же первообразная для функции $f(x)$ известна, то интеграл можно вычислить точно, используя формулу Ньютона–Лейбница (см. пример в пункте 1 таблицы 19 и примеры, приведенные далее).

Примеры решения задач

Задача 1 Вычислите $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x}$.

Решение

▶ $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} - \operatorname{tg} 0 = 1 - 0 = 1.$

Ответ: 1. ◁

Комментарий

Поскольку для функции $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ мы знаем первообразную — это $F(x) = \operatorname{tg} x$ (см. табл. 18), то заданный интеграл вычисляется непосредственным применением формулы Ньютона–Лейбница

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Задача 2 Вычислите $\int\limits_1^3 \left(\frac{4}{x} - x\right) dx$.

Решение

I способ

▶ Для функции $f(x) = \frac{4}{x} - x$ одной из первообразных является $F(x) = 4\ln|x| - \frac{x^2}{2}$. Тогда

$$\int\limits_1^3 \left(\frac{4}{x} - x\right) dx = \left(4\ln|x| - \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_1^3 =$$

$$= \left(4\ln|3| - \frac{3^2}{2}\right) - \left(4\ln|1| - \frac{1^2}{2}\right) = 4\ln 3 - 4.$$ ◁

II способ

▶ $$\int\limits_1^3 \left(\frac{4}{x} - x\right) dx = \int\limits_1^3 \frac{4dx}{x} - \int\limits_1^3 x\,dx =$$

$$= 4\int\limits_1^3 \frac{dx}{x} - \int\limits_1^3 x\,dx = 4\ln|x|\Big|_1^3 - \frac{x^2}{2}\Big|_1^3 =$$

$$= 4(\ln|3| - \ln|1|) - \left(\frac{3^2}{2} - \frac{1^2}{2}\right) = 4\ln 3 - 4.$$ ◁

Комментарий

Возможны два способа вычисления заданного интеграла.

1) Сначала найти первообразную для функции $f(x) = \frac{4}{x} - x$, используя правила вычисления первообразных и таблицу первообразных, а затем найти интеграл по формуле Ньютона–Лейбница.

2) Использовать формулу (8)

$$\int\limits_a^b (f(x) + g(x))\,dx = \int\limits_a^b f(x)\,dx + \int\limits_a^b g(x)\,dx$$

и записать заданный интеграл как алгебраическую сумму двух интегралов, каждый из которых можно непосредственно вычислить, как в задаче 1 (для первого слагаемого можно также использовать формулу (7) и вынести постоянный множитель 4 за знак интеграла).

З а м е ч а н и е. Заданный интеграл рассматривается на отрезке [1; 3], где $x > 0$. Но при $x > 0$ одной из первообразных для функции $f(x) = \frac{1}{x}$ является функция $F(x) = \ln x$. Поэтому, учитывая, что $x > 0$, можно, например, записать, что $\int\limits_1^3 \frac{dx}{x} = \ln x \Big|_1^3$. Хотя, конечно, приведенная выше запись первообразной также является верной (поскольку при $x > 0$ $\ln|x| = \ln x$).

Задача 3 Вычислите площадь фигуры, ограниченной прямыми $x = 1$, $x = 8$, осью Ox и графиком функции $y = \sqrt[3]{x}$.

Р е ш е н и е

Изображая эти линии, видим, что заданная фигура — криволинейная трапеция (рис. 108).

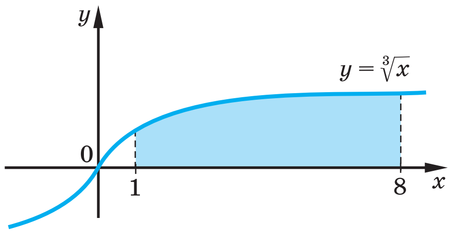


Рис. 108

Тогда ее площадь равна

$$S = \int\limits_1^8 \sqrt[3]{x}dx = \int\limits_1^8 x^{\frac{1}{3}}dx = \frac{x^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1}\Bigg|_1^8 = \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}\Big|_1^8 =$$

$$= \frac{3}{4}\left(8^{\frac{4}{3}} - 1^{\frac{4}{3}}\right) = \frac{3}{4}\left(\sqrt[3]{8^4} - 1\right) = \frac{45}{4} = 11\frac{1}{4}.$$

Ответ: $11\frac{1}{4}$ кв. ед.

К о м м е н т а р и й

Заданная фигура является криволинейной трапецией, и поэтому ее площадь можно вычислить по формуле

$$S = \int\limits_a^b f(x)\,dx, \text{ где } a = 1, b = 8, f(x) = \sqrt[3]{x}.$$

Также необходимо учесть, что на заданном отрезке [1; 8] значения $x > 0$, и при этом условии можно записать $\sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$.

Упражнения

1. Вычислите интеграл:

1°) $\int_{-1}^{2} x^4\,dx$; 2°) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx$; 3°) $\int_{1}^{3} x^3\,dx$; 4°) $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x}$;

5) $\int_{1}^{2} \frac{dx}{(2x+1)^2}$; 6) $\int_{0}^{\pi} 3\cos\frac{x}{2}\,dx$; 7) $\int_{1}^{10} \frac{dx}{x^2}$; 8) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x\,dx$.

2. Докажите, что верно равенство:

1) $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x} = \int_{0}^{1} dx$; 2) $\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \sin x\,dx = \int_{\frac{1}{16}}^{\frac{1}{4}} \frac{dx}{\sqrt{x}}$;

3) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx = \int_{0}^{\sqrt[3]{3}} x^2\,dx$; 4) $\int_{0}^{1} (2x+1)\,dx = \int_{0}^{2} (x^3-1)\,dx$.

3. Вычислите интеграл:

1) $\int_{-\pi}^{2\pi} \sin\frac{x}{3}\,dx$; 2) $\int_{-2}^{2} \frac{dx}{\sqrt{2x+5}}$; 3) $\int_{0}^{3\pi} \frac{dx}{\cos^2\frac{x}{9}}$; 4) $\int_{-2}^{6} \frac{dx}{\sqrt{x+3}}$;

5) $\int_{0}^{\frac{2\pi}{3}} \left(\sin\frac{x}{4}+\cos\frac{x}{4}\right)^2 dx$; 6) $\int_{0}^{2} (1+2x)^3\,dx$; 7) $\int_{0}^{\frac{\pi}{12}} (1+\cos 2x)\,dx$; 8) $\int_{1}^{4} \left(x+\frac{\sqrt{x}}{x}\right) dx$.

Вычислите (предварительно выполнив рисунок) площадь фигуры, ограниченной заданными линиями **(4–8)**.

4. 1) $y = x^4$, $y = 0$, $x = -1$, $x = 1$; 2) $y = x^4$, $y = 1$;
3) $y = x^2 - 4x + 5$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 4$; 4) $y = x^2 - 4x + 5$, $y = 5$.

5. 1) $y = 1 - x^3$, $y = 0$, $x = 0$; 2) $y = 2 - x^3$, $y = 1$, $x = -1$, $x = 1$;
3) $y = -x^2 - 4x$, $y = 0$, $x = -3$, $x = -1$; 4) $y = -x^2 - 4x$, $y = 1$, $x = -3$, $x = -1$.

6. 1) $y = x^3$, $y = 8$, $x = 1$; 2) $y = 2\cos x$, $y = 1$, $x = -\frac{\pi}{3}$, $x = \frac{\pi}{3}$;
3) $y = x^2 - 2x + 4$, $y = 3$, $x = -1$; 4) $y = \sin x$, $y = \frac{1}{2}$, $x = \frac{\pi}{6}$, $x = \frac{5\pi}{6}$.

7. 1) $y = 4x - x^2$, $y = 4 - x$; 2) $y = \frac{16}{x^2}$, $y = 2x$, $x = 4$;
3) $y = x^2$, $y = 2x$; 4) $y = 6 - 2x$, $y = 6 + x - x^2$.

8. 1) $y = x^2 - 4x + 4$, $y = 4 - x^2$; 2) $y = x^2 - 2x + 2$, $y = 2 + 6x - x^2$;
3) $y = x^2$, $y = 2x - x^2$; 4) $y = x^2$, $y = x^3$.

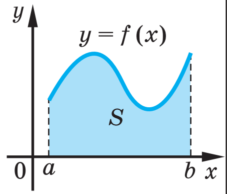
15.2. Вычисление площадей и объемов с помощью определенных интегралов

Таблица 20

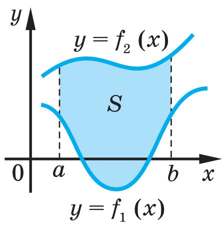
<table>
<tr><td colspan="2">1. Площадь криволинейной трапеции</td></tr>
<tr><td colspan="2">

Площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком непрерывной неотрицательной на отрезке $[a; b]$ функции $f(x)$, осью Ox и прямыми $x = a$ и $x = b$, равна

$$S = \int_a^b f(x)\,dx$$



</td></tr>
<tr><td colspan="2">2. Площадь фигуры, ограниченной графиками двух функций и прямыми $x = a$ и $x = b$</td></tr>
<tr><td>Формула</td><td>Пример</td></tr>
<tr><td>



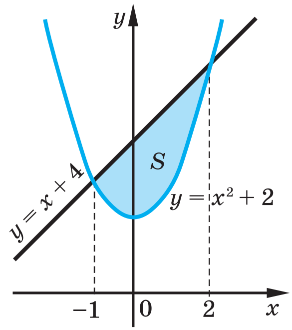
Если на заданном отрезке $[a; b]$ непрерывные функции $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$ имеют такое свойтсво, что $f_2(x) \geqslant f_1(x)$ для всех $x \in [a; b]$, то

$$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))\,dx \qquad (1)$$

</td><td>

Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями

$y = x^2 + 2$, $y = x + 4$.



▶ Изобразим заданные линии и абсциссы их точек пересечения.

Абсциссы точек пересечения:

$$x^2 + 2 = x + 4,$$

$$x^2 - x - 2 = 0,\ x_1 = -1,\ x_2 = 2.$$

Тогда по формуле (1)

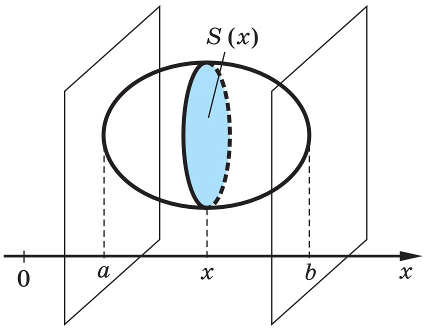
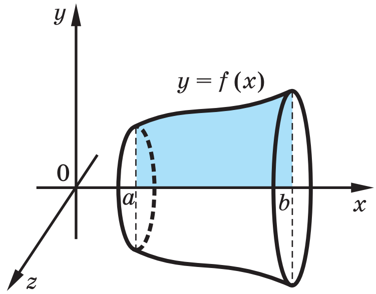
$$S = \int_{-1}^{2} \left((x+4) - (x^2+2)\right) dx =$$

$$= \int_{-1}^{2} \left(x + 2 - x^2\right) dx =$$

$$= \left(\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{2} = 4\frac{1}{2}. \ \triangleleft$$

</td></tr>
</table>

Продолж. табл. 20

3. Объемы тел	
 Если тело помещено между двумя перпендикулярными к оси Ox плоскостями, проходящими через точки $x = a$ и $x = b$, то $\boldsymbol{V = \int\limits_a^b S(x)\,dx}$, где $S(x)$ — площадь сечения тела плоскостью, которая проходит через точку $x \in [a; b]$ и перпендикулярна к оси Ox.	 Если тело получено в результате вращения вокруг оси Ox криволинейной трапеции, ограниченной графиком непрерывной и неотрицательной на отрезке $[a; b]$ функции $y = f(x)$ и прямыми $x = a$ и $x = b$, то $$\boldsymbol{V = \pi \int\limits_a^b f^2(x)\,dx}$$

Объяснение и обоснование

1. Вычисление площадей фигур. Обоснование формулы площади криволинейной трапеции и примеры ее применения были приведены в пункте 15.1.

Выясним, как можно вычислить площадь фигуры, изображенной на рисунке 109. Эта *фигура ограничена сверху графиком функции* $y = f_2(x)$, *снизу графиком функции* $y = f_1(x)$, *а также вертикальными прямыми* $x = a$ и $x = b$ $(a < b)$; *функции* $f_1(x)$ и $f_2(x)$ *непрерывны и неотрицательны на отрезке* $[a; b]$ и $f_2(x) \geqslant f_1(x)$ для всех $x \in [a; b]$.

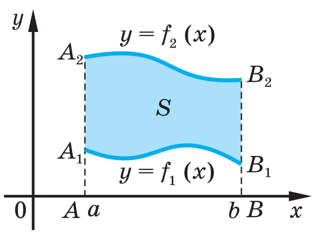


Рис. 109

Площадь S этой фигуры равна разности площадей S_2 и S_1 криволинейных трапеций (S_2 — площадь криволинейной трапеции AA_2B_2B, а S_1 — площадь криволинейной трапеции AA_1B_1B). Но

$$S_1 = \int\limits_a^b f_1(x)\,dx, \quad S_2 = \int\limits_a^b f_2(x)\,dx.$$

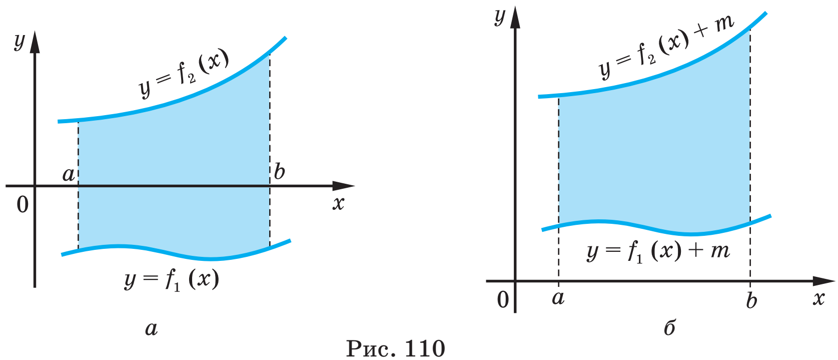


Рис. 110

Следовательно, $S = S_2 - S_1 = \int\limits_a^b f_2(x)\,dx - \int\limits_a^b f_1(x)\,dx = \int\limits_a^b (f_2(x) - f_1(x))\,dx.$ Таким образом, площадь заданной фигуры можно вычислить по формуле

$$S = \int\limits_a^b (f_2(x) - f_1(x))\,dx. \qquad (1)$$

Эта формула будет верной и в том случае, когда заданные функции не являются неотрицательными на отрезке $[a; b]$: для этого достаточно выполнения условий, что *функции* $f_1(x)$ и $f_2(x)$ *непрерывны на отрезке* $[a; b]$ и $f_2(x) \geqslant f_1(x)$ для всех $x \in [a; b]$ (рис. 110, *а*). Для обоснования справедливости формулы достаточно перенести заданную фигуру параллельно вдоль оси Oy на m единиц так, чтобы она разместилась над осью Ox (рис. 110, *б*). Такое преобразование означает, что заданные функции $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$ мы заменили соответственно на функции $y = f_1(x) + m$ и $y = f_2(x) + m$. Площадь фигуры, ограниченной графиками этих функций и прямыми $x = a$ и $x = b$, равна площади заданной фигуры. Следовательно, искомая площадь

$$S = \int\limits_a^b ((f_2(x) + m) - (f_1(x) + m))\,dx = \int\limits_a^b (f_2(x) - f_1(x))\,dx.$$

Например, площадь фигуры, изображенной на рисунке 111, равна

$$S = \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\sin x - \cos x)dx = (-\cos x - \sin x)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = 1 + 1 = 2.$$

2. Вычисление объемов тел. Задача вычисления объема тела с помощью определенного интеграла аналогична задаче нахождение площади криволинейной трапеции. Пусть задано тело объемом V, причем есть такая прямая (ось Ox на рисунке 112), что

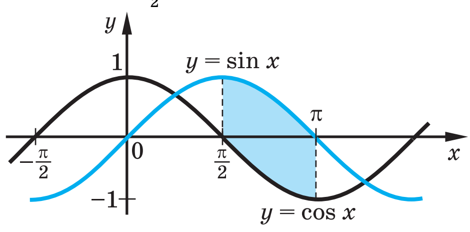


Рис. 111

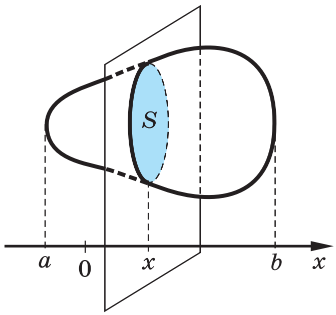


Рис. 112

какую бы ни взяли плоскость, перпендикулярную к этой прямой, нам известна площадь S сечения тела этой плоскостью. Но плоскость, перпендикулярная к оси Ox, пересекает ее в некоторой точке x. Следовательно, каждому числу x из отрезка $[a; b]$ (см. рис. 112) поставлено в соответствие единственное число $S(x)$ — площадь сечения тела этой плоскостью. Таким образом, на отрезке $[a; b]$ задана функция $S(x)$. Если функция S непрерывна на отрезке $[a; b]$, то справедлива формула

$$V = \int_a^b S(x)\,dx. \tag{2}$$

Полное доказательство этой формулы приведено в курсе математического анализа, а мы остановимся на наглядных соображениях, которые приводят к этой формуле.

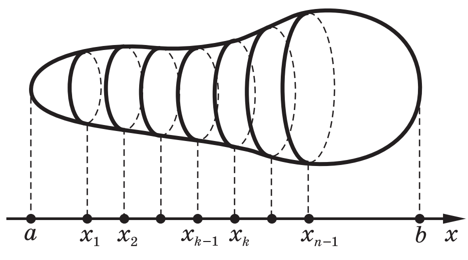
Разделим отрезок $[a; b]$ на n отрезков одинаковой длины точками $x_0 = a < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$ и допустим, что

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = x_k - x_{k-1},\ k = 1, 2, \ldots, n.$$

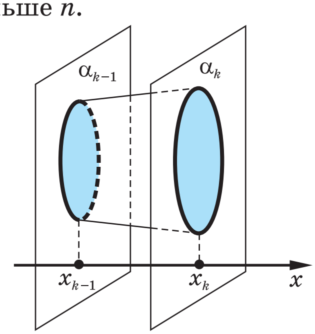
Через каждую точку x_k проведем плоскость α_k, перпендикулярную к оси Ox. Эти плоскости разрезают данное тело на слои (рис. 113, *а*). Объем слоя между плоскостями α_{k-1} и α_k (рис. 113, *б*) при достаточно больших n приближенно равен площади $S(x_{k-1})$ сечения, умноженной на «толщину слоя» Δx, и поэтому

$$V \approx S(x_0)\,\Delta x + S(x_1)\,\Delta x + \ldots + S(x_n)\,\Delta x = V_n.$$

Точность этого приближенного равенства тем выше, чем тоньше слои, на которые разрезано тело, то есть чем больше n.



а



б

Рис. 113

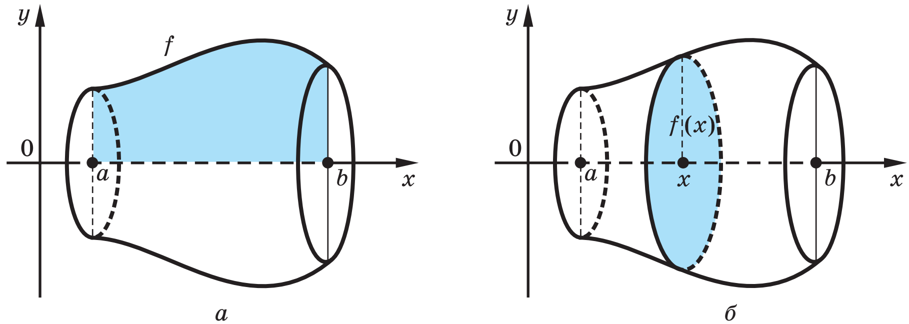


Рис. 114

Поэтому $V_n \to V$, если $n \to \infty$. По определению определенного интеграла через интегральные суммы получаем, что $V_n \to \int_a^b S(x)\,dx$, если $n \to \infty$. Следовательно,

$$V = \int_a^b S(x)\,dx.$$

Используем полученный результат для обоснования *формулы объема тел вращения.*

Пусть криволинейная трапеция опирается на отрезок $[a;\ b]$ оси Ox и ограничена сверху графиком функции $y = f(x)$, неотрицательной и непрерывной на отрезке $[a;\ b]$. Вследствие вращения этой криволинейной трапеции вокруг оси Ox образуется тело (рис. 114, *а*), объем которого можно найти по формуле

$$V = \int_a^b \pi f^2(x)\,dx = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx. \qquad (3)$$

Действительно, каждая плоскость, которая перпендикулярна к оси Ox и пересекает отрезок $[a;\ b]$ этой оси в точке x, дает в сечении с телом круг радиуса $f(x)$ и площадью $S(x) = \pi f^2(x)$ (рис. 114, *б*). Отсюда по формуле (2) получаем формулу (3).

Примеры решения задач

Задача 1 Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$ и $y = \sqrt{-x}$.

Решение

Изобразим заданные линии (рис. 115) и найдем абсциссы точек их пересечения:

$$x^2 = \sqrt{-x}, \qquad (1)$$

тогда $\quad x^4 = -x,\ x^4 + x = 0,$

Комментарий

Изображая заданные линии (рис. 115), видим, что искомая фигура находится между графиками двух функций. Сверху она ограничена графиком функции $f_2(x) = \sqrt{-x}$, а сни-

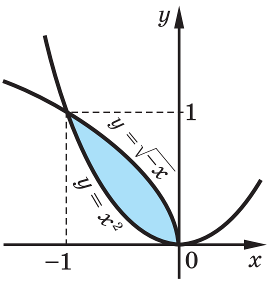


Рис. 115

$$x\,(x^3+1)=0,$$

$x=0$ или $x=-1$ (оба корня удовлетворяют уравнению (1)).

Площадь заданной фигуры равна

$$S=\int_{-1}^{0}\left(\sqrt{-x}-x^2\right)dx=\int_{-1}^{0}(-x)^{\frac{1}{2}}dx-$$

$$-\int_{-1}^{0}x^2dx=-\frac{2}{3}(-x)^{\frac{3}{2}}\Big|_{-1}^{0}-\frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{0}=\frac{1}{3}.\ \triangleleft$$

зу — графиком функции $f_1(x)=x^2$. Следовательно, ее площадь можно вычислить по формуле

$$S=\int_{a}^{b}(f_2(x)-f_1(x))\,dx.$$

Чтобы найти пределы интегрирования, найдем абсциссы точек пересечения графиков заданных функций. Поскольку ординаты обеих кривых в точках пересечения одинаковы, то достаточно решить уравнение $f_1(x)=f_2(x)$.

Для решения полученного иррационального уравнения можно использовать уравнения-следствия (в конце выполнить проверку) или равносильные преобразования (на ОДЗ, то есть при $x\leqslant 0$).

Отметим также, что на полученном отрезке $[-1;\ 0]$ значение $(-x)\geqslant 0$. Тогда $\sqrt{-x}=(-x)^{\frac{1}{2}}$.

Задача 2 Вычислите объем тела, полученного вращением вокруг оси абсцисс фигуры, ограниченной линиями $y=4-x^2$ и $y=0$.

Решение

▶ Найдем абсциссы точек пересечения заданных линий.

$$4-x^2=0,\ x=\pm 2.$$

Поскольку заданная фигура — криволинейная трапеция, то объем тела вращения равен

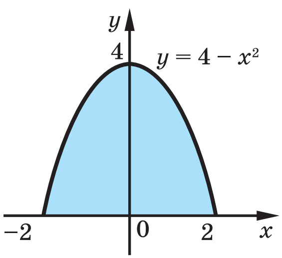


Рис. 116

Комментарий

Изобразим заданную фигуру (рис. 116) и убедимся, что она является криволинейной трапецией. В этом случае объем тела вращения можно вычислять по формуле:

$$V=\int_{a}^{b}\pi f^2(x)\,dx=\pi\int_{a}^{b}f^2(x)\,dx.$$

Чтобы найти пределы интегрирования, достаточно найти абсциссы точек пересечения заданных линий.

Как и для задач на вычисление площадей, в ответ записывают числовое значение объема, но можно подчеркнуть, что мы получили именно величину объема, и записать

$$V=\int_{-2}^{2}\pi(4-x^2)^2\,dx=\pi\int_{-2}^{2}(16-8x^2+x^4)\,dx=$$

$$=\pi\left(16x-8\cdot\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_{-2}^{2}=76\frac{4}{5}\pi.$$

ответ: $76\frac{4}{5}\pi$ куб. ед. (то есть кубических единиц).

З а м е ч а н и е. Можно было обратить внимание на то, что заданная фигура симметрична относительно оси Oy и поэтому объем тела, полученного вращением всей фигуры вокруг оси абсцисс, будет вдвое больше объема тела, полученного вращением криволинейной трапеции, которая опирается на отрезок [0; 2].

Вопросы для контроля

1. Объясните, как можно найти площадь криволинейной трапеции. Приведите пример.
2. 1) Запишите формулу для нахождения площади фигуры, ограниченной сверху и снизу графиками непрерывных функций, а также прямыми $x = a$ и $x = b$ ($a < b$). Приведите пример.
   2*) Докажите эту формулу.
3. Запишите формулу для нахождения объема тела, полученного вращением криволинейной трапеции вокруг оси абсцисс. Приведите пример ее использования.

Упражнения

Вычислите площадь фигуры, ограниченной данными линиями **(1–6)**.

1. 1) $y = x^2 - 4x + 5$, $y = 5 - x$; 2) $y = x^2 - 3x + 4$, $y = 4 - x$;
3) $y=\frac{4}{x}$, $y = 4$, $x = 4$; 4) $y=\frac{3}{x}$, $y = 3$, $x = 3$.

2. 1) $y = x^2 - 6x + 9$, $y = 5 - x$; 2) $y = x^2 + 2x + 1$, $y = x + 3$;
3) $y = 4 - x^2$, $y = x + 2$; 4) $y = 4 - x^2$, $y = 2 - x$.

3. 1) $y = x^2$, $y = x + 2$; 2) $y = x^2$, $y = 2 - x$.

4. 1) $y = -x^2 + 2x + 1$, $y = x^2 - 4x + 5$; 2) $y = x^2 + 2x + 2$, $y = 6 - x^2$.

5. 1) $y=\frac{7}{x}$, $x + y = 8$; 2) $y=\frac{5}{x}$, $x + y = 6$;
3) $y=\frac{5}{x}$, $y = 4x + 1$, $x = 2$; 4) $y=\frac{3}{x}$, $y = 2x + 1$, $x = 3$.

6. 1) $y = 8 - x^2$, $y = 4$; 2) $y = 6 - x^2$, $y = 5$;
3) $y = x^2$, $y = 4x - x^2$; 4) $y = x^2$, $y = 2x - x^2$.

7. Вычислите площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y = 8x - 2x^2$, касательной к этой параболе в ее вершине и прямой $x = 0$.

8. Вычислите площадь фигуры, ограниченной графиком функции $f(x) = 8 - 0{,}5x^2$, касательной к нему в точке с абсциссой $x = -2$ и прямой $x = 1$.

9. Найдите объем тела, полученного вращением вокруг оси абсцисс криволинейной трапеции, ограниченной линиями:

1) $y = x^2 + 1,\ x = 0,\ x = 1,\ y = 0$; 2) $y = \sqrt{x},\ x = 1,\ x = 4,\ y = 0$;

3) $y = \sqrt{x},\ x = 1,\ y = 0$; 4) $y = 1 - x^2,\ y = 0$.

10. Найдите объем тела, полученного вращением вокруг оси абсцисс фигуры, ограниченной линиями:

1) $y = x^2,\ y = x$; 2) $y = 2x,\ y = x + 3,\ x = 0,\ x = 1$;

3) $y = x + 2,\ y = 1,\ x = 0,\ x = 2$; 4) $y = \sqrt{x},\ y = x$.

11*. 1) Выведите формулу объема шарового сегмента радиуса R и высоты H.

2) Выведите формулу объема усеченного конуса высоты H с радиусами оснований R и r.

§16 ПРОСТЕЙШИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

1. Понятия дифференциального уравнения и его решения. До сих пор мы рассматривали уравнения, в которых неизвестными были числа. В математике и ее применениях приходится рассматривать уравнения, в которых неизвестными являются функции. Так, задача о нахождении пути $s(t)$ по заданной скорости $v(t)$ сводится к решению уравнения $s'(t) = v(t)$, где $v(t)$ — заданная функция, а $s(t)$ — искомая функция.

Например, если $v(t) = 3 - 4t$, то для нахождения $s(t)$ необходимо решить уравнение $s'(t) = 3 - 4t$.

Это уравнение содержит производную неизвестной функции. Такие уравнения называют *дифференциальными уравнениями*. *Решением* дифференциального уравнения называется любая функция, удовлетворяющая этому уравнению (то есть функция, при подстановке которой в заданное уравнение получаем тождество).

Задача 1 Решите дифференциальное уравнение $y' = x + 3$.

Решение

Необходимо найти функцию $y(x)$, производная которой равна $x + 3$, то есть найти первообразную для функции $x + 3$. По правилам нахождения первообразных получаем $y = \frac{x^2}{2} + 3x + C$, где C — произвольная постоянная.

При решении дифференциальных уравнений следует учитывать, что *решение дифференциального уравнения определяется неоднозначно, с точностью до постоянной*. Такое решение называют *общим решением* заданного уравнения.

Обычно к дифференциальному уравнению добавляется условие, из которого эта постоянная определяется. Решение, полученное с использованием такого условия, называют *частным решением* заданного дифференциального уравнение.

Задача 2 Найдите решение $y(x)$ дифференциального уравнения $y' = \sin x$, удовлетворяющего условию $y(0) = 2$.

Решение

▶ Все решения этого уравнения записываются формулой $y(x) = -\cos x + C$. Из условия $y(0) = 2$ находим $-\cos 0 + C = 2$. Тогда $C = 3$.

Ответ: $y = -\cos x + 3$. ◁

Решения многих физических, биологических, технических и других практических задач сводится к решению дифференциального уравнения

$$y' = ky, \tag{1}$$

где k — заданное число. Решениями этого уравнения являются функции

$$y = Ce^{kx}, \tag{2}$$

где C — постоянная, которая определяется условиями конкретной задачи.

Например, в опытах установлено, что скорость $m'(t)$ размножения бактерий (для которых достаточно пищи) связана с массой $m(t)$ бактерий в момент времени t уравнением

$$m'(t) = km(t),$$

где k — положительное число, которое зависит от вида бактерий и внешних условий. Решениями этого уравнение являются функции

$$m(t) = Ce^{kt}.$$

Постоянную C можно найти, например, при условии, что в момент $t = 0$ масса m_0 бактерий известна. Тогда $m(0) = m_0 = Ce^{k \cdot 0} = C$, и, следовательно,

$$m(t) = m_0 e^{kt}.$$

Другим примером применения уравнения (1) является задача о радиоактивном распаде вещества. Если $m'(t)$ — скорость радиоактивного распада в момент времени t, то $m'(t) = -km(t)$, где k — постоянная, которая зависит от радиоактивности вещества. Решениями этого уравнения являются функции

$$m(t) = Ce^{-kt}.$$

Если в момент времени t масса вещества равна m_0, то $C = m_0$, и тогда

$$m(t) = m_0 e^{-kt}. \tag{3}$$

Отметим, как на практике скорость распада радиоактивного вещества характеризуется периодом полураспада, то есть промежутком времени, в течение которого распадается половина исходного вещества.

Пусть T — период полураспада, тогда из равенства (3) при $t = T$ получаем $\frac{m_0}{2} = m_0 e^{-kT}$. Отсюда $e^{kT} = 2$, $k = \frac{\ln 2}{T}$. В этом случае формула (3) записывается так:

$$m(t) = m_0 e^{-\frac{\ln 2}{T} \cdot t} = m_0 \left(e^{\ln 2}\right)^{-\frac{t}{T}} = m_0 2^{-\frac{t}{T}}, \text{ то есть}$$

$$m(t) = m_0 2^{-\frac{t}{T}}.$$

2. Гармонические колебания. На практике часто встречаются процессы, которые периодически повторяются, например колебательные движения маятника, струны, пружины и т. п.; процессы, связанные с переменным электрическим током, магнитным полем и т. д. Решение многих таких задач сводится к решению дифференциального уравнения

$$y'' = -\omega^2 y, \qquad (4)$$

где ω — заданное положительное число, $y = y(x)$, $y'' = (y'(x))'$.

Решением уравнения (4) является функция

$$y(x) = C_1 \sin(\omega x + C_2), \qquad (5)$$

где C_1 и C_2 — постоянные, которые определяются условиями конкретной задачи. Уравнение (4) называют *дифференциальным уравнением гармонических колебаний.*

Например, если $y(t)$ — отклонение точки струны, которая свободно колеблется, от положения равновесия в момент времени t, то

$$y(t) = A \sin(\omega t + \varphi),$$

где A — амплитуда колебания, ω — угловая частота, φ — начальная фаза колебания.

Графиком гармонического колебания является *синусоида.*

3. Примеры применения первообразной и интеграла к решению практических задач.

Задача 3 Цилиндрический бак, высота которого равна 4,5 м, а радиус основания равен 1 м, заполнен водой. За какое время вода вытечет из бака через круглое отверстие в дне, если радиус отверстия равен 0,05 м?

Решение

▶ Обозначим высоту бака H, радиус его основания R, радиус отверстия r (длины измеряем в метрах, время — в секундах) (рис. 117).

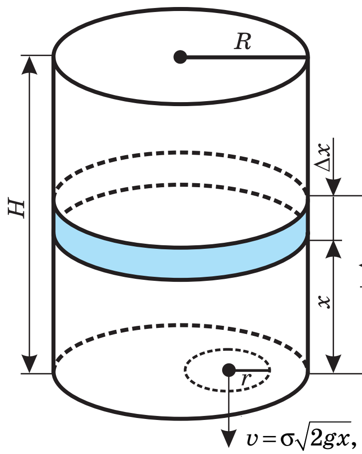


Рис. 117

Скорость вытекания жидкости v зависит от высоты столба жидкости x и вычисляется по формуле Бернулли

$$v = \sigma\sqrt{2gx}, \qquad (6)$$

где $g = 9{,}8$ м/с^2, σ — коэффициент, который зависит от свойства жидкости; для воды $\sigma = 0{,}6$. Поэтому при уменьшении уровня воды в баке скорость вытекания уменьшается (а не остается постоянной).

Пусть $t(x)$ — время, за которое из бака высоты x с основанием радиуса R вытекает вода через отверстие радиуса r (рис. 117).

Найдем приближенно отношение $\frac{\Delta t}{\Delta x}$, считая, что за время $\Delta t = t\,(x + \Delta x) - t(x)$ скорость вытекания воды постоянна и выражается формулой (6).

За время Δt объем воды, которая вытекла из бака, равен объему цилиндра высоты Δx с основанием радиуса R (см. рис. 117), то есть равен $\pi R^2 \Delta x$. С другой стороны, этот объем равен объему цилиндра, основанием которого служит отверстие в дне бака, а высота равна произведению скорости вытекания v на время Δt, то есть объем равен $\pi r^2 v \Delta t$. Следовательно, $\pi R^2 \Delta x = \pi r^2 v \Delta t$.

Учитывая формулу (6), получаем

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} = \frac{R^2}{r^2 v} = \frac{R^2}{r^2 \sigma \sqrt{2gx}} = \frac{R^2}{r^2 \sigma \sqrt{2g}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Тогда при $\Delta x \to 0$ получаем равенство

$$t'(x) = \frac{R^2}{r^2 \sigma \sqrt{2g}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Отсюда

$$t(x) = \frac{R^2}{r^2 \sigma \sqrt{2g}} \cdot 2\sqrt{x} + C.$$

Если $x = 0$ (в баке нет воды), то $t\,(0) = 0$, отсюда $C = 0$. При $x = H$ находим искомое время

$$t(H) = \frac{R^2}{r^2 \sigma \sqrt{g}} \cdot \sqrt{2H}.$$

Используя данные задачи, получаем

$$t(4{,}5) = \frac{1^2}{(0{,}05)^2 \cdot 0{,}6 \cdot \sqrt{9{,}8}} \cdot \sqrt{9} \approx 639 \text{ (с)}.$$

Ответ: 639 с. ◁

Задача 4 Вычислите работу силы F при сжатии пружины на 0,06 м, если для ее сжатия на 0,01 м необходима сила 5 Н.

Решение

▶ По закону Гука, сила F пропорциональна растяжению или сжатию пружины, то есть $F = kx$, где x — величина растяжения или сжатия (в метрах), k — постоянная. По условию задачи находим k. Поскольку при $x = 0{,}01$ м сила $F = 5$ Н, то $k = \frac{F}{x} = 500$.

Следовательно, $F\,(x) = kx = 500x$.

Найдем формулу для вычисления работы при перемещении тела (оно рассматривается как материальная точка), которое двигается под действием переменной силы $F\,(x)$, направленной вдоль оси Ox. Пусть тело переместилось из точки $x = a$ в точку $x = b$.

Обозначим через $A\,(x)$ работу, выполненную при перемещении тела из точки a в точку x. Дадим x приращение Δx. Тогда $\Delta A = A\,(x + \Delta x) - A\,(x)$ —

работа, которая выполняется силой $F(x)$ при перемещении тела из точки x в точку $x + \Delta x$. Если $\Delta x \to 0$, то силу $F(x)$ на отрезке $[x; x + \Delta x]$ будем считать постоянной и равной $F(x)$. Поэтому $\Delta A = F(x) \cdot \Delta x$. Отсюда $\frac{\Delta A}{\Delta x} = F(x)$. Тогда при $\Delta x \to 0$ получаем $A'(x) = F(x)$. Последнее равенство означает, что $A(x)$ является первообразной для функции $F(x)$.

Учитывая, что $A(a) = 0$, по формуле Ньютона–Лейбница получаем

$$\int_a^b F(x)dx = A(x)\Big|_a^b = A(b) - A(a) = A(b) = A.$$

Таким образом,

работа переменной силы F (x) при перемещении тела из точки a в точку b равна

$$A = \int_a^b F(x)\,dx.$$

Используя данные задачи, получаем

$$A = \int_0^{0,06} 500x dx = 500\frac{x^2}{2}\Big|_0^{0,06} = 0,9 \text{ (Дж)}. \triangleleft$$

Вопросы для контроля

1. Объясните, какое уравнение называется дифференциальным уравнением. Приведите примеры.
2. Объясните, какая функция называется решением дифференциального уравнения. Приведите примеры.

Упражнения

1. Тело двигается прямолинейно со скоростью $v(t)$ (м/сек). Вычислите путь, который пройдет тело за промежуток времени от $t = t_1$ до $t = t_2$:
1) $v(t) = 3t^2 + 1$, $t_1 = 0$, $t_2 = 4$; 2) $v(t) = 2t^2 + t$, $t_1 = 1$, $t_2 = 3$.

2. Решите дифференциальное уравнение:
1) $y' = 3 - 4x$; 2) $y' = 6x^2 - 8x + 1$; 3) $y' = 3e^{2x}$;
4) $y' = 4\cos 2x$; 5) $y' = 3\sin x$; 6) $y' = \cos x - \sin x$.

3. Найдите решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее заданному условию:
1) $y' = \sin x$, $y(0) = 0$; 2) $y' = 2\cos x$, $y(\pi) = 1$;
3) $y' = 3x^2 + 4x - 1$, $y(1) = -2$; 4) $y' = 2 + 2x - 3x^2$, $y(-1) = 2$;
5) $y' = e^x$, $y(1) = 1$; 6) $y' = e^{-x}$, $y(0) = 2$.

4. Какую работу необходимо затратить на сжатие пружины на 4 см, если известно, что сила 2 Н сжимает эту пружину на 1 см?

5. Сила 4 Н растягивает пружину на 8 см. Какую работу необходимо выполнить, чтобы растянуть пружину на 8 см?

6. Вода, которая подается с плоскости основания в цилиндрический бак через отверстие в дне, заполняет весь бак. Определите затраченную при этом работу. Высота бака равна h, радиус основания r.

7. Найдите работу против сил выталкивания во время погружения шара в воду.

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ УПРАЖНЕНИЯ К РАЗДЕЛУ 2

1. Найдите первообразную для функции $f(x) = e^{2x} - \cos x$, график которой проходит через начало координат.

2. Найдите первообразную для функции $f(x) = \sin x - e^{3x}$, график которой проходит через начало координат.

Найдите первообразную для функции $y = f(x)$, график которой проходит через данную точку **(3–7)**.

3. 1) $f(x)=\frac{1}{3}\sin\frac{x}{3}+4\cos 4x,\ A(\pi;\ 3)$; 2) $f(x)=\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}-5\sin 5x,\ B(\pi;\ 0)$;

3) $f(x) = 5x^4 + 3x^2 - 4,\ B(-1;\ 12)$; 4) $f(x)=\frac{3}{2\sqrt{x}}-2x,\ N(9;\ -8)$.

4. 1) $f(x) = 3x^2 - 4x + 5,\ A(2;\ 6)$; 2) $f(x) = 3x^2 - 6x + 4,\ A(1;\ 4)$;

3) $f(x)=\frac{12}{\sqrt{3x-2}},\ A(9;\ 30)$.

5. 1) $f(x) = 4x^3 - 2x + 3,\ A(1;\ 8)$; 2) $f(x)=\frac{12}{\sqrt{4x-3}},\ A(3;\ 18)$;

3) $f(x)=\frac{2}{\sqrt{3x+4}},\ A(4;\ 5)$; 4) $f(x) = 4e^{2x-1},\ A(1;\ 3e)$.

6. 1) $f(x)=\frac{3}{\sqrt{4x+5}},\ M(5;\ 7)$; 2) $f(x) = 6e^{3x-2},\ A(1;\ 5e)$;

3) $f(x) = 6x^2 + e^{4x},\ A\left(\frac{1}{2};\ \frac{e^2}{4}\right)$; 4) $f(x) = 3x^2 - 4x + 5,\ M(2;\ 7)$.

7. 1) $f(x)=16x^3+e^{\frac{x}{2}},\ B\left(1;\ 2\sqrt{e}\right)$; 2) $f(x)=\frac{6}{\cos^2 6x},\ A\left(\frac{\pi}{18};\ 3\sqrt{3}\right)$;

3) $f(x)=\frac{5}{2\sqrt{x}}+x,\ M(4;\ -3)$; 4) $f(x)=\frac{4}{\sin^2 4x},\ B\left(\frac{\pi}{24};\ -2\sqrt{3}\right)$.

Вычислите интеграл **(8–9).**

8. 1) $\int\limits_{-1}^{2}(x^2-4x+5)dx$; 2) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left(2\cos 2x+\frac{1}{3}\sin\frac{x}{3}\right)dx$; 3) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left(3\sin 3x-\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}\right)dx$;

4) $\int\limits_{1}^{3}\left(\frac{4}{x}-x\right)dx$; 5) $\int\limits_{1}^{4}\left(\frac{3}{x}+x\right)dx$; 6) $\int\limits_{-3}^{2}(x^2-2x)dx$.

9. 1) $\int\limits_{-1}^{3}(x^2+4x)dx$; 2) $\int\limits_{1}^{3}(4x^3-4x+1)dx$; 3) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{9}}\frac{dx}{\cos^2 3x}$; 4) $\int\limits_{\pi}^{2\pi}\frac{dx}{\sin^2\frac{x}{4}}$.

Вычислите площадь фигуры, ограниченной данными линиями **(10–14).**

10. 1) $y = x^2 - 2x + 3$, $y = 3 - x$; 2) $y = x^2 - 5x + 2$, $y = 2 - x$;

3) $y=\frac{1}{x}$, $y = 1$, $x = 4$; 4) $y=\frac{2}{x}$, $y = 2$, $x = 3$;

11. 1) $y = x^2 - 4x + 4$, $y = 2 - x$; 2) $y = x^2 + 2x + 1$, $y = x + 1$;
3) $y = 5 - x^2$, $y = x + 3$; 4) $y = 4 - x^2$, $y = x + 4$;

12. 1) $y = x^3$, $y = x$; 2) $y = x^3$, $y = 4x$;
3) $y = -x^2 + 2x + 1$, $y = x^2 - 2x + 1$; 4) $y = x^2 + 2x + 2$, $y = 2 - x^2$;

13. 1) $y=\frac{2}{x}$, $x + y = 3$; 2) $y=\frac{4}{x}$, $x + y = 5$;

3) $y=\frac{3}{x}$, $y = 4x - 1$, $x = 2$; 4) $y=\frac{5}{x}$, $y = 2x + 3$, $x = 3$;

14. 1) $y = 9 - x^2$, $y = 1$; 2) $y = 5 - x^2$, $y = 4$;
3) $y = x^2$, $y = 8x - x^2$; 4) $y = x^2$, $y = 3x - 2x^2$.

15. При каком значении a прямая $x = a$ делит площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y=\frac{8}{x}$ и прямыми $y = 0$, $x = 2$, $x = 8$, пополам?

16. При каком значении a прямая $x = a$ делит площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y=\frac{4}{x}$ и прямыми $y = 0$, $x = 4$, $x = 9$, пополам?

17. Найдите площадь фигуры, ограниченной параболой $y = 2x - x^2$, касательной, проведенной к данной параболе в точке с абсциссой $x_0 = 2$, и осью ординат.

18. Найдите площадь фигуры, ограниченной параболой $y = 3x - x^2$, касательной, проведенной к данной параболе в точке с абсциссой $x_0 = 3$, и осью ординат.

19. Найдите площадь фигуры, ограниченной графиками функций $y=\sqrt{x+1}$ и $y=\sqrt{7-x}$ и осью абсцисс.

СВЕДЕНИЯ ИЗ ИСТОРИИ

Интегральное исчисление и само понятие интеграла возникло из необходимости вычисления площадей плоских фигур и объемов тел. Идеи интегрального исчисления берут свое начало в работах древних математиков. В частности, важное значение для развития интегрального исчисления имел *метод исчерпывания,* предложенный Евдоксом Книдским (ок. 408 — ок. 355 гг. до н. э.) и усовершенствованный Архимедом. По этому методу для вычисления площади плоской фигуры вокруг нее описывается ступенчатая фигура и в нее вписывается ступенчатая фигура. Увеличивая количество сторон полученных многоугольников, находят предел, к которому стремятся площади ступенчатых фигур (именно так в курсе геометрии вы доказывали формулу площади круга). Архимед предвосхитил многие идеи интегрального исчисления. Но прошло более полутора тысяч лет, прежде чем эти идеи были доведены до уровня исчисления. Отметим, что математики XVII в., получившие множество новых результатов, учились на работах Архимеда. Именно в XVII в. было сделано много открытий, касающихся интегрального исчисления, введены основные понятия и термины.

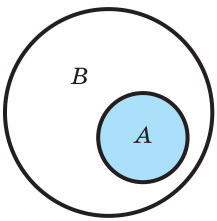
Символ $\int$ ввел Лейбниц (1675 г.). Этот знак является измененной латинской буквой S (первая буква слова *summa*). Само слово *интеграл* ввел Я. Бернулли (1690 г.). Другие известные вам термины, касающие интегрального исчисления, появились значительно позже. Название *первообразная для функции,* которое применяется сейчас, заменило более раннее «примитивная функция», введенное Лагранжем (1797 г.). Латинское слово *primitivus* переводится как «начальный»: функция $F(x)=\int f(x)dx$ — начальная (или первообразная) для функции $f(x)$, которая образуется из $F(x)$ дифференцированием. Понятие *неопределенного интеграла* и его обозначение ввел Лейбниц, а обозначение *определенного интеграла* $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ ввел К. Фурье (1768—1830).

Следует отметить, что при всей значимости результатов, полученных математиками XVII в., интегрального исчисления еще не было. Необходимо было выделить общие идеи, на которых основывается решение многих отдельных задач, а также установить связь операций дифференцирования и интегрирования. Это сделали Ньютон и Лейбниц, которые независимо друг от друга открыли факт, известный нам под названием формулы Ньютона–Лейбница. Тем самым окончательно оформился общий метод. Необходимо было еще научиться находить первообразные для многих функций, дать логические основы нового исчисления и т. п. Но главное уже было сделано: дифференциальное и интегральное исчисления созданы. Методы интегрального исчисления активно развивались в следующем столетии (прежде всего следует назвать имена Л. Эйлера, который закончил систематическое исследование интегрирования элементарных функций, и И. Бернулли). В развитие интегрального исчисления значительный вклад внесли российские математики украинского происхождения М. В. Остроградский (1801—1862), В. Я. Буняковский (1804–1889).

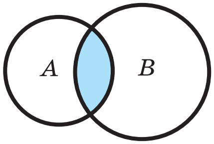
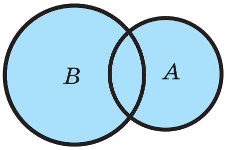
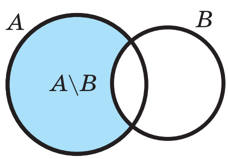
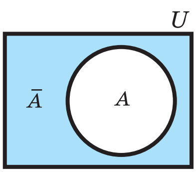
Раздел 3
Элементы комбинаторики, теории вероятностей и статистики

§ 17 МНОЖЕСТВА И ОПЕРАЦИИ НАД НИМИ

Таблица 21

Понятие множества и его элементов	
Элемент a принадлежит множеству A $\Leftrightarrow$ $a \in A$ Элемент b не принадлежит множеству A $\Leftrightarrow$ $b \notin A$ В множестве нет элементов $\Leftrightarrow$ $\varnothing$	Множество можно представить как совокупность некоторых объектов, объединенных по определенному признаку. В математике множество — одно из основных неопределяемых понятий. **Каждый объект, принадлежащий множеству A, называется *элементом* этого *множества*.** Множество, не содержащее ни одного элемента, называется *пустым множеством* и обозначается $\varnothing$.
Подмножество ($\subset$)	
 $A \subset B$ $\Leftrightarrow$ Если $x \in A$, то $x \in B$	**Если каждый элемент множества A является элементом множества B, то говорят, что множество A является подмножеством множества B,** и записывают так: $A \subset B$. Используется также запись $A \subseteq B$, если множество A или является подмножеством множества B, или равно множеству B.
Равенство множеств	
$A = B \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \Rightarrow x \in B \\ x \in B \Rightarrow x \in A \end{cases}$	**Два множества называются *равными*, если каждый элемент первого множества является элементом второго множества и, наоборот, каждый элемент второго множества является элементом первого множества.**

Продолж. табл. 21

Пересечение множеств (∩)	
 $C = A \cap B$ $x \in C \Leftrightarrow x \in A$ и $x \in B$	***Пересечением множеств A и B* называют их общую часть, то есть множество *C* всех элементов, принадлежащих как множеству *A*, так и множеству *B***
Объединение множеств (∪)	
 $C = A \cup B$ $x \in C \Leftrightarrow x \in A$ или $x \in B$	***Объединением множеств A и B* называют множество *C*, состоящее из всех элементов, принадлежащих хотя бы одному из этих множеств (*A или B*)**
Разность множеств (\\)	
 $C = A \setminus B$ $x \in C \Leftrightarrow x \in A$ и $x \notin B$	***Разностью множеств A и B* называется множество *C*, которое состоит из всех элементов, принадлежащих множеству *A* и не принадлежащих множеству *B***
Дополнение множества	
 $x \in \bar{A} \Leftrightarrow x \notin A$	Если все рассматриваемые множества являются подмножествами некоторого *универсального* множества U, то разность $U \setminus A$ называется дополнением множества A. Другими словами, ***дополнением множества A* называется множество, состоящее из всех элементов, не принадлежащих множеству *A*** (но принадлежащих универсальному множеству).

Объяснение и обоснование

1. Понятие множества. Одним из основных понятий, которые используются в математике, является понятие множества. Для него не дается определения. Можно пояснить, что *множеством* называют произвольную совокупность объектов, а сами объекты — *элементами* данного *множества*. Так, можно говорить о множестве учеников в классе (элементы — ученики), множестве дней недели (элементы — дни недели), множестве натуральных делителей числа 6 (элементы — числа 1, 2, 3, 6) и т. д.

В курсах алгебры и алгебры и начал анализа чаще всего рассматривают множества, элементами которых являются числа, и поэтому их называют *числовыми множествами*.

Как правило, множества обозначают прописными буквами латинского алфавита. Например, если множество M состоит из чисел 1; 2; 3, то его обозначают так: $M = \{1; 2; 3\}$. Тот факт, что число 2 входит в это множество (является элементом данного множества M) записывается с помощью специального значка $\in$ следующим образом: $2 \in M$; а то, что число 5 не входит в это множество (не является элементом данного множества), записывается так: $5 \notin M$.

Можно рассматривать также множество, не содержащее ни одного элемента, — *пустое множество*.

Например: множество простых делителей числа 1 — пустое множество.

Для некоторых множеств существуют специальные обозначения. Так, пустое множество обозначается символом $\varnothing$, множество всех натуральных чисел — буквой $\boldsymbol{N}$, множество всех целых чисел — буквой $\boldsymbol{Z}$, множество всех рациональных чисел — буквой $\boldsymbol{Q}$, а множество всех действительных чисел — буквой $\boldsymbol{R}$.

Множества бывают конечными и бесконечными в зависимости от того, какое количество элементов они содержат. Так, множества $A = \{7\}$ и $M = \{1; 2; 3\}$ — конечные потому, что содержат конечное число элементов, а множества $\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{Z}$, $\boldsymbol{Q}$, $\boldsymbol{R}$ — бесконечные.

Множества задают или с помощью перечисления их элементов (это можно сделать только для конечных множеств), или с помощью описания, когда задается правило (*характеристическое свойство*), которое позволяет определить, принадлежит или нет данный объект рассматриваемому множеству. Например, $A = \{-1; 0; 1\}$ (множество задано перечислением элементов), B — множество четных целых чисел (множество задано характеристическим свойством єлементов множества). Последнее множество иногда записывают так: $B = \{b \mid b$ — четное целое число$\}$ или так: $B = \{b \mid b = 2m$, где $m \in \boldsymbol{Z}\}$ — здесь после вертикальной черточки записано характеристическое свойство.

В общем виде запись множества с помощью характеристического свойства можно обозначить так: $A = \{x \mid P(x)\}$, где $P(x)$ — характеристическое свойство. Например, $\{x \mid x^2 - 1 = 0\} = \{-1, 1\}$, $\{x \mid x \in \boldsymbol{R}$ и $x^2 + 1 = 0\} = \varnothing$.

2. Равенство множеств. Пусть A — множество цифр трехзначного числа 312, то есть $A = \{3; 1; 2\}$, а B — множество натуральных чисел, меньших четырех, то есть $B = \{1; 2; 3\}$. Поскольку эти множества состоят из одних и тех же элементов, то они считаются равными. Это записывают так: $A = B$.

Для бесконечных множеств таким способом (сравнивая все элементы) установить их равенство невозможно. Поэтому в общем случае равенство множеств определяется следующим образом.

Два множества называются *равными*, если каждый элемент первого множества является элементом второго множества и, наоборот, каждый элемент второго множества является элементом первого множества.

Из приведенного определения равенства множеств следует, что в множестве одинаковые элементы не различаются. Действительно, например, $\{1;\ 2;\ 2\} = \{1;\ 2\}$, поскольку каждый элемент первого множества (1 или 2) является элементом второго множества и, наоборот, каждый элемент второго множества (1 или 2) является элементом первого. Поэтому, записывая множество, чаще всего каждый его элемент записывают только один раз.

3. Подмножество.

Если каждый элемент множества A является элементом множества B, то говорят, что множество A является подмножеством множества B.

Это записывают следующим образом: $A \subset B$.

Например, $\{1;\ 2\} \subset \{0;\ 1;\ 2;\ 3\}$, $\boldsymbol{N} \subset \boldsymbol{Z}$ (поскольку любое натуральное число — целое), $\boldsymbol{Z} \subset \boldsymbol{Q}$ (поскольку любое целое число — рациональное), $\boldsymbol{Q} \subset \boldsymbol{R}$ (поскольку любое рациональное число — действительное).

Полагают, что всегда $\varnothing \subseteq A$, *то есть пустое множество является подмножеством любого множества.*

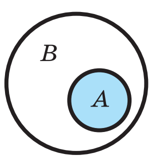
Иногда вместо записи $A \subset B$ используется также запись $A \subseteq B$, если множество A является подмножеством множества B или равно множеству B. Например, можно записать, что $A \subseteq A$.

Сопоставим определение равенства множеств с определением подмножества. Если множества A и B равны, то: 1) каждый элемент множества A является элементом множества B, следовательно, A — подмножество B ($A \subseteq B$); 2) каждый элемент множества B является элементом множества A, следовательно, B — подмножество A ($B \subseteq A$). Таким образом,

два множества равны, если каждое из них является подмножеством другого.

$$\boxed{A = B \text{ означает то же, что } A \subseteq B \text{ и } B \subseteq A}$$

Иногда соотношения между множествами удобно иллюстрировать с помощью кругов (которые часто называют кругами Эйлера–Венна). Например, рисунок 118 иллюстрирует определение подмножества, а рисунок 119 — отношения между множествами $\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{Z}$, $\boldsymbol{Q}$, $\boldsymbol{R}$.



$\boxed{A \subset B} \Leftrightarrow \boxed{\text{Если } x \in A, \text{ то } x \in B}$

Рис. 118

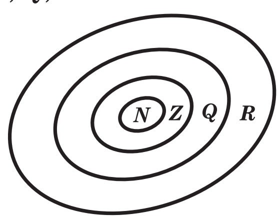


Рис. 119

4. Операции над множествами. Над множествами можно выполнять определенные действия: находить их пересечение, объединение, разность. Дадим определение этих операций и проиллюстрируем их с помощью кругов.

Пересечением множеств A **и** B **называют их общую часть, то есть множество** C **всех элементов, принадлежащих как множеству** A**, так и множеству** B**.**

Пересечение множеств обозначают знаком $\cap$ (на рисунке 120 приведена иллюстрация и символическая запись определения пересечения множеств).

Например, если $A = \{2; 3; 4\}$, $B = \{0; 2; 4; 6\}$, то $A \cap B = \{2; 4\}$.

Объединением множеств A **и** B **называют множество** C**, состоящее из всех элементов, принадлежащих хотя бы одному из этих множеств (*A или B*).**

Объединение множеств обозначают знаком $\cup$ (на рисунке 121 приведена иллюстрация и символическая запись определения объединения множеств).

Например, для множеств A и B из предыдущего примера

$$A \cup B = \{0; 2; 3; 4; 6\}.$$

Если обозначить множество иррациональных чисел через M, то $M \cup \boldsymbol{Q} = \boldsymbol{R}$.

Разностью множеств A **и** B **называется множество** C**, состоящее из всех элементов, которые принадлежат множеству** A **и не принадлежат множеству** B**.**

Разность множеств обозначают знаком $\setminus$. На рисунке 122 приведена иллюстрация и символическая запись определения разности множеств.

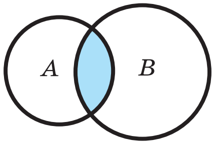
Например, если $A = \{1; 2; 3\}$, $B = \{2; 3; 4; 5\}$, то $A \setminus B = \{1\}$, а $B \setminus A = \{4; 5\}$.

Если B — подмножество A, то разность $A \setminus B$ называют *дополнением множества B до множества A* (рис. 123).

Например, если обозначить множество иррациональных чисел через M, то $\boldsymbol{R} \setminus \boldsymbol{Q} = M$: множество M иррациональных чисел дополняет множество $\boldsymbol{Q}$ рациональных чисел до множества $\boldsymbol{R}$ всех действительных чисел.

Все множества, которые мы рассматриваем, являются подмножествами некоторого так называемого *универсального* множества U. Его обычно изображают в виде прямоугольника, а все остальные множества — в виде кру-

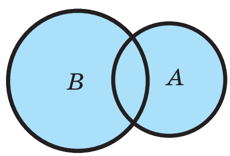
$A \cap B$



$C = A \cap B$
$x \in C \Leftrightarrow x \in A$ и $x \in B$

Рис. 120

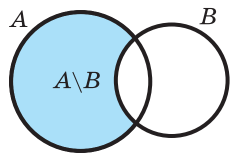
$A \cup B$



$C = A \cup B$
$x \in C \Leftrightarrow x \in A$ или $x \in B$

Рис. 121

$A \setminus B$



$x \in A \setminus B \Leftrightarrow x \in A$ и $x \notin B$

Рис. 122

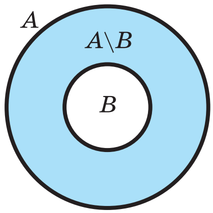


Рис. 123

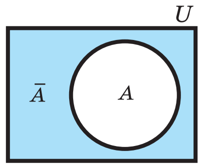


Рис. 124

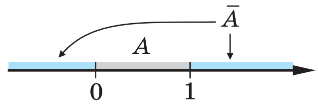


Рис. 125

гов внутри этого прямоугольника (рис. 124). Разность $U \setminus A$ называется дополнением множества A.

Дополнением множества A **называется множество, состоящее из всех элементов, не принадлежащих множеству** ***A***
(но принадлежащих универсальному множеству U).

Дополнение множества A обозначается $\overline{A}$ (можно читать: «A с чертой»).

Например, если $U = \boldsymbol{R}$ и $A = [0;\ 1]$, то $\overline{A} = (-\infty;\ 0) \cup (1;\ +\infty)$. Для этого примера удобно использовать традиционную иллюстрацию множества действительных чисел на числовой прямой (рис. 125).

Вопросы для контроля

1. Приведите примеры множеств, укажите несколько элементов каждого множества.
2. Как обозначаются пустое множество, множества натуральных, целых, рациональных, действительных чисел?
3. Дайте определение равенства множеств. Приведите примеры двух равных множеств.
4. Дайте определение подмножества. Приведите примеры. Проиллюстрируйте это понятие с помощью кругов.
5. Дайте определение пересечения, объединения, разности двух множеств. Приведите примеры. Проиллюстрируйте с помощью кругов.
6. Объясните, что называется дополнением одного множества до другого. Дополнением множества? Приведите примеры. Проиллюстрируйте эти понятия с помощью соответствующих рисунков.

Упражнения

1°. Запишите с помощью фигурных скобок множество:
1) букв в слове «алгебра»; 2) четных однозначных натуральных чисел; 3) нечетных однозначных натуральных чисел; 4) однозначных простых чисел.

2°. По какому характеристическому свойству записаны такие множества:
1) {понедельник, вторник, среда, четверг, пятница, суббота, воскресенье};
2) {январь, февраль, март, апрель, май, июнь, июль, август, сентябрь, октябрь, ноябрь, декабрь};
3) {Австралия, Азия, Америка, Антарктида, Африка, Европа};
4) {до, ре, ми, фа, соль, ля, си};
5) {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}.

3°. Приведите примеры пустых множеств.

4°. A — множество четных натуральных чисел, расположенных между числами 25 и 35. Запишите множество A с помощью фигурных скобок. Какие из чисел 18, 28, 30, 40 принадлежат множеству A? Ответ запишите с помощью знаков $\in$ и $\notin$.

5°. Запишите с помощью фигурных скобок и обозначьте множество:
1) натуральных делителей числа 12;
2) натуральных делителей числа 30;
3) целых делителей числа 6;
4) простых делителей числа 12.

6°. Известно, что $M = \{1;\ 2;\ 5\}$, $N = \{1;\ 4;\ 5;\ 7;\ 9\}$, $K = \{4;\ 7;\ 9\}$. Запишите с помощью фигурных скобок или знака $\varnothing$:
1) пересечение M и N; 2) пересечение M и K; 3) пересечение N и K; 4) объединение M и N; 5) объединение M и K; 6) объединение N и K; 7) разность M и N; 8) разность M и K; 9) разность N и K; 10) дополнение K до N.

7°. Объясните, почему выполняется равенство:
1) $A \cup \varnothing = A$; 2) $A \cup A = A$; 3) $A \cap \varnothing = \varnothing$; 4) $A \cap A = A$.

8°. Запишите множество всех двузначных чисел, которые можно записать с помощью цифр 0, 1, 3.

9°. Известно, что A — множество натуральных делителей числа 12, а B — множество целых делителей числа 6. Запишите множество:
1) $A \cup B$; 2) $A \cap B$; 3) $A \setminus B$; 4) $B \setminus A$.

10*. Пусть A и B — некоторые множества. Докажите равенство множеств и проиллюстрируйте его с помощью кругов Эйлера–Венна:
1) $A \cup B = B \cup A$ — *переместительный закон для объединения*;
2) $A \cap B = B \cap A$ — *переместительный закон для пересечения*.

11. В одном множестве 40 разных элементов, а во втором — 30. Сколько элементов может быть у их: 1) пересечения; 2) объединения.

12*. Пусть A, B, C — некоторые множества. Докажите равенство множеств и проиллюстрируйте его с помощью кругов Эйлера–Венна:
1) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ — *сочетательный закон для объединения*;
2) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ — *сочетательный закон для пересечения*;
3) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
4) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ — *распределительные законы*;
5) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$;
6) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ — *законы де Моргана*.

13. Каждый учащийся в классе изучает английский или французский язык. Английский язык изучают 25 учащихся, французский — 27 учащихся, а два языка — 18 учащихся. Сколько учащихся в классе?

14*. Часть жителей города говорит только по-украински, часть — только по-русски, а часть — на двух языках. По-украински говорит 95 % жителей, а по-русски — 85 %. Сколько процентов жителей города говорит на двух языках?

15*. Докажите равенство множеств и проиллюстрируйте его с помощью кругов Эйлера–Венна:
1) $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$; 2) $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$.

16*. Запишите множество всех правильных дробей $\frac{a}{b}$, где $a \in A$, $b \in B$ и $A = \{2; 3; 4; 6\}$, $B = \{1; 3; 4; 5; 6\}$.

17*. Какие трехзначные числа можно записать, если:
$A = \{3; 1; 2\}$ — множество цифр для обозначения сотен;
$B = \{2; 8\}$ — множество цифр для обозначения десятков;
$C = \{5; 7\}$ — множество цифр для обозначения единиц.
Сколько таких чисел получим? Попытайтесь сформулировать общее правило подсчета количества таких чисел, если множество A содержит m элементов ($0 \notin A$), множество B — n элементов, множество C — k элементов.

§18 ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ И БИНОМ НЬЮТОНА

18.1. Элементы комбинаторики

Таблица 22

Комбинаторика
Комбинаторика — раздел математики, в котором изучаются способы выбора и размещения элементов некоторого конечного множества на основании некоторых условий. Выбранные (или выбранные и размещенные) группы элементов называются *соединениями*. Если все элементы полученного множества разные — получаем соединения без повторений, а если в полученном множестве элементы повторяются, то получаем соединения с повторениями*.
Перестановки
Перестановкой из n элементов **называется любое упорядоченное множество из n элементов.** Иными словами, это такое *множество, для которого указано, какой элемент находится на первом месте, какой — на втором, ..., какой — на n-м*.

* Формулы для нахождения количества соединений с повторениями являются обязательными только для классов физико-математического профиля.

Продолж. табл. 22

<table>
<tr><td>Формула
числа перестановок (P_n)</td><td>Пример</td></tr>
<tr><td>$(P_n) = n!$,
где $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$
(читается:
«Эн факториал»)</td><td>Количество различных шестизначных чисел, которые можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, не повторяя эти цифры в одном числе, равно
$P_6 = 6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720.$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Размещения</td></tr>
<tr><td colspan="2">***Размещением из n элементов по k*** **называется любое упорядоченное множество из k элементов, состоящее из элементов n-элементного множества**</td></tr>
<tr><td>Формула
числа размещений $\left(A_n^k\right)$</td><td>Пример</td></tr>
<tr><td>$A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$</td><td>Количество различных трехзначных чисел, которые можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, если цифры не могут повторяться, равно
$A_6^3 = \dfrac{6!}{(6-3)!} = \dfrac{6!}{3!} = \dfrac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 4 \cdot 5 \cdot 6 = 120.$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Сочетания</td></tr>
<tr><td colspan="2">***Сочетанием без повторений из n элементов по k*** **называется любое k-элементное подмножество n-элементного множества**</td></tr>
<tr><td>Формула
числа сочетаний $\left(C_n^k\right)$</td><td>Пример</td></tr>
<tr><td>$C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$
(по определению
считают, что $C_n^0 = 1$)</td><td>Из класса, состоящего из 25 учащихся, можно выделить 5 учащихся для дежурства по школе C_{25}^5 способами, то есть
$C_{25}^5 = \dfrac{25!}{5!(25-5)!} = \dfrac{25!}{5! - 20!} = \dfrac{21 \cdot 22 \cdot 23 \cdot 24 \cdot 25}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 53\,130$
способами.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Некоторые свойства числа сочетаний без повторений</td></tr>
<tr><td>$C_n^k = C_n^{n-k}$
(в частности, $C_n^n = C_n^{n-n} = C_n^0 = 1$)</td><td>$C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$</td></tr>
</table>

Продолж. табл. 22

Схема решения комбинаторных задач	
Выбор правила	
Правило суммы	Правило произведения
Если элемент A можно выбрать m способами, а элемент B — n способами, то **A или B** можно выбрать **$m + n$** способами.	Если элемент A можно выбрать m способами, а после этого элемент B — n способами, то **A и B** можно выбрать **$m \cdot n$** способами.
Выбор формулы	

Учитывается ли порядок следования элементов в соединении?

Да → Все ли элементы входят в соединение?

Да → Перестановки; Нет → Размещения

Нет → Сочетания

Перестановки		Размещения		Сочетания	
без повторений	с повторениями	без повторений	с повторениями	без повторений	с повторениями
$P_n = n!$	$\widetilde{P}_n = \dfrac{n!}{k_1!k_2!\ldots k_m!}$, де $k_1 + k_2 + {}$ $+ \ldots + k_m = n$	$A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$	$\widetilde{A}_n^k = n^k$	$C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$	$\widetilde{C}_n^k = C_{n+k-1}^k$

18.1.1. Правила суммы и произведения. Упорядоченные множества. Размещения

Объяснение и обоснование

1. Понятие соединения. Правило суммы и произведения. При решении многих практических задач приходится выбирать из определенной совокупности объектов элементы, имеющие те или иные свойства, размещать эти элементы в определенном порядке и т. д. Поскольку в этих задачах речь идет о тех или иных комбинациях объектов, то такие задачи называют *комбинаторными*. Раздел математики, в котором рассматриваются методы решения комбинаторных задач, называется *комбинаторикой*. В комбинаторике рассматривается выбор и размещение элементов некоторого конечного множества на основании определенных условий.

Выбранные (или выбранные и размещенные) группы элементов называют *соединениями*. Если все элементы полученного множества разные — получаем размещения без повторений, а если в полученном множестве элементы могут повторяться, то получаем размещения с повторениями. В этом параграфе рассматриваются соединения без повторений, а соединения с повторениями — в § 21.

Решение многих комбинаторных задач базируется на двух основных правилах — правиле суммы и правиле произведения.

Правило суммы. Если на тарелке лежит 5 груш и 4 яблока, то выбрать один фрукт (то есть грушу или яблоко) можно 9 способами ($5 + 4 = 9$). В общем виде имеет место такое утверждение:

если элемент A можно выбрать m способами, а элемент B — n способами, то A *или* B можно выбрать $m + n$ способами.

Правило произведения. Если в киоске продают ручки 5 видов и тетради 4 видов, то выбрать набор из ручки и тетради (то есть пару — ручка и тетрадь) можно $5 \cdot 4 = 20$ способами (поскольку с каждой из 5 ручек можно взять любую из 4 тетрадей). В общем виде имеет место такое утверждение:

если элемент A можно выбрать m способами, а после этого элемент B — n способами, то A и B можно выбрать $m \cdot n$ способами.

Это утверждение означает, что если для каждого из m элементов A можно взять в пару любой из n элементов B, то количество пар равно произведению $m \cdot n$.

Повторяя приведенные рассуждения несколько раз (или, иначе говоря, используя метод математической индукции), получаем, что правила суммы и произведения можно применять при выборе произвольного конечного количества элементов.

Следовательно, если приходится выбирать **или первый элемент, или второй, или третий и т. д. элемент,** количества способов выбора каждого елемента **складывают,** а когда приходится выбирать набор, в который входят **и первый, и второй, и третий, и т. д. элементы,** количества способов выбора каждого элемента **перемножают**.

2. Упорядоченные множества. При решении комбинаторных задач приходится рассматривать не только множества, в которых элементы можно записывать в любом порядке (как мы делали это в § 17), но и так называемые *упорядоченные множества*. Для упорядоченных множеств существенным является порядок следования их элементов, то есть то, какой элемент записан на первом месте, какой на втором и т. д. В частности, если одни и те же элементы записать в разном порядке, то мы получим различные упорядоченные множества. Чтобы различить записи упорядоченного и неупорядоченного множеств, элементы упорядоченного множества часто записывают в круглых скобках, например $(1; 2; 3) \neq (1; 3; 2)$.

Рассматривая упорядоченные множества, следует учитывать, что упорядоченность не является свойством самого неупорядоченного множества (из которого мы получили упорядоченное), поскольку одно и то же множество можно по-разному упорядочить. Например, множество из трех чисел $\{-5; 1; 3\}$

можно упорядочить по возрастанию: (−5; 1; 3), по убыванию: (3; 1; − 5), по возрастанию абсолютной величины числа: (1; 3; −5) и т. д.

Будем понимать, что для того *чтобы задать конечное упорядоченное множество из n элементов, достаточно указать, какой элемент находится на первом месте, какой на втором, ..., какой на n-м.*

3. Размещения.

***Размещением из n элементов по k* называется любое упорядоченное множество из *k* элементов, состоящее из элементов *n*-элементного множества.**

Например, из множества, содержащего три цифры {1; 5; 7}, можно составить следующие размещения из двух элементов без повторений:

(1; 5), (1; 7), (5; 7), (5; 1), (7; 1), (7; 5).

Количество размещений из n элементов по k обозначается A_n^k (читается: «A из n по k», A — первая буква французского слова *arrangement*, что означает «размещение, приведение в порядок»). Как видим, $A_3^2 = 6$.

Выясним, сколько всего можно составить размещений из n элементов по k без повторений. Составление размещения представим себе как последовательное заполнение k мест, которые мы будем изображать в виде клеточек (рис. 126). На первое место мы можем выбрать один из n элементов заданного множества (то есть элемент для первой клеточки можно выбрать n способами).

Если элементы нельзя повторять, то на второе место можно выбрать только один элемент из оставшихся, то есть из $n - 1$ элементов. Теперь уже два элемента использованы и на третье место можно выбрать только один из $n - 2$ элементов и т. д. На k-е место можно выбрать только один из $n - (k - 1) = n - k + 1$ элементов (см. рис. 126).

Поскольку требуется выбрать элементы и на первое место, и на второе, ..., и на k-е, то используем правило произведения, получим следующую **формулу числа размещений из n элементов по k:**

$$A_n^k = \underbrace{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}_{k\ \text{множителей}}$$

Например, $A_3^2 = 3 \cdot 2 = 6$ (что совпадает с соответствующим значением, полученным выше).

Аналогично можно обосновать формулу для нахождения числа размещений с повторениями (см. § 21).

При решении простейших комбинаторных задач важно правильно выбрать формулу, по которой будут проводиться вычисления. Для этого достаточно выяснить следующее:

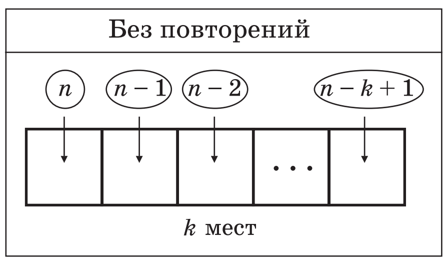


Рис. 126

— *Учитывается ли порядок следования элементов в соединении?*

— *Все ли заданные элементы входят в полученное соединение*?

Если, например, порядок следования элементов учитывается и из n заданных элементов в соединении используется только k элементов, то по определению — это размещение из n элементов по k.

Заметим, что после определения вида соединения следует также выяснить, *могут ли элементы в соединении повторяться*, то есть выяснить, какую формулу необходимо использовать — для количества соединений без повторений или с повторениями (см. также § 21).

Примеры решения задач

Задача 1 На соревнования по легкой атлетике приехала команда из 12 спортсменок. Сколькими способами тренер может определить, кто из них побежит в эстафете 4×100 м на первом, втором, третьем и четвертом этапах?

Решение

► Количество способов выбрать из 12 спортсменок четырех для участия в эстафете равно количеству размещений из 12 элементов по 4 (без повторений), то есть

$$A_{12}^4 = 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 = 11\,880. \triangleleft$$

Комментарий

Для выбора формулы выясняем ответы на вопросы, приведенные выше. Поскольку для спортсменок важно, в каком порядке они будут бежать, то порядок при выборе элементов учитывается. В полученное соединение входят не все 12 заданных элементов. Следовательно, соответствующее соединение — размещение из 12 элементов по 4 (без повторений, поскольку каждая спортсменка может бежать только на одном этапе эстафеты).

Задача 2 Найдите количество трехзначных чисел, которые можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, если цифры в числе не повторяются.

Решение

► Количество трехзначных чисел, которые можно составить из семи цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, равно числу размещений из 7 элементов по 3, то есть

$$A_7^3 = 7 \cdot 6 \cdot 5 = 210. \triangleleft$$

Комментарий

Для выбора формулы выясняем, что для чисел, которые мы будем составлять, порядок следования цифр учитывается и не все элементы выбираются (только 3 из заданных семи). Следовательно, соответствующее соединение — размещение из 7 элементов по 3 (без повторений).

Задача 3* Найдите количество трехзначных чисел, которые можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 0, если цифры в числе не повторяются.

К о м м е н т а р и й

Выбор формулы проводится таким же образом, как и в задаче 2. Следует учесть, что если число, составленное из трех цифр, начинается цифрой 0, то оно не считается трехзначным. Следовательно, для ответов на вопросы задачи можно сначала из заданных 7 цифр записать все числа, состоящие из 3 цифр (см. пример 2), а затем из количества полученных чисел вычесть количество чисел, составленных из трех цифр, но начинающих цифрой 0. В последнем случае мы фактически будем из всех цифр без нуля (их 6) составлять двузначные числа. Тогда их количество равно числу размещений из 6 элементов по 2 (см. решение).

Также можно выполнить непосредственное вычисление, последовательно заполняя три места в трехзначном числе и используя правило произведения. В этом случае удобно сделать рассуждения наглядными, изображая соответствующие разряды в трехзначном числе в виде клеточек, например, так:

6 возможностей	6 возможностей	5 возможностей

Р е ш е н и е

► Количество трехзначных чисел, которые можно составить из семи цифр (среди которых нет цифры 0), если цифры в числе не повторяются, равно числу размещений из 7 элементов по 3, то есть A_7^3.
Но среди данных цифр есть цифра 0, с которой не может начинаться трехзначное число. Поэтому из размещений из 7 элементов по 3 необходимо исключить те размещения, в которых первым элементом является цифра 0. Их количество равно числу размещений из 6 элементов по 2, то есть A_6^2. Следовательно, искомое количество трехзначных чисел равно

$$A_7^3 - A_6^2 = 7\cdot 6\cdot 5 - 6\cdot 5 = 180. \quad \triangleleft$$

Задача 4 Решите уравнение $\dfrac{A_x^4}{A_x^2} = 6.$

Р е ш е н и е

► ОДЗ: $x \in N$, $x \geqslant 4$. Тогда получаем

$$\frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{x(x-1)} = 6.$$

На ОДЗ это уравнение равносильно уравнениям:

К о м м е н т а р и й

Уравнения, в запись которых входят выражения, обозначающие количество соответствующих соединений из x элементов, считаются определенными только при нату-

$$(x-2)(x-3)=6,$$
$$x^2-5x=0,$$
$$x(x-5)=0.$$

Тогда $x = 0$ или $x = 5$.

В ОДЗ входит только $x = 5$.

Ответ: 5. ◁

ральных значениях переменной x. В данном случае, чтобы выражение A_x^4 имело смысл необходимо выбирать натуральные значения $x \geqslant 4$ (в этом случае A_x^2 также существует и, конечно, $A_x^2 \neq 0$). Для преобразования уравнения используем соответствующие формулы:

$$A_x^4 = x(x-1)(x-2)(x-3),$$
$$A_x^2 = x(x-1).$$

Вопросы для контроля

1. Сформулируйте и объясните на примерах правило суммы и правило произведения для решения комбинаторных задач.
2. Объясните, какое конечное множество считается упорядоченным. Приведите примеры упорядоченных конечных множеств.
3. Объясните, что называется размещением из n элементов по k без повторений. Приведите примеры.
4. Запишите формулу для вычисления числа размещений из n элементов по k без повторений. Приведите примеры ее использования.

5*. Обоснуйте формулу для вычисления числа размещений из n элементов по k без повторений.

Упражнения

1°. Имеем 4 разных конверта без марок и 3 разные марки. Сколькими способами можно выбрать конверт и марку для отправления письма?

2°. В коробке находится 10 белых и 6 черных шаров.
1) Сколькими способами из коробки можно вынуть один шар любого цвета?
2) Сколькими способами из коробки можно вынуть два разноцветных шара?

3. В корзине лежат 12 яблок и 9 апельсинов (все разные). Петя выбирает или яблоко, или апельсин, после него из оставшихся фруктов Надя выбирает яблоко и апельсин. Сколько возможно таких выборов? При каком выборе Пети у Нади больше возможностей выбора?

4. Ученику необходимо сдать 4 экзамена на протяжении 8 дней. Сколькими способами может быть составлено расписание его экзаменов?

5. Сколькими способами может расположиться семья из трех человек в четырехместном купе, если других пассажиров в купе нет?

6. Из 30 участников собрания необходимо выбрать председателя и секретаря. Сколькими способами это можно сделать?

7. Сколькими способами могут занять первое, второе и третье места 8 участниц финального забега на дистанции 100 м?

8. Сколькими способами можно изготовить трехцветный флаг с горизонтальными полосами, если есть материал 7 разных цветов?

9. Сколькими способами организаторы конкурса могут определить, кто из 15 его участников будет выступать первым, вторым и третим?

10. На плоскости отметили 5 точек. Их необходимо обозначить латинскими буквами. Сколькими способами это можно сделать, если в латинском алфавите 26 букв?

11. Сколько четырехзначных чисел можно составить из цифр 1, 3, 5, 7, 9, если цифры в числе не повторяются?

12*. Сколько четырехзначных чисел можно составить из цифр 0, 2, 4, 6, 8, если цифры в числе не повторяются?

13. Сколько существует семизначных телефонных номеров, в которых все цифры разные и первая цифра отлична от нуля?

14. Сколько разных трехзначных чисел (без повторения цифр) можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5 так, чтобы полученные числа были: 1) четными; 2) кратными 5?

15*. Решите уравнение: 1) $A_x^2=20$; 2) $\dfrac{A_x^5}{A_x^3}=6$.

18.1.2. Перестановки

Объяснение и обоснование

***Перестановкой из n элементов* называется любое упорядоченное множество из *n* элементов**

Напомним, что упорядоченное множество — это *такое множество, для которого указано, какой элемент находится на первом месте, какой на втором, ..., какой на n-м*.

Например, переставляя цифры в числе 236 (там множество цифр {2; 3; 6} уже упорядоченное), можно составить такие *перестановки без повторений*: (2; 3; 6), (2; 6; 3), (3; 2; 6), (3; 6; 2), (6; 2; 3), (6; 3; 2) — всего 6 перестановок*.

Количество перестановок без повторений из n элементов обозначается P_n (P — первая буква французского слова *permutation* — перестановка). Как видим, $P_3=6$.

Фактически перестановки без повторений из n элементов являются размещениями из n элементов по n без повторений, поэтому $P_n=A_n^n=\underbrace{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\ldots\cdot 2\cdot 1}_{n\text{ множителей}}$. Произведение $1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n$ обозначается $n!$. Поэтому полученная **формула числа перестановок без повторений из *n* элементов** может быть записана так:

$$P_n=n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n.$$

* Отметим, что каждая такая перестановка определяет трехзначное число, составленное из цифр 2, 3, 6 так, что цифры в числе не повторяются.

Например, $P_3 = 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$ (что совпадает с соответствующим значением, полученным выше).

С помощью факториалов формулу для числа размещений без повторений

$$A_n^k = \underbrace{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}_{k \text{ множителей}} \qquad (1)$$

можно записать в другом виде. Для этого умножим и разделим выражение в формуле (1) на произведение $(n-k) \cdot (n-k-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = (n-k)!$. Получаем

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1) =$$
$$= \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) \cdot (n-k) \cdot (n-k-1) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{(n-k) \cdot (n-k-1) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Следовательно, **формула числа размещений без повторений из n элементов по k** может быть записана так:

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}. \qquad (2)$$

Для того чтобы этой формулой можно было пользоваться при всех значениях k, в частности, при $k = n - 1$ и при $k = n$, договорились считать, что

$1! = 1$ и $0! = 1$.

Например, по формуле (2) $A_6^5 = \dfrac{6!}{(6-5)!} = \dfrac{6!}{1!} = 6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720.$

Обратим внимание, что в тех случаях, когда значение $n!$ оказывается очень большим, ответы оставляют записанными с помощью факториалов.

Например, $A_{30}^{25} = \dfrac{30!}{(30-25)!} = \dfrac{30!}{5!}.$

Примеры решения задач

Напомним, что для выбора формулы при решении простейших комбинаторных задач достаточно выяснить следующее:

— *Учитывается ли порядок следования элементов в соединении?*

— *Все ли заданные элементы входят в полученное соединение*?

Если, например, порядок следования элементов учитывается и все n заданных элементов используются в соединении, то по определению это перестановки из n элементов.

Задача 1 Найдите, сколькими способами можно восемь учащихся построить в колонну по одному.

Решение

► Количество способов равно числу перестановок из 8 элементов.

То есть

$P_8 = 8! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 =$

$= 40\,320.$ ◁

Комментарий

Для выбора соответствующей формулы выясняем ответы на вопросы, приведенные выше. Поскольку порядок следования элементов учитывается и все 8 заданных элементов выбираются, то соответствующие соединения — это перестановки из 8 элементов без повторений. Их количество можно вычислить по формуле

$$P_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n.$$

Задача 2 Найдите количество разных четырехзначных чисел, которые можно составить из цифр 0, 3, 7, 9 (цифры в числе не повторяются).

Решение

► Из четырех цифр 0, 3, 7, 9, не повторяя заданные цифры, можно получить P_4 перестановок. Перестановки, начинающиеся с цифры 0, не являются записью четырехзначного числа — их количество P_3. Тогда искомое количество четырехзначных чисел равно

$P_4 - P_3 = 4! - 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 - 1 \cdot 2 \cdot 3 = 18$. ◁

Комментарий

Поскольку порядок следования элементов учитывается и для получения четырехзначного числа надо использовать все элементы, то искомые соединения — это перестановки из 4 элементов. Их количество — P_4. При этом необходимо учесть, что в четырехзначном числе на первом месте не может стоять цифра 0. Таких чисел будет столько, сколько раз мы сможем выполнить перестановки из 3 оставшихся цифр, то есть P_3.

Задача 3* Есть десять книг, из которых четыре — учебники. Сколькими способами можно поставить эти книги на полку так, чтобы все учебники стояли рядом?

Решение

► Сначала будем рассматривать учебники как одну книгу. Тогда на полке надо расставить не 10, а 7 книг. Это можно сделать P_7 способами. В каждом из полученных наборов книг можно выполнить еще P_4 перестановок учебников. По правилу умножения искомое количество способов равно

$P_7 \cdot P_4 = 7! \cdot 4! = 5040 \cdot 254 = 120\,960$. ◁

Комментарий

Задачу можно решать в два этапа. На первом этапе условно будем считать все учебники за 1 книгу. Тогда получим 7 книг (6 не учебников + 1 условная книга — учебник). Порядок следования элементов учитывается и используются все элементы (поставить на полку необходимо все книги). Следовательно, соответствующие соединения — это перестановки из 7 элементов. Их количество — P_7.

На втором этапе решения будем переставлять между собой только учебники. Это можно сделать P_4 способами. Поскольку нам надо переставить и учебники, и другие книги, то используем правило произведения.

Вопросы для контроля

1. Объясните, что называется перестановкой из n элементов без повторений. Приведите примеры.
2. Запишите формулу для вычисления числа перестановок из n элементов без повторений. Приведите примеры ее использования.
3*. Обоснуйте формулу для вычисления числа перестановок из n элементов без повторений.

Упражнения

1. Сколькими способами 4 мужчины могут расположиться на четырехместной скамейке?

2. Курьер должен разнести пакеты в 7 разных учреждений. Сколько маршрутов он может выбрать?

3. Сколько существует выражений, тождественно равных произведению $abcde$, которые получаются из него перестановкой множителей?

4. Ольга помнит, что телефон подруги оканчивается тремя цифрами 5, 7, 8, но забыла, в каком порядке эти цифры расположены. Укажите наибольшее число вариантов, которые ей придется перебрать, чтобы дозвониться подруге.

5. Сколько шестизначных чисел (без повторения цифр) можно составить из цифр:
1) 1, 2, 5, 6, 7, 8; 2) 0, 2, 5, 6, 7, 8?

6. Сколько среди четырехзначных чисел, составленных из цифр 3, 5, 7, 9 (без повторения цифр), есть такие, которые:
1) начинаются с цифры 3; 2) кратны 5?

7. Найдите сумму цифр всех четырехзначных чисел, которые можно составить из цифр 1, 3, 5, 7 (без повторения цифр в числе).

8. В расписании на понедельник шесть уроков: алгебра, геометрия, иностранный язык, история, физкультура, химия. Сколькими способами можно составить расписание уроков на этот день так, чтобы два урока математики стояли подряд?

9*. Сколькими способами можно расставить на полке 12 книг, из которых 5 книг — это сборники стихотворений, чтобы сборники стихотворений стояли рядом в случайном порядке?

10. Найдите, сколькими способами 5 мальчиков и 5 девочек могут занять в театре в одном ряду места с 1 по 10. Сколькими способами они могут это сделать, если мальчики будут сидеть на нечетных местах, а девочки — на четных?

18.1.3. Сочетания

Объяснение и обоснование

1. Сочетания без повторений.

Сочетанием без повторений из n элементов по k называется любое k-элементное подмножество n-элементного множества.

Например, из множества $\{a, b, c, d\}$ можно составить следующие сочетания без повторений из трех элементов: $\{a, b, c\}$, $\{a, b, d\}$, $\{a, c, d\}$, $\{b, c, d\}$.

Количество сочетаний без повторений из n элементов по k элементов обозначается символом C_n^k (читается: «Число сочетаний из n по k» или «це из n по k», C — первая буква французского слова *combinaison* — сочетание). Как видим, $C_4^3 = 4$.

Выясним, сколько всего можно составить сочетаний без повторений из n элементов по k. Для этого используем известные нам формулы числа размещений и перестановок.

Составление размещения без повторений из n элементов по k проведем в два этапа. Сначала выберем k разных элементов из заданного n-элементного множества, не учитывая порядок выбора этих элементов (то есть выберем k-элементное подмножество из n-элементного множества — сочетание без повторений из n-элементов по k). По нашему обозначению это можно сделать C_n^k способами. После этого полученное множество из k разных элементов упорядочим. Его можно упорядочить $P_k = k!$ способами. Получим размещения без повторений из n элементов по k. Следовательно, количество размещений без повторений из n элементов по k в $k!$ раз больше числа сочетаний без повторений из n элементов по k. То есть $A_n^k = C_n^k \cdot k!$. Отсюда $C_n^k = \frac{A_n^k}{k!}$. Учитывая, что по формуле (2) $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$, получаем

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \qquad (3)$$

Например, $C_4^3 = \frac{4!}{3!(4-3)!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 1} = 4$, что совпадает со значением, полученным выше.

Используя формулу (3), можно легко обосновать *свойство* 1 *числа сочетаний без повторений*, приведенное в таблице 21 (с. 233).

1) Поскольку $C_n^{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!\cdot(n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k)!\cdot k!} = C_n^k$, то

$$C_n^k = C_n^{n-k}. \qquad (4)$$

Для того чтобы формулу (4) можно было использовать и при $k = n$, договорились считать, что $C_n^0 = 1$. Тогда по формуле (4) $C_n^n = C_n^0 = 1$.

Если в формуле (3) сократить числитель и знаменатель на $(n-k)!$, то получим формулу, по которой удобно вычислять C_n^k при малых значениях k:

$$C_n^k = \frac{\overbrace{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}^{k\text{ множителей}}}{k!} = \frac{\overbrace{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}^{k\text{ множителей}}}{\underbrace{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot k}_{k\text{ множителей}}}. \qquad (5)$$

Например, $C_{25}^2 = \frac{\overbrace{25\cdot 24}^{2\text{ множителя}}}{1\cdot 2} = 25\cdot 12 = 300$, $C_8^3 = \frac{\overbrace{8\cdot 7\cdot 6}^{3\text{ множителя}}}{1\cdot 2\cdot 3} = 8\cdot 7 = 56$.

2. Вычисление числа сочетаний без повторений с помощью треугольника Паскаля. Для вычисления числа сочетаний без повторений можно применять формулу (3): $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, а можно последовательно вычислять соответствующие значения, пользуясь таким свойством:

$$C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}. \qquad (6)$$

Для обоснования равенства (6) найдем сумму $C_n^k + C_n^{k+1}$, учитывая, что

$$(k+1)! = 1\cdot 2\cdot\ldots\cdot k\cdot(k+1) = k!\,(k+1) \text{ и}$$
$$(n-k)! = 1\cdot 2\cdot\ldots\cdot(n-k-1)\cdot(n-k) = (n-k-1)!\,(n-k).$$

$$C_n^k + C_n^{k+1} = \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} = \frac{n!}{k!(n-k-1)!(n-k)} + \frac{n!}{k!(k+1)(n-k-1)!} =$$

$$= \frac{n!(k+1+n-k)}{(k+1)!(n-k)!} = \frac{n!(n+1)}{(k+1)!(n-k)!} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!}.$$

Но $C_{n+1}^{k+1} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!((n+1)-(k+1))!} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!}$, следовательно,

$$C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}.$$

Это равенство позволяет последовательно вычислять значения C_n^k с помощью специальной таблицы, которая называется *треугольником Паскаля*. Если считать, что $C_0^0 = 1$, то таблица будет иметь следующий вид (табл. 23).

Каждая строка этой таблицы начинается с единицы и заканчивается единицей $\left(C_n^0 = C_n^n = 1\right)$.

Если какая-либо строка уже заполнена, например, третья, то в четвертой строке надо записать на первом месте единицу. На втором месте запишем число, равное сумме двух чисел третьей строки, стоящих над ним левее

Таблица 23

Значение C_n^k

n \ k	0	1	2	3	4	5	6	…
0	1							
1	1	1						
2	1	2	1					
3	1	3	3	1				
4	1	4	6	4	1			
5	1	5	10	10	5	1		
6	1	6	15	20	15	6	1	
…			•	•	•			
n	C_n^0	C_n^1	C_n^2	C_n^3	C_n^4	C_n^5	C_n^6	…

и правее (поскольку по формуле (6) $C_4^1 = C_3^0 + C_3^1 = 1 + 3 = 4$). На третьем месте запишем число, равное сумме двух следующих чисел третьей строки, стоящих над ним левее и правее $\left(C_4^2 = C_3^1 + C_3^2 = 3 + 3 = 6\right)$, и т. д. (а на последнем месте снова запишем единицу).

Примеры решения задач

Обратим внимание, что, как и раньше, для выбора формулы при решении простейших комбинаторных задач достаточно ответить на вопросы:

1) *Учитывается ли порядок следования элементов в соединении?*

2) *Все ли заданные элементы входят в полученное соединение*?

Для выяснения того, что заданное соединение является сочетанием, достаточно ответить только на первый вопрос (см. схему в таблице 22 на с. 233). Если порядок следования элементов не учитывается, то по определению это сочетания из n элементов по k элементов.

Задача 1 Из 12 членов туристической группы надо выбрать трех дежурных. Сколькими способами можно сделать этот выбор?

Решение

► Количество способов выбрать из 12 туристов трех дежурных равно количеству сочетаний из 12 элементов по 3 (без повторений), то есть

$$C_{12}^3=\frac{12!}{3!\cdot(12-3)!}=\frac{12!}{3!\cdot 9!}=\frac{12\cdot 11\cdot 10}{1\cdot 2\cdot 3}=220.$$

◁

Комментарий

Для выбора соответствующей формулы выясняем ответы на вопросы, приведенные выше. Поскольку порядок следования элементов не учитывается (для дежурных неважно, в каком порядке их выберут), то соответствующее соединение является сочетанием из 12 элементов по 3 (без повторений). Для вычисления можно использовать формулы (3) или (5), в данном случае применяем формулу (3): $C_n^k=\frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Задача 2 Из вазы с фруктами, в которой лежит 10 разных яблок и 5 разных груш, требуется выбрать 2 яблока и 3 груши. Сколькими способами можно сделать такой выбор?

Решение

► Выбрать 2 яблока из 10 можно C_{10}^2 способами. При каждом выборе яблок груши можно выбрать C_5^3 способами. Тогда по правилу произведения выбор требуемых фруктов можно выполнить $C_{10}^2\cdot C_5^3$ способами. Получаем

$$C_{10}^2\cdot C_5^3=\frac{10\cdot 9}{1\cdot 2}\cdot\frac{5\cdot 4\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3}=450.$$

◁

Комментарий

Сначала отдельно выберем 2 яблока из 10 и 3 груши из 5. Поскольку при выборе яблок или груш порядок следования элементов не учитывается, то соответствующие соединения — сочетания без повторений.

Учитывая, что требуется выбрать 2 яблока и 3 груши, используем правило произведения и перемножим полученные возможности выбора яблок $\left(C_{10}^2\right)$ и груш $\left(C_5^3\right)$.

Вопросы для контроля

1. Объясните, что называется сочетаниями из n элементов по k без повторений. Приведите примеры.
2. Запишите формулу для вычисления числа сочетаний из n элементов по k без повторений. Приведите примеры ее использования.
3*. Обоснуйте формулу для вычисления числа сочетаний из n элементов по k без повторений.
4*. Обоснуйте свойство $C_n^k+C_n^{k+1}=C_{n+1}^{k+1}$.

5*. Объясните, как можно последовательно вычислять значение C_n^k с помощью специальной таблицы — треугольника Паскаля.
6. Объясните на примерах, как можно выбрать соответствующую формулу при решении простейших комбинаторных задач.

Упражнения

1°. В классе 7 учащихся успешно занимаются математикой. Сколькими способами можно выбрать из них двоих для участия в математической олимпиаде?
2°. В магазине «Филателия» продается 8 разных наборов марок, посвященных спортивной тематике. Сколькими способами можно выбрать из них 3 набора?
3°. Ученикам дали список из 10 книг, которые рекомедуется прочитать во время каникул. Сколькими способами ученик может выбрать из них 6 книг?
4. На полке стоит 12 книг: англо-русский словарь и 11 художественных произведений на английском языке. Сколькими способами читатель может выбрать 3 книги, если:
1) словарь ему нужен обязательно; 2) словарь ему не нужен?
5°. В классе учатся 16 мальчиков и 12 девочек. Для уборки территории необходимо выделить четырех мальчиков и трех девочек. Сколькими способами это можно сделать?

Решите упражнения **6—26**, *используя известные вам формулы и правила комбинаторики.*

6. Во время встречи 16 человек пожали друг другу руки. Сколько всего сделано рукопожатий?
7. Группа учащихся из 30 человек решила обменяться фотографиями. Сколько всего фотографий необходимо было для этого?
8°. Сколько перестановок можно сделать из букв слова «Харьков»?
9°. Бригадир должен откомандировать на работу бригаду из 5 человек. Сколько бригад по 5 человек в каждой можно организовать из 12 человек?
10. Сколькими разными способами собрание из 40 человек может выбрать из числа своих членов председателя собрания, его заместителя и секретаря?
11. Сколько прямых линий можно провести через 8 точек, из которых никакие три не лежат на одной прямой?
12. Сколько разных пятизначных чисел можно записать с помощью цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 без их повторения?
13. Определите число всех диагоналей правильного: 1) пятиугольника; 2) восьмиугольника; 3) двенадцатиугольника; 4) пятнадцатиугольника.
14°. Сколько разных трехцветных флагов можно сшить, комбинируя синий, красный и белый цвета?

15. Сколько разных плоскостей можно провести через 10 точек, если никакие три из них не лежат на одной прямой и никакие четыре точки не лежат в одной плоскости?

16*. Сколько разных пятизначных чисел можно записать с помощью цифр 0, 2, 4, 6, 8 без их повторения?

17. Среди перестановок из цифр 1, 2, 3, 4, 5 сколько таких, которые не начинаются цифрой 5? числом 12? числом 123?

18. Среди сочетаний из 10 букв a, b, c, ... по 4 сколько таких, которые не содержат буквы a? букв a и b?

19. Среди размещений из 12 букв a, b, c, ... по 5 сколько таких, которые не содержат буквы a? букв a и b?

20. Сколько необходимо взять элементов, чтобы число размещений из них по 4 было в 12 раз больше, чем число размещений из них по 2?

Решите уравнение **(22–25)**.

22. 1) $A_x^2 = 42;$ 2) $A_x^3 = 56x;$ 3) $A_{x+1}^2 = 30;$ 4) $5C_x^3 = C_{x+2}^4.$

23. 1) $C_{x-3}^2 = 21;$ 2) $C_x^3 = \dfrac{5x(x-3)}{4};$ 3) $C_x^3 + C_x^2 = 15(x-1);$ 4) $C_x^4 = \dfrac{15A_x^2}{4}.$

24. 1) $\dfrac{A_x^5 + A_x^3}{A_x^3} = 43;$ 2) $\dfrac{A_x^7 - A_x^5}{A_x^5} = 89;$ 3) $12C_x^1 + C_{x+4}^2 = 162;$ 4) $C_{x+1}^5 = \dfrac{3A_x^3}{8}.$

25. 1) $\dfrac{A_x^4 P_{x-4}}{P_{x-2}} = 42;$ 2) $\dfrac{A_{x+1}^{n+1} P_{x-n}}{P_{x-1}} = 90;$ 3) $\dfrac{P_{x+2}}{A_x^n P_{x-n}} = 132;$ 4) $\dfrac{A_{x+2}^{n+2} P_{x-n}}{P_x} = 110.$

26. Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} A_x^y : A_x^{y-1} = 10, \\ C_x^y : C_x^{y-1} = \dfrac{5}{3}; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} C_x^{y+1} = 2{,}5x, \\ C_{x-1}^y = 10; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} C_x^y : C_x^{y+2}, \\ C_x^2 = 153; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} A_x^y : A_x^{y-1} = 8, \\ C_x^y : C_x^{y-1} = 1{,}6. \end{cases}$

18.2. Бином Ньютона

Таблица 24

Бином Ньютона
$(a+x)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1}x + C_n^2 a^{n-2}x^2 + C_n^3 a^{n-3}x^3 + \ldots + C_n^k a^{n-k}x^k + \ldots + C_n^{n-1} a x^{n-1} + x^n$
Поскольку $1 = C_n^0 = C_n^n$ и $x^0 = 1$, $a^0 = 1$ (при $x \neq 0$ и $a \neq 0$), то формулу бинома Ньютона можно записать еще и так:
$(a+x)^n = C_n^0 a^n x^0 + C_n^1 a^{n-1}x + C_n^2 a^{n-2}x^2 + C_n^3 a^{n-3}x^3 + \ldots + C_n^k a^{n-k}x^k + \ldots + C_n^n a^0 x^n$
Общий член разложения степени бинома имеет вид
$T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} x^k$ (где $k = 0, 1, 2, \ldots, n$).
Коэффициенты C_n^k называют **биномиальными коэффициентами.**

Продолж. табл. 24

Свойства биномиальных коэффициентов
1. **Число биномиальных коэффициентов** (а следовательно, и число слагаемых в разложении n-й степени бинома) **равно $n+1$.** 2. **Коэффициенты членов, равноудаленных от начала и конца разложения, равны между собой** (поскольку $C_n^k = C_n^{n-k}$). 3. **Сумма всех биномиальных коэффициентов равна 2^n:** $$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 + \ldots + C_n^n = 2^n.$$ 4. **Сумма биномиальных коэффициентов, стоящих на четных местах, равна сумме биномиальных коэффициентов, стоящих на нечетных местах.** 5. Для вычисления биномиальных коэффициентов можно воспользоваться треугольником Паскаля, в котором вычисления коэффициентов основываются на формуле $C_{n+1}^{k+1} = C_n^k + C_n^{k+1}$.

Треугольник Паскаля

Степень	Коэффициенты разложения	Ориентир
$(a+x)^0$	1	*В каждом ряду по краям стоят единицы, а каждое из остальных чисел равно сумме двух чисел, находящихся над ним справа и слева*
$(a+x)^1$	1 1	
$(a+x)^2$	1 2 1	
$(a+x)^3$	1 3 3 1	
$(a+x)^4$	1 4 6 4 1	
$(a+x)^5$	1 5 10 10 5 1	
$(a+x)^6$	1 6 15 20 15 6 1	
…	…	

Например, $(a+b)^4 = a^4 + 4\,a^3b + 6\,a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$.

Объяснение и обоснование

1. Бином Ньютона. Двучлен вида $a + x$ также называют биномом. Из курса алгебры известно, что:

$(a+x)^1 = a + x = 1 \cdot a + 1 \cdot x;$

$(a+x)^2 = a^2 + 2ax + x^2 = 1 \cdot a^2 + 2 \cdot ax + 1 \cdot x^2;$

$(a+x)^3 = a^3 + 3a^2x + 3ax^2 + x^3 = 1 \cdot a^3 + 3 \cdot a^2x + 3 \cdot ax^2 + 1 \cdot x^3.$

Можно заметить, что коэффициенты разложения степени бинома $(a+x)^n$ при $n=1, 2, 3$ совпадают с числами в соответствующей строке треугольника Паскаля. Оказывается, что это свойство выполняется для любого натурального n, то есть справедлива формула

$$(a+x)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1}x + C_n^2 a^{n-2}x^2 + C_n^3 a^{n-3}x^3 + \ldots + C_n^k a^{n-k}x^k + \ldots + C_n^n x^n. \qquad (7)$$

Формулу (7) называют *биномом Ньютона*. Правая часть этого равенства называется разложением степени бинома $(a+x)^n$, а числа C_n^k (при $k = 0, 1, 2, \ldots, n$) называют *биномиальными коэффициентами*. **Общий член разложения** степени бинома имеет вид

$$T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} x^k \text{ (где } k = 0, 1, 2, \ldots, n).$$

Обосновать формулу (7) можно, например, следующим образом.

Если раскрыть скобки в выражении $(a+x)^n$, то есть умножить бином $a+x$ сам на себя n раз, то получим многочлен n-й степени относительно переменной x. Тогда результат можно записать так:

$$(a+x)^n = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \ldots + A_k x^k + \ldots + A_n x^n. \qquad (8)$$

Чтобы найти значение A_0, подставим в обе части равенства (8) вместо x значение 0. Получаем $A_0 = a^n$, а учитывая, что $C_n^0 = 1$, можем записать:

$$A_0 = a^n = C_n^0 a^n.$$

Чтобы найти A_1, сначала возьмем производную от обеих частей равенства (8):

$$((a+x)^n)' = (A_0 + A_1 x + A_2x^2 + A_3x^3 + \ldots + A_kx^k + \ldots + A_nx^n)',$$

$$n(a+x)^{n-1} = A_1 + 2A_2x + 3A_3x^2 + \ldots + kA_kx^{k-1} + \ldots + nA_nx^{n-1}, \qquad (9)$$

затем, подставив в обе части полученного равенства (9) $x = 0$, получим: $na^{n-1} = A_1$. Учитывая, что $C_n^1 = n$, можем записать: $A_1 = na^{n-1} = C_n^1 a^{n-1}$.

Аналогично, чтобы найти A_2, возьмем производную от обеих частей равенства (9):

$$n(n-1)(a+x)^{n-2} = 2A_2 + 3\cdot 2\cdot A_3x + \ldots$$
$$\ldots + k(k-1)A_kx^{k-2} + \ldots + n(n-1)A_nx^{n-2}, \qquad (10)$$

и, подставив $x = 0$ в равенство (10), получим $n(n-1)a^{n-2} = 2A_1$. Тогда

$$A_2 = \frac{n(n-1)}{2}a^{n-2} = \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}a^{n-2} = C_n^2 a^{n-2}.$$

Другие коэффициенты находят аналогично. Если продифференцировать k раз равенство (8), то получим:

$$n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)(a+x)^{n-k} = k\cdot(k-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1\cdot A_k +$$
$$+ (k+1)\cdot k\cdot(k-1)\cdot\ldots\cdot 2A_{k+1}x + \ldots + n(n-1)\ldots(n-k+1)A_nx^{n-k}.$$

Подставляя в последнее равенство $x = 0$, имеем

$$n(n-1)\ldots(n-k+1)a^{n-k} = k\cdot(k-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1\cdot A_k. \qquad (11)$$

Таблица 25

Степень	Коэффициенты разложения	Ориентир
$(a+x)^0$	1	*В каждом ряду по краям стоят единицы, а каждое из остальных чисел равно сумме двух чисел, находящихся над ним справа и слева*
$(a+x)^1$	1 1	
$(a+x)^2$	1 2 1	
$(a+x)^3$	1 3 3 1	
$(a+x)^4$	1 4 6 4 1	
$(a+x)^5$	1 5 10 10 5 1	
...	...	

Умножим обе части равенства (11) на $(n-k)!$ и найдем коэффициент $A_k = \frac{n!}{k!(n-k)!}a^{n-k} = C_n^k a^{n-k}$. Подставляя найденные значения A_k (при $k = 0, 1, 2, \ldots, n$) в равенство (8), получаем равенство (7). ○

Записывая степень двучлена по формуле бинома Ньютона для небольших значений n, биномиальные коэффициенты можно вычислять по треугольнику Паскаля (табл. 25, см. также табл. 24).

Например, $(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$.

Так как $C_n^0 = C_n^n = 1$, формулу бинома Ньютона можно записать в виде:

$$(a+x)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1}x + C_n^2 a^{n-2}x^2 + C_n^3 a^{n-3}x^3 + \ldots + C_n^k a^{n-k}x^k + \ldots + C_n^{n-1} a x^{n-1} + x^n, \quad (12)$$

а учитывая, что $x^0 = 1$ и $a^0 = 1$ (при $x \neq 0$ и $a \neq 0$), еще и так:

$$(a+x)^n = C_n^0 a^n x^0 + C_n^1 a^{n-1}x + C_n^2 a^{n-2}x^2 + C_n^3 a^{n-3}x^3 + \ldots + C_n^k a^{n-k}x^k + \ldots + C_n^n a^0 x^n. \quad (13)$$

Если в формуле бинома Ньютона (12) заменить x на $(-x)$, то получим *формулу возведения в степень разности $a - x$*:

$$(a-x)^n = a^n - C_n^1 a^{n-1}x + C_n^2 a^{n-2}x^2 - C_n^3 a^{n-3}x^3 + \ldots + (-1)^n x^n.$$

Например, $(a-b)^5 = a^5 - 5a^4b + 10a^3b^2 - 10a^2b^3 + 5ab^4 - b^5$ (знаки членов разложения чередуются!).

2. Свойства биномиальных коэффициентов.

1. **Число биномиальных коэффициентов** (а следовательно, и число слагаемых) в разложении n-й степени бинома **равно $n+1$,** поскольку разложение содержит все степени x от 0 до n (и других слагаемых не содержит).
2. **Коэффициенты членов, равноудаленных от начала и конца разложения, равны между собой,** поскольку $C_n^k = C_n^{n-k}$.
3. **Сумма всех биномиальных коэффициентов равна 2^n.**

Для обоснования полагаем в равенстве (13) (или в равенстве (7)) значения $a = x = 1$ и получаем

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 + \ldots + C_n^n = 2^n.$$

Например, $C_5^0 + C_5^1 + C_5^2 + C_5^3 + C_5^4 + C_5^5 = 1 + 5 + 10 + 10 + 5 + 1 = 32 = 2^5$.

4. **Сумма биномиальных коэффициентов, стоящих на четных местах, равна сумме биномиальных коэффициентов, стоящих на нечетных местах.**

Для обоснования возьмем в равенстве (13) значения $a = 1$, $x = -1$. Получаем

$$0 = C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + C_n^4 - C_n^5 + \ldots + (-1)^n C_n^n.$$

Тогда

$$C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \ldots = C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \ldots .$$

Примеры решения задач

Задача 1 По формуле бинома Ньютона найдите разложение степени $\left(x - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^6$.

Комментарий

Для нахождения коэффициентов разложения можно использовать треугольник Паскаля (с. 249) или вычислять их по общей формуле. По треугольнику Паскаля коэффициенты равны: 1, 6, 15, 20, 15, 6, 1. Учитывая, что при возведении в степень разности знаки членов разложения чередуются, получаем

$$(a - b)^6 = a^6 - 6a^5b + 15a^4b^2 - 20a^3b^3 + 15a^2b^4 - 6ab^5 + b^6.$$

Для упрощения записи ответа можно избавиться от иррациональности в знаменателях полученных выражений (см. решение) или сначала учесть, что ОДЗ заданного выражения: $x > 0$, и тогда $\frac{1}{\sqrt{x}} = x^{-\frac{1}{2}}$. То есть заданное выражение можно записать так: $\left(x - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^6 = \left(x - x^{-\frac{1}{2}}\right)^6$ и возвести в степень последнее выражение.

Решение

$$\left(x - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^6 = x^6 - 6x^5 \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} + 15x^4\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 - 20x^3\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^3 + 15x^2\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^4 - 6x\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^5 +$$

$$+\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^6 = x^6 - \frac{6x^5}{\sqrt{x}} + 15x^3 - \frac{20x^3}{x\sqrt{x}} + 15 - \frac{6}{x\sqrt{x}} + \frac{1}{x^3} = x^6 - 6x^4\sqrt{x} + 15x^3 -$$

$$- 20x\sqrt{x} + 15 - \frac{6\sqrt{x}}{x^2} + \frac{1}{x^3}.$$

Задача 2 В разложении степени $\left(\sqrt{b}+\frac{1}{\sqrt[3]{b}}\right)^{16}$ найдите член, содержащий b^3.

Решение

ОДЗ: $b > 0$. Тогда

$$\left(\sqrt{b}+\frac{1}{\sqrt[3]{b}}\right)^{16}=\left(b^{\frac{1}{2}}+b^{-\frac{1}{3}}\right)^{16}.$$

Общий член разложения:

$$T_{k+1}=C_{16}^{k}\left(b^{\frac{1}{2}}\right)^{16-k}\left(b^{-\frac{1}{3}}\right)^{k}=C_{16}^{k}b^{\frac{16-k}{2}-\frac{k}{3}}.$$

По условию член разложения должен содержать b^3, следовательно,

$$\frac{16-k}{2}-\frac{k}{3}=3.$$ Отсюда $k = 6$.

Тогда член разложения, содержащий b^3, равен

$$T_{k+1}=T_7=C_{16}^{6}b^{\frac{16-6}{2}-\frac{6}{3}}=C_{16}^{6}b^3=\frac{16!}{6!(16-6)!}b^3=$$

$$=\frac{16\cdot15\cdot14\cdot13\cdot12\cdot11}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6}=8008b^3.$$

Комментарий

На ОДЗ ($b > 0$) каждое слагаемое в заданном двучлене можно записать как степень с дробным показателем. Это позволит проще записать общий член разложения степени $(a + x)^n$:

$$T_{k+1}=C_n^k a^{n-k}x^k,$$

(где $k = 0, 1, 2, \ldots, n$), выяснить, какой из членов разложения содержит b^3, и записать его.

Чтобы упростить запись общего члена разложения, удобно отметить, что

$$a=\sqrt{b}=b^{\frac{1}{2}},\quad x=\frac{1}{\sqrt[3]{b}}=b^{-\frac{1}{3}},\quad n=16.$$

Вопросы для контроля

1. а) Запишите формулу бинома Ньютона. Приведите примеры ее использования.
   б*) Докажите формулу бинома Ньютона.
2*. Сформулируйте и докажите свойства биномиальных коэффициентов.

Упражнения

Найдите разложение степени бинома **(1—3)**.

1. 1) $(x + a)^6$; 2) $(x + c)^4$; 3) $(x + 2)^5$; 4*) $(1 + a)^{12}$.

2. 1) $(x - a)^7$; 2) $(x^2 - a)^6$; 3) $(a^2 + 1)^8$; 4*) $\left(a+\sqrt{b}\right)^{11}$.

3. 1) $\left(\sqrt{m}-n\right)^5$; 2) $(x - 2y)^5$; 3) $(3x + 2y)^4$;

4) $(2a^2 - 3a)^5$; 5) $\left(x^2-\frac{1}{x}\right)^6$.

4. Найдите:

1) четвертый член разложения $(a + 3)^7$;

2) девятый член разложения $\left(a+\sqrt{b}\right)^{12}$;

3) шестой член разложения $(a^2 + b^3)^{13}$;

4) средний член разложения $\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^8$.

5. Найдите член разложения бинома:

1) $(x + y)^9$, содержащий x^7;

2) $\left(\sqrt{a}+b\right)^9$, содержащий a^3;

3) $\left(\sqrt{a}+\sqrt[4]{a}\right)^{20}$, содержащий a^7;

4) $\left(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[5]{x^8}\right)^{12}$, содержащий $x^{\frac{22}{3}}$;

5) член разложения $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{a^2}}+\sqrt[4]{a^3}\right)^{17}$, не содержащий a;

6) член разложения $\left(\sqrt[3]{a}-\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^{15}$, не содержащий a.

6*. Найдите показатель степени бинома, если:

1) третий член разложения $\left(\sqrt[3]{a^2}+a^{-1}\right)^n$ содержит a^0;

2) биномиальные коэффициенты четвертого и шестого членов разложения $(1 + x)^{n+1}$ равны между собой;

3) биномиальные коэффициенты четвертого и шестого членов разложения соответственно равны 120 и 252.

7*. Найдите показатель степени бинома, если:

1) шестой член разложения $\left(a^{-\frac{1}{30}}+\sqrt[5]{a}\right)^n$ не содержит a;

2) отношение седьмого члена разложения $\left(\sqrt[3]{2}+\frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)^n$ к седьмому члену разложения от конца равно $\frac{1}{6}$;

3) шестой член разложения $\left(\frac{1}{\sqrt[4]{a^3}}-\sqrt[5]{a^3}\right)^n$ не зависит от a.

8*. В разложении степени бинома $\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)^n$ коэффициент пятого члена относится к коэффициенту третьего члена как 7 : 2. Найдите член разложения, содержащий букву x в первой степени.

9*. В разложении степени бинома $\left(\frac{1}{z}+\sqrt{z}\right)^n$ коэффициент четвертого члена относится к коэффициенту шестого члена как 5 : 18. Найдите член разложения, не зависящий от z.

10*. Коэффициент третьего от конца члена разложения $\left(\sqrt[7]{z^{-1}}+\sqrt[3]{z^2}\right)^n$ равен 45. Найдите член разложения, содержащий букву z в первой степени.

§ 19 ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

19.1. Понятия случайного события и случайного эксперимента. Статистическое определение вероятности

Таблица 26

<table>
<tr><td colspan="2">1. Случайные эксперименты и случайные события</td></tr>
<tr><td>Понятия</td><td>Примеры</td></tr>
<tr><td>Экспериментами со случайными результатами, или коротко случайными экспериментами, называют различные эксперименты, опыты, испытания, наблюдения, измерения, результаты которых зависят от случая и которые можно повторить многократно в одинаковых условиях.</td><td>Выстрелы по мишени, участие в лотерее, многолетние наблюдения за погодой в один и тот же день в одном и том же месте, опыты с рулеткой, с бросанием игрального кубика, побрасыванием монеты, кнопки и т. д.</td></tr>
<tr><td>Событие, которое может произойти, а может и не произойти в ходе наблюдения или эксперимента в одних и тех же условиях, называется случайным событием.
Любой результат случайного эксперимента является случайным событием. Случайные события обозначают прописными буквами латинского алфавита $A, B, C, D, \ldots$</td><td>Выпадение «герба», выпадение «числа» при подбрасывании монеты; выигрыш в лотерею, выпадение определенного количества очков при бросании игрального кубика и т. д.</td></tr>
<tr><td colspan="2">2. Частота и относительная частота случайного события</td></tr>
<tr><td>Если при неизменных условиях случайный эксперимент проведен n раз и в $n(A)$ случаях произошло событие A, то число $n(A)$ называется частотой события A.

Относительной частотой случайного события называют отношение числа появлений этого события к общему числу проведенных экспериментов, то есть отношение $\frac{n(A)}{n}$.</td><td>Событие A — выпадение «герба» при подбрасывании монеты.
<table>
<tr><td>Экспериментаторы</td><td>Учащиеся</td><td>Бюффон*</td><td>Пирсон</td></tr>
<tr><td>Количество экспериментов n</td><td>8 000</td><td>4 040</td><td>24 000</td></tr>
<tr><td>Частота $n(A)$</td><td>3 962</td><td>2 048</td><td>12 012</td></tr>
<tr><td>Относительная частота</td><td>0,4953</td><td>0,5069</td><td>0,5005</td></tr>
</table></td></tr>
</table>

* Жорж Луи де Бюффон (1707–1782) — французский математик и естествоиспытатель, Карл Пирсон (1857–1936) — английский математик и биолог. Их труды способствовали развитию теории вероятностей и математической статистики.

Продолж. табл. 26

3. Статистическое определение вероятности	
Если при проведении большого количества случайных экспериментов, в каждом из которых может произойти или не произойти событие A, значение относительной частоты события A близко к некоторому определенному числу, то это число называется вероятностью случайного события A и обозначается $P(A)$. $\mathbf{0 \leqslant P(A) \leqslant 1}$	Событие A — выпал «герб» при подбрасывании монеты. $P(A) = 0{,}5$
4. Достоверные и невозможные события	
Достоверное событие — это событие U, которое обязательно происходит при каждом повторении эксперимента. $\mathbf{P(U) = 1}$	Выпадение меньше 7 очков при бросании игрального кубика (на гранях обозначено от 1 до 6 очков).
Невозможное событие (его часто обозначают $\varnothing$) — это событие, которое в данном эксперименте наступить не может. $\mathbf{P(\varnothing) = 0}$	Выпадение 7 очков при бросании игрального кубика.
5. Равновозможные события	
Равновозможные (равновероятные) события — это такие события, каждое из которых не имеет никаких преимуществ в появлении чаще других в многократных экспериментах, проводимых в одинаковых условиях. **Вероятности равновозможных событий одинаковы.**	В эксперименте по однократному подбрасыванию однородной монеты правильной формы равновозможными являются события: A — выпал «герб» и B — выпало «число». $P(A) = P(B) = 0{,}5$

Объяснение и обоснование

1. Понятия случайного события и случайного эксперимента. В повседневной жизни, в практической и научной деятельности мы часто наблюдаем те или иные явления, проводим определенные эксперименты (опыты).

Событие, которое может произойти, а может и не произойти в процессе наблюдения или эксперимента в одних и тех же условиях, называется случайным событием. Вы покупаете лотерейный билет и можете выиграть, а можете и не выиграть; на выборах может победить один кандидат, а может и другой; автобус может подойти вовремя или опоздать — все это примеры случайных событий. Вы подбрасываете монету. Может выпасть «герб», а может — «число». Если монета однородна и имеет правильную геометрическую форму, то возможности того, что эти события произойдут, одинаковы. Такие события называются *равновозможными*, или *равновероятными*. То есть равновозможные события — это такие события, каждое из которых не имеет никаких преимуществ в появлении чаще других при многократных экспериментах, проводимых в одинаковых условиях.

Однако не все события равновозможные. Может не зазвонить будильник, перегореть лампочка, сломаться автобус, но в обычных условиях такие события *маловероятны*. Более вероятно, что будильник зазвонит, лампочка загорится, автобус поедет.

Существуют и такие события, которые в обычных условиях происходят всегда, обязательно. Такие события называются *достоверными*. Например, при давлении $p = 101\ 325$ Па (нормальная атмосфера) при 0 °С вода замерзает, а при 100 °С закипает; если опрокинуть чашку с чаем, он обязательно выльется.

Есть и такие события, которые в данных условиях никогда не происходят. Такие события называются *невозможными*. Невозможно в обычных условиях не вылить воду, опрокинув банку с водой вверх дном; кошка не может поймать солнечный зайчик и т. д.

Достоверные и невозможные события встречаются в жизни сравнительно редко, можно сказать, что мы живем в мире случайных событий. Поэтому важно понять: можно ли найти какие-то закономерности в мире случайного? Можно ли какими-то способами оценить шансы появления случайного события, которое нас интересует?

Ответ на эти вопросы дает раздел математики, который называется *теория вероятностей*. Мы ознакомимся только с основами этой теории.

Одним из важных понятий, которые рассматриваются в теории вероятностей, является понятие эксперимента со случайными результатами.

Перед началом футбольного матча судья подбрасывает монету, чтобы определить, какая из команд начнет матч с центра поля. У команд равные шансы начать игру. А имеет ли право судья вместо монеты подбросить, например, кнопку?

Подбрасывание кнопки, как и подбрасывание монеты, — это эксперимент со случайными результатами, поскольку его результат зависит от случая.

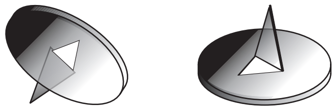


Рис. 127

Кнопка может упасть как на острие, так и на кружок (рис. 127). Но можно ли считать эти события равновозможными или одно из них более вероятно, чем другое?

Чтобы ответить на эти вопросы, необходимо много раз повторить эксперимент с подбрасыванием кнопки.

Такое исследование провела группа из 20 учащихся одного из харьковских лицеев в 2000 году. Каждый из учащихся 100 раз подбросил кнопку, таким образом, всего было проведено 2000 экспериментов. В результате кнопка упала на острие 909 раз, а на кружок — 1091 раз.

Эти эксперименты показывают, что кнопка чаще падает на кружок. Следовательно, судья не имеет права перед матчем заменить монету кнопкой — у команд в такой ситуации были бы неравные шансы начать игру.

Экспериментами со случайными результатами **(или коротко** ***случайными экспериментами*****)** ***называют различные эксперименты, опыты, испытания, наблюдения, измерения, результаты которых зависят от случая и которые можно повторить много раз в одинаковых условиях.***

Например, это серия выстрелов одного и того же стрелка по одной и той же мишени, участие в лотерее, вынимание пронумерованных шаров из коробки, многолетние наблюдения за погодой в один и тот же день в одном и том же месте, опыты с рулеткой, с бросанием игрального кубика, подбрасыванием монеты, кнопки.

Любой результат случайного эксперимента является случайным событием. Вследствие такого эксперимента это событие может или произойти, или не произойти. Далее будем обозначать случайные события прописными буквами латинского алфавита A, B, C, D, ...

2. Частота и относительная частота случайного события. Статистическое определение вероятности. Одним из важных понятий, используемых в теории вероятностей, является понятие *частоты случайного события*.

Если при неизменных условиях случайный эксперимент проведен n раз и в $n(A)$ случаях произошло событие A, то число $n(A)$ называется частотой события A.

Например, учащиеся одной из школ в 2000 году провели 8000 экспериментов с подбрасыванием монеты, каждый раз записывая результат — выпал «герб» или выпало «число». В их экспериментах «герб» выпал 3962 раза. Следовательно, частота события A (выпал «герб») равна 3962.

В XVIII в. такие эксперименты с монетой проводил французский естествоиспытатель Жорж Луи де Бюффон. В его экспериментах «герб» выпал 2048 раз при 4040 подбрасываниях монеты. В начале XX в. английский математик Карл Пирсон провел уже 24 000 экспериментов, при этом «герб» выпал 12 012 раз.

Для каждой серии рассмотренных экспериментов вычислим, какую часть число событий, состоящих в том, что выпал «герб», составляет от общего числа подбрасываний монеты, или, как говорят, подсчитаем *относительную частоту выпадания «герба»*.

Относительной частотой **случайного события называют отношение числа появлений этого события к общему числу проведенных экспериментов.**

Например, для рассмотренных экспериментов частота выпадения «герба»:

$$\text{у школьников } \frac{3962}{8000} \approx 0{,}4953;$$

$$\text{у Бюффона } \frac{2048}{4040} \approx 0{,}5069;$$

$$\text{у Пирсона } \frac{12\,012}{24\,000} \approx 0{,}5005.$$

Нетрудно заметить, что серии экспериментов, проведенных в разные эпохи и в разных странах, дают похожие результаты: при многократном подбрасывании монеты частота появления «герба» приблизительно равна 0,5. Следовательно, хотя каждый результат подбрасывания монеты — случайное событие, при многократном повторении эксперимента заметна закономерность.

Число 0,5 — это *вероятность случайного события* (выпал «герб»). Но в этих экспериментах «число» появляется также приблизительно в половине случаев, значит, и вероятность выпадания «числа» равна 0,5. В общем,

если при проведении большого количества случайных экспериментов, в каждом из которых может произойти или не произойти событие A, значение относительной частоты события A близко к некоторому определенному числу, то это число называется *вероятностью случайного события A*.

Приведенное определение обычно называют *статистическим определением вероятности*.

Вероятность события обозначается прописной буквой P латинского алфавита (первой буквой французского слова *probabilité* или латинского слова *probabilitas*, что в переводе означает «вероятность»).

Если обозначить событие — «выпал «герб» — буквой A, а событие — «выпало «число» — буквой B, то утверждение о том, что вероятности выпадания «герба» или «числа» равны 0,5, можно записать так:

$$P(A) = 0{,}5, \qquad P(B) = 0{,}5.$$

Иногда вероятность выражают в процентах, то есть

$$P(A) = 50\,\%, \qquad P(B) = 50\,\%.$$

Тот факт, что вероятность появления «герба» равна 0,5, конечно, не означает, что в любой серии экспериментов «герб» появится в точности в половине случаев. Но если число экспериментов достаточно велико, мы можем дать прогноз, что «герб» выпадет приблизительно в половине случаев. То есть, *знаная вероятность события, мы можем прогнозировать частоту его появления в будущем при большом количестве соответствующих экспериментов.*

Замечание. Если при проведении большого числа случайных экспериментов значения относительной частоты случайного события близки к некоторому определенному числу, то говорят, что относительная частота имеет *статистическую устойчивость*, а такие случайные эксперименты называют *статистически устойчивыми*. Следовательно, в каждом случае, когда мы можем определить статистическую вероятность результатов случайных экспериментов, эти случайные эксперименты будут статистически устойчивыми. Отметим также, что *чем больше число проведенных случайных экспериментов, тем ближе значение относительной частоты случайного события к вероятности этого события.*

Напомним, что в каждой серии случайных экспериментов с подбрасыванием монеты мы сначала вычисляли относительную частоту рассматриваемого события с помощью формулы:

$$\text{относительная частота} = \frac{\text{число появлений событий}}{\text{число экспериментов}} = \frac{n(A)}{n},$$

затем с помощью найденного значения относительной частоты, оценивали вероятность данного события.

Оценить вероятность случайного события по его относительной частоте можно, используя результаты других экспериментов — с кнопками, игральным кубиком, рулеткой, автомобильными или телефонными номерами. При этом чем больше проведено экспериментов, тем точнее можно оценить вероятность события по его относительной частоте.

Ниже представлены результаты экспериментов, проведенных учащимися одного из лицеев, которые оценивали вероятность случайного события — кнопка упала острием вниз.

Число экспериментов	10	20	30	50	100	200	500	1000	2000
Число падений кнопки острием вниз (частота)	5	9	14	22	45	92	226	450	909
Относительная частота падения кнопки острием вниз	0,5	0,45	0,47	0,44	0,45	0,46	0,45	0,45	0,45

По данным таблицы можно сделать вывод, что вероятность падения кнопки острием вниз приблизительно равна 0,45, или 45 %.

Вероятностные оценки широко используются в физике, биологии, социологии, в экономике и политике, в спорте и повседневной жизни каждого человека. Если в прогнозе погоды сообщают, что завтра будет дождь с вероятностью 70 %, это означает, что не обязательно пойдет дождь, но шансы этого велики и стоит, выходя из дома, захватить зонт или плащ.

Замечание. Если синоптики прогнозируют, что завтра будет дождь с вероятностью 70 %, это означает, что в прошлые годы в дни этого времени года при аналогичных показателях состояния атмосферы (температура и влажность воздуха, скорость и направление ветра, облачность и т. п.) дождь был приблизительно в 70 % случаях.

3. Вероятности достоверных, невозможных и любых случайных событий. Напомним, что достоверное событие — это событие U, которое обязательно происходит при каждом повторении эксперимента, а невозможное событие (его часто обозначают $\varnothing$) не происходит ни при каком повторении эксперимента.

Но если интересующее нас невозможное событие $\varnothing$ не произойдет ни одного раза при проведении n экспериментов, тогда его относительная частота будет равна: $\frac{n(\varnothing)}{n} = \frac{0}{n} = 0$.

А если достоверное событие U происходит в каждом из n экспериментов, то относительная частота его появления равна: $\frac{n(U)}{n} = \frac{n}{n} = 1$.

Поэтому естественно считать, что

вероятность достоверного события равна единице:

$$P(U) = 1, \tag{1}$$

а **вероятность невозможного события равна нулю: $P(\varnothing) = 0$.**

Например, вероятность того, что при бросании игрального кубика (на гранях которого обозначены очки от 1 до 6 — рис. 128) выпадет 8 очков (невозможное событие) равна нулю. Таким образом,

вероятность случайного события A может принимать любые значения от 0 до 1.

Действительно, при проведении n экспериментов $0 \leqslant n(A) \leqslant n$, следовательно, относительная частота появления события A принимает значения: $0 \leqslant \frac{n(A)}{n} \leqslant 1$. Тогда и вероятность $P(A)$ должна удовлетворять условию

$$0 \leqslant P(A) \leqslant 1. \tag{2}$$

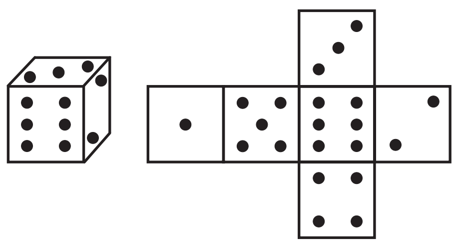


Рис. 128

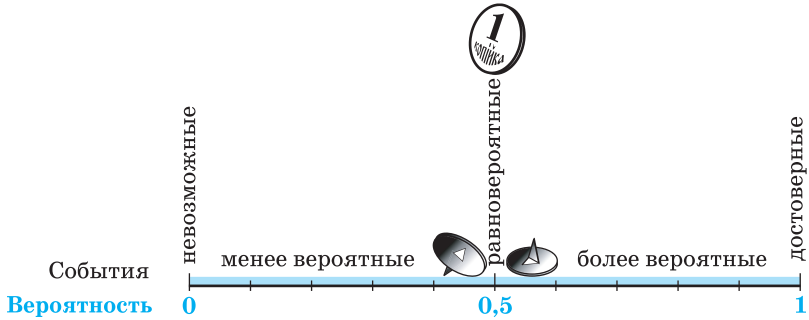


Рис. 129

Этому факту можно дать геометрическое толкование с помощью так называемой вероятностной шкалы (рис. 129).

Следовательно, вероятность случайного события может быть любым числом от 0 до 1. Чем больше вероятность, тем чаще наступает случайное событие при многократном повторении эксперимента.

Значительный интерес вызывают случайными события, имеющие вероятности, близкие к 1 или 0. События, вероятности которых близки к 1, часто называют *практически достоверными* событиями, а события с малыми вероятностями — *практически невозможными* событиями. Вопросы о том, какие вероятности можно считать такими малыми, чтобы ими можно было пренебречь, решается в зависимости от конкретных обстоятельств.

Например, при массовом производстве электрических лампочек или гвоздей 0,5 % брака можно считать допустимо малым (в этом случае вероятность того, что выпущенное изделие будет бракованным, равна 0,005). Если же какая-нибудь бракованная деталь в сложном механизме может привести к аварии или катастрофе с человеческими жертвами, то в этом случае допустимо малыми следует считать те значения, которые не превышают десятитысячных или даже миллионных частей единицы.

Вопросы для контроля

1. Объясните, что такое случайный эксперимент и случайное событие. Приведите примеры.
2. Объясните на примере, что называют частотой и относительной частотой события A.
3. Объясните смысл статистического определения вероятности. Приведите примеры. Как обозначается вероятность события A?
4. Какое событие считается достоверным, а какое невозможным? Приведите примеры. Чему равны вероятности достоверного и невозможного событий?
5*. Обоснуйте, что вероятность случайного события A может принимать любые значения от 0 до 1.
6. Объясните, какие события считаются равновозможными. Приведите примеры равновозможных и неравновозможных событий.

Упражнения

1°. Укажите, какие из событий в приведенных экспериментах являются достоверными, невозможными и просто случайными.

№	Эксперимент	Событие
1)	Выполнение выстрела	Попадание в цель
2)	Нагревание воды (при обычных условиях)	Вода превратилась в лед
3)	Участие в лотерее	Вы выграете, если примете участие в лотерее
4)	Участие в беспроигрышной лотерее	Вы не выграете, если примете участие в беспроигрышной лотерее
5)	Бросание игрального кубика	Выпало 5 очков
6)	Бросание игрального кубика	Выпало 8 очков
7)	Проверка работы звонка	Вы нажали на кнопку звонка, а он не зазвонил
8)	Вынимается шар из коробки с белыми шарами	Вынули черный шар
9)	Вынимается шар из коробки с белыми шарами	Вынули белый шар
10)	Вынимается два шара из коробки с 10 белыми и 5 черными шарами	Вынули белый и черный шары
11)	Вынимается карты из колоды	Вынули туз

2. Придумайте по три примера достоверных, невозможных и просто случайных событий. Примеры запишите в виде таблицы, как это сделано в упражнении 1.

3. В приведенной ниже таблице представлены результаты экспериментов по подбрасыванию пуговицы (рис. 130), проведенные учащимися одной из школ, которые оценивали вероятность случайного события — пуговица упала ушком для пришивания вниз.

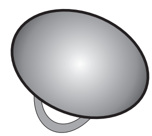


Рис. 130

Число экспериментов	10	20	50	100	200	500	1000
Число падений пуговицы ушком вниз	6	9	24	44	92	232	461

1) Оцените относительную частоту падений пуговицы ушком вниз в каждой серии экспериментов (запишите ее приближенно с точностью до сотых);
2) оцените вероятность падений пуговицы ушком вниз;
3) запишите частоту и относительную частоту падений пуговицы кружком вниз;
4) оцените вероятность падений пуговицы кружком вниз.

4. Чтобы определить, как часто встречаются в лесопарке деревья разных пород, учащиеся провели следующие эксперименты. Каждый учащийся выбрал свою тропинку и, идя по ней, записывал породу каждого десятого дерева. Результаты были занесены в таблицу:

Порода дерева	сосна	дуб	береза	ель	осина	Всего
Число деревьев	315	217	123	67	35	757

Оцените вероятность того, что выбранное наугад в этом парке дерево будет:

1) сосной; 2) хвойным; 3) лиственным.

(Ответ запишите приближенно в виде десятичной дроби с двумя знаками после запятой.)

5. Чтобы определить, какой цвет волос у жителей города встречается чаще, а какой реже, учащиеся за полчаса провели такой эксперимент. Каждый выбрал свой маршрут и записывал по пути следования цвет волос каждого пятого встречного. Результаты были занесены в таблицу:

Цвет волос	брюнеты	шатены	рыжие	блондины	Всего
Число людей	198	372	83	212	865

Оцените вероятность того, что выбранный наугад житель этого города будет:

а) шатеном; б) рыжим; в) не рыжим.

(Ответ запишите приближенно в виде десятичной дроби с двумя знаками после запятой.)

6°. Известно, что на 100 батареек встречаются 3 бракованных. Какова вероятность купить бракованную батарейку?

7°. В магазине подсчитали, что обычно из тысячи телевизоров оказывается 2 бракованных. Какова вероятность того, что телевизор, выбранный наугад в этом магазине, будет бракованным?

8°. По статистике в городе N за год из каждых 1000 автомобилистов 2 попадают в аварию. Какова вероятность того, что автомобилист в этом городе весь год проездит без аварий?

9°. Какова вероятность того, что солнце зайдет на западе?

10°. Какова вероятность того, что после 31 декабря наступит 1 января?

11°. В пакете лежат 20 зеленых и 10 желтых груш. Какова вероятность вынуть из пакета грушу? Какова вероятность вынуть из пакета яблоко?

12*. Выберите наугад одну страницу из книги любого писателя и подсчитайте, сколько раз на этой странице встречаются буквы «о» и «б», а также сколько всего на ней букв. Оцените вероятность появления букв «о» и «б» в этом тексте.

Объясните, почему на клавиатурах печатных машинок и компьютеров буква «о» расположена ближе к центру, а буква «б» — ближе к краю клавиатуры (рис. 131). Как вы объясните расположение других букв?

13. Изготовили «неправильный» кубик из листа плотной бумаги. Для этого вырезали фигуру, изображенную на рисунке 132, написали на гранях цифры и склеили кубик, предварительно прикрепив изнутри к грани с цифрой 1 кусок пластилина, как показано на рисунке. После проведения 1000 экспериментов по бросанию кубика получили следующие результаты.

Число очков	1	2	3	4	5	6
Число выпаданий соответствующего количества очков	71	145	169	91	21	503

Используя эти данные, оцените вероятности указанных ниже событий (записав соответствующие вероятности в виде десятичной дроби с тремя знаками после запятой) и дайте ответы на вопросы:

1) Справедливо ли такое пари: «Я выиграю, если выпадет четное число очков, а вы — если нечетное»?
2) Справедливо ли такое пари: «Я выиграю, если выпадет число очков от 4 до 6, а вы — если от 1 до 3»?
3) Справедливо ли такое пари: «Я выиграю, если выпадет не 6 очков, а вы — если 6 очков»?

Рис. 131

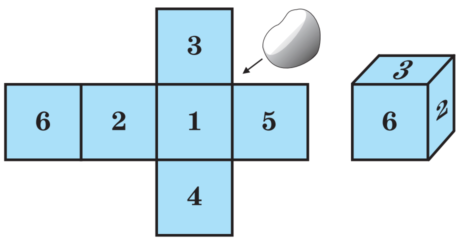
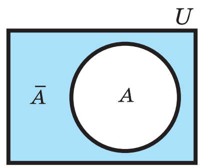
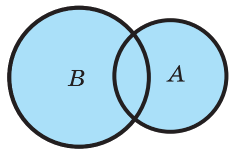
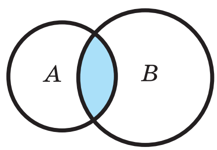


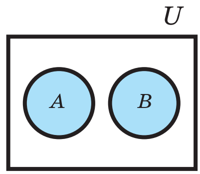
Рис. 132

19.2. Операции над событиями

Таблица 27

Определение	Пример	Теоретико-множественная иллюстрация
1. Противоположное событие		
Событие $\overline{A}$ называется *противоположным событию* A, если оно происходит тогда и только тогда, когда не происходит событие A. *Вероятность противоположного события:* $P(\overline{A})=1-P(A)$	Событие A — выпал «герб» при подбрасывании монеты, тогда событие $\overline{A}$ — не выпал «герб» при подбрасывании монеты (то есть выпало «число»).	
	Если вероятность купить исправный прибор равна 0,95, то вероятность купить неисправный прибор равна: $1-0{,}95=0{,}05$.	
2. Сумма событий		
***Суммой* (или *объединением*) *событий* A и B называется событие $A+B$ (другое обозначение $A\cup B$), которое происходит тогда и только тогда, когда происходит событие A или событие B.**	Из колоды карт наугад вынимают 1 карту. Рассмотрим события: A — вынули бубновую карту, B — вынули червовую карту. Тогда событие $A+B$ — вынули или бубновую, или червовую карту (то есть карту красной масти).	 $A+B$
3. Произведение событий		
***Произведением* (или *пересечением*) *событий* A и B называется событие $A\cdot B$ (другое обозначение $A\cap B$), которое происходит тогда и только тогда, когда происходят оба события A и B.**	При бросании игрального кубика рассматривают события: A — выпало четное число очков, B — выпало число очков, кратное 3. Тогда событие $A\cdot B$ — выпало число очков, одновременно четное и кратное 3 (то есть выпало 6 очков).	 $A\cdot B$

П р о д о л ж. т а б л. 27

4. Несовместные события		
Два случайных события A и B называются *несовместными*, если их произведение является невозможным событием, то есть $$A\cdot B=\varnothing$$ **(в других обозначениях** $$A\cap B=\varnothing$$**).**	При бросании игрального кубика рассматривают события: A — выпало четное число очков, B — выпало 1 очко, C — выпало число очков, кратное 3. События A и B и события B и C — ***несовместные*** (*не могут происходить одновременно*). События A и C — ***совместные*** (*могут происходить одновременно*, если выпадет 6 очков, то есть $A\cdot C\neq\varnothing$).	 $A\cdot B=\varnothing$
5. Вероятность суммы двух несовместных событий		
Если события A и B несовместные, то $P(A+B)=P(A)+P(B)$, то есть *вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий.*		

Объяснение и обоснование

Иногда приходится, зная вероятности одних случайных событий, вычислять вероятности других событий, которые получаются из заданных с помощью определенных операций. Рассмотрим простейшие операции над случайными событиями, которые далее будем называть просто событиями (см. с. 262).

1. Нахождение противоположного события. Пусть задано случайное событие A.

Событие $\overline{A}$ называется *противоположным* событию A, если оно происходит тогда и только тогда, когда не происходит событие A.

Например, если событие A состоит в том, что выпал «герб» при подбрасывании монеты, то событие $\overline{A}$ (читается: «Не A») означает, что «герб» не выпал, а следовательно, выпало «число» при подбрасывании монеты. Если событие B состоит в том, что выпало 1 очко при бросании игрального кубика, то событие $\overline{B}$ означает, что 1 очко не выпало, а следовательно, выпало или 2, или 3, или 4, или 5, или 6 очков при бросании игрального кубика.

Учитывая, что в каждом эксперименте происходит одно и только одно из событий: или A, или $\overline{A}$, то $n(A)+n(\overline{A})=n$. Тогда $\frac{n(A)}{n}+\frac{n(\overline{A})}{n}=\frac{n}{n}=1$. Рассмотренные эксперименты являются статистически стойкими, поэтому при больших значениях n относительные частоты события A и события $\overline{A}$

практически совпадают с вероятностями этих событий. Тогда $P(A)+P(\bar{A})=1$. Отсюда

$$P(\bar{A})=1-P(A).$$

Например, рассмотрим событие A — кнопка упала острием вниз. Тогда противоположное событие $\bar{A}$ — кнопка упала острием вверх (то есть кружком вниз). Как было показано на с. 261, вероятность события A равна 0,45, то есть $P(A) = 0{,}45$, тогда вероятность события $\bar{A}$ равна:

$$P(\bar{A})=1-P(A)=1-0{,}45=0{,}55.$$

2. Нахождение суммы событий. Пусть заданы два случайных события A и B.

Суммой **(или *объединением*) *событий* A и B называется событие $A + B$ (другое обозначение $A \cup B$), которое происходит тогда и только тогда, когда происходит событие A или событие B.**

Например, пусть при бросании игрального кубика события A и B означают: A — выпало четное число очков, B — выпало число очков, кратное 3. Тогда событие $A + B$ означает, что выпало или четное число очков, или число очков, кратное 3, то есть выпало 2, 3, 4 или 6 очков.

Аналогично вводится понятие суммы нескольких событий.

Суммой (или *объединением*) *событий* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *называется событие* $A_1 + A_2 + \ldots + A_n$ (другое обозначение $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$), *которое происходит тогда и только тогда, когда происходит хотя бы одно из данных событий.*

3. Нахождение произведения событий. Пусть заданы два случайных события A и B.

Произведением **(или *пересечением*) *событий* A и B называется событие $A \cdot B$ (другое обозначение $A \cap B$), которое происходит тогда и только тогда, когда происходят оба события A и B.**

В приведенном выше примере событие $A \cdot B$ означает, что выпало и четное число очков, и число очков, кратное 3, то есть выпало 6 очков.

Аналогично вводится понятие произведения нескольких событий.

Произведением (или *пересечением*) *событий* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *называется событие* $A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n$ (другое обозначение $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n$), *которое происходит тогда и только тогда, когда происходят все заданные события*: и A_1, и A_2, ... , и A_n.

4. Несовместные события и их вероятности.

Два случайных события A и B называются *несовместными*, если их произведение является невозможным событием, то есть $A \cdot B = \varnothing$ (другое обозначение $A \cap B = \varnothing$).

Например, пусть при бросании игрального кубика могут произойти события: A — выпадет четное число очков, B — выпадет 5 очков. Эти события несовместны, поскольку 5 — нечетное число: поэтому событие $A \cdot B$, состоящее в том, что выпадет четное число очков и это будет 5 очков, невозможное событие.

Если события A и B несовместные, то их частоты $n\,(A)$ и $n\,(B)$ и частота $n\,(A+B)$ их суммы $A+B$ удовлетворяют условию

$$n\,(A+B)=n\,(A)+n\,(B),$$

поскольку событие $A+B$ происходит тогда и только тогда, когда происходит или событие A, или событие B (а одновременно они происходить не могут). Но в этом случае относительные частоты будут удовлетворять следующему условию:

$$\frac{n\,(A+B)}{n}=\frac{n\,(A)}{n}+\frac{n\,(B)}{n}.$$

Поскольку при больших значениях n относительные частоты в этом равенстве близки к соответствующим вероятностям, то **для несовместных событий A и B** должно выполняться равенство

$$\boldsymbol{P\,(A+B)=P\,(A)+P\,(B).} \tag{3}$$

То есть **вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий.**

Свойство (3) можно обобщить.

Назовем события $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *попарно несовместными*, если любые два из этих событий A_i и A_j (при $i \neq j$) несовместны, то есть их произведение — невозможное событие:

$$A_i \cdot A_j = \varnothing\,.$$

Если события A_1, A_2, ... , A_n попарно несовместны, то из равенства (3) следует, что

$$P\,(A_1+A_2+\ldots+A_n)=P\,(A_1)+P\,(A_2)+\ldots+P\,(A_n), \tag{4}$$

то есть *вероятность суммы несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий*. (Для обоснования этого свойства достаточно применить метод математической индукции.)

Отметим, что свойства (1)–(3) обязательно должны выполняться при любом способе определения вероятности случайного события. Наиболее общим из таких способов есть аксиоматическое определение вероятности, рассмотренное в следующем пункте.

З а м е ч а н и е. Определение операций над событиями аналогичны соответствующим определениям операций над множествами (поэтому и обозначения операций над событиями совпадают с обозначениями операций над множествами). Операции над событиями (как и операции над множествами) удобно иллюстрировать с помощью кругов Эйлера–Венна (см. § 17 и рис. 133–135).

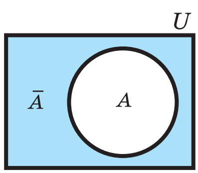


Рис. 133

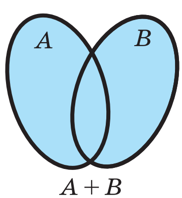


Рис. 134

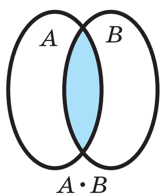


Рис. 135

Например, учитывая, что всегда выполняется или событие A, или событие $\overline{A}$, получаем, что $A+\overline{A}=U$ (достоверное событие). Учитывая, что одновременно события A и $\overline{A}$ не могут выполняться, имеем $A\cdot\overline{A}=\varnothing$ (невозможное событие). Тогда событие $\overline{A}$ можно проиллюстрировать дополнением множества A (до множества U) (рис. 133).

Аналогично сумму двух событий A и B (напомним, что событие $A + B$ происходит тогда и только тогда, когда происходит событие A или событие B, или оба одновременно) можно проиллюстрировать в виде объединения множеств A и B (рис. 134), а произведение событий A и B (событие $A \cdot B$ происходит тогда и только тогда, когда происходят оба события A и B) — в виде пересечения множеств A и B (рис. 135).

Вопросы для контроля

1. Объясните, какое событие называется противоположным событию A. Приведите примеры.
2. Как найти вероятность противоположного события, зная вероятность события A? Чему равна вероятность события $\overline{A}$, если $P(A) = 0{,}6$?
3. Какое событие называется суммой (или объединением) событий A и B? Приведите примеры.
4. Какое событие называется произведением (или пересечением) событий A и B? Приведите примеры.
5. Какие два события называются несовместными? Приведите примеры. В каком случае несколько событий называются попарно несовместными?
6. а) Чему равна вероятность суммы двух несовместных событий?
   б*) Обоснуйте соответствующую формулу.
7. Какие события считаются попарно несовместными? Как вычисляется вероятность суммы попарно несовместных событий?

Упражнения

1. Проводится эксперимент по подбрасыванию двух монет. Рассматриваются такие события:
A — выпал «герб» на первой монете, B — выпало «число» на первой монете, C — выпал «герб» на второй монете, D — выпало «число» на второй монете.
Что означают события:
1) $A+C$; 2) $A\cdot C$; 3) $B+C$; 4) $B\cdot D$; 5) $\overline{A}$; 6) $\overline{B}\cdot D$?

2. Проводиться эксперимент по бросанию кубика. Рассматриваются такие события:
A — выпало четное число очков, B — выпало нечетное число очков, C — выпало 3 очка, D — выпало число очков меньше 4.
Что означают события:
1) $\overline{A}$; 2) $A+C$; 3) $A\cdot D$; 4) $B\cdot C$; 5) $B\cdot D$; 6) $B\cdot\overline{D}$?

3*. Пользуясь определениями операций над событиями, обоснуйте справедливость равенства:

1) $A + U = U$; 2) $A + A = A$; 3) $A + \overline{A} = U$;

4) $A \cdot \overline{A} = \varnothing$; 5) $A + \varnothing = A$; 6) $A \cdot \varnothing = \varnothing$.

4. Мяч трижды бросают в баскетбольную корзину. События A_1, A_2, A_3 означают: A_1 — при первом броске мяч попал в корзину, A_2 — при втором броске мяч попал в корзину, A_3 — при третьем броске мяч попал в корзину. Запишите через события A_1, A_2, A_3 следующие события:

1) B — мяч попал в корзину все три раза;

2) C — мяч ни одного раза не попал в корзину;

3) D — мяч хотя бы один раз попал в корзину;

4) K — мяч попал в корзину только при первом броске.

5) M — мяч попал в корзину только при втором и третьем бросках.

5. Для эксперимента по бросанию кубика укажите, какие из приведенных событий являются попарно несовместными: A — выпало четное число очков, B — выпало нечетное число очков, C — выпало 3 очка, D — выпало меньше 3 очков, K — выпало число очков, кратное 3, M — выпало 6 очков, T — выпало больше 4 очков, F — выпало число очков меньше 7.

6. Для эксперимента по вытягиванию карт из колоды укажите, какие из приведенных событий являются попарно несовместными: A — вытянули карту червовой масти, B — вытянули карту бубновой масти, C — вытянули короля, D — вытянули даму, K — вытянули карту старше валета, M — вытянули карту с числовыми обозначениями.

7. В результате значительного количества наблюдений учащиеся определили вероятность, с которой в лесопарке встречаются деревья разных пород, и записали результаты в таблицу:

Порода дерева	сосна	дуб	береза	ель	осина
Вероятность	0,42	0,29	0,16	0,09	0,04

Найдите вероятность того, что выбранное наугад в этом лесопарке дерево будет: 1) сосной или дубом; 2) не дубом; 3) хвойным; 4) лиственным; 5) не осиной; 6) хвойным или лиственным (объясните, что означает последний результат).

8. В результате значительного количества наблюдений учащиеся определили вероятности того, какой цвет волос встречается у жителей города чаще, а какой реже, и составили таблицу:

Цвет волос	брюнеты	шатены	рыжие	блондины
Вероятность	0,23	0,43	0,1	0,24

Найдите вероятность того, что выбранный наугад житель этого города будет: 1) шатеном или рыжим; 2) не рыжим; 3) брюнетом или блондином; 4) не блондином.

9. В результате долгих наблюдений за качеством продукции одного цеха выяснилось, что цех в среднем выпускает 31% продукции высшего сорта и 60 % продукции первого сорта. Найдите вероятность того, что наугад взятое изделие будет:
1) первого или высшего сорта;
2) хуже, чем изделие первого сорта.

10. Стрелок стреляет по мишени и попадает в десятку с вероятностью 0,05, в девятку — с вероятностью 0,2 и в восьмерку — с вероятностью 0,5 (максимальное число очков на мишени — 10). Сделан один выстрел. Найдите вероятность следующих событий:
1) A — выбито больше восьми очков, B — выбито не меньше восьми очков.

11. Петя предлагает честное пари на условиях 4 : 1 (четыре «за» к одному «против»), что наступит событие A. Какими он считает вероятности событий A и $\bar{A}$?

19.3. Аксиоматическое построение теории вероятностей. Классическое определение вероятности

Таблица 28

1. Пространство элементарных событий	
Понятие	Пример
Пусть результатом некоторого случайного эксперимента может быть только одно из попарно несовместных событий $u_1, u_2, \ldots, u_n$. Назовем эти события *элементарными событиями*, а множество всех этих событий $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ **—** ***пространством элементарных событий.*** Суммой всех элементарных событий является достоверное событие U: $u_1 + u_2 + \ldots + u_n = U$ (поскольку в результате данного эксперимента обязательно произойдет одно из событий $u_1, u_2, \ldots, u_n$)	1. Для эксперимента по подбрасыванию монеты элементарными событиями будут события: u_1 — выпал «герб», u_2 — выпало «число». Тогда пространство элементарных событий будет состоять из двух событий: $U = \{u_1, u_2\}$. (Эти события попарно несовместны, и в результате эксперимента обязательно происходит одно из этих событий.) 2. Для эксперимента по бросанию игрального кубика элементарными событиями могут быть события $u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6$, где u_k — выпадение k очков, $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$. В этом случае пространство элементарных событий будет состоять из шести событий: $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6\}$.

П р о д о л ж. т а б л. 28

<table>
<tr><td colspan="2">2*. Аксиомы вероятности</td></tr>
<tr><td colspan="2">А к с и о м а 1. Для произвольного события A
$$P(A) \geqslant 0.$$
А к с и о м а 2. Для достоверного события U
$$P(U) = 1.$$
А к с и о м а 3. Для произвольных попарно несовместных событий $A_1, A_2, \dots, A_n$
$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n)$$</td></tr>
<tr><td colspan="2">3. Классическое определение вероятности
(для равновозможных элементарных событий)</td></tr>
<tr><td>Вероятность события A — это отношение количества элементарных событий (m), благоприятствующих этому событию, к количеству всех равновозможных элементарных событий в данном эксперименте (n):
$$P(A) = \frac{m}{n}$$</td><td>Пример. Найдите вероятность выпадения больше четырех очков при бросании игрального кубика.
▶ Рассмотрим как элементарные события шесть равновозможных результатов бросания кубика — выпало 1, 2, 3, 4, 5 или 6 очков (следовательно, $n = 6$). Событие A — выпало больше 4 очков. Благоприятствуют событию A только два элементарных события — выпало 5 или 6 очков (то есть $m = 2$) .
Тогда $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$. ◁</td></tr>
</table>

Объяснение и обоснование

1. Аксиоматическое построение теории вероятностей аналогично аксиоматическому построению геометрии, в котором вместо реальных объектов или их изображений на бумаге (точек, прямых, плоскостей и т. п.) рассматриваются абстрактные понятия (точек, прямых, плоскостей и т. п.), удовлетворяющие определенным аксиомам (планиметрии и стереометрии). При аксиоматическом построении теории вероятностей понятие «случайное событие», «вероятность» и т. п. — это математические идеальные понятия, которые удовлетворяют условиям (1)–(3) (см. с. 261, 270). Поясним сущность аксиоматического построения теории вероятностей на следующем примере.

Пусть в некоторой коробке U есть n одинаковых шаров, которые некоторым образом отмечены так, чтобы их можно было отличить друг от друга (например, пронумерованы, как в телевизионных розыгрышах лотерей). Обозначим шары $u_1, u_2, \dots, u_n$, а множество всех шаров, которые находятся в коробке, — $U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ (на рисунке 136 изображена коробка, содержащая 10 шаров). Шары в коробке тщательно перемешивают, а затем

* Этот материал является обязательным только для классов физико-математического профиля.

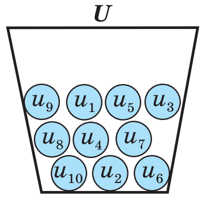


Рис. 136

некоторым случайным образом из коробки вынимают один шар. Допустим, что вынули шар $u_i (i = 1, 2, \ldots, n)$. Пусть $A = \{u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_m}\}$ — некоторое множество шаров из множества U. *Если вынутый шар u_i принадлежит множеству A, то будем говорить, что произошло событие A.*

Тогда достоверным событием будем считать все множество U, то есть все множество шаров в коробке (поскольку любой вынутый шар будет принадлежать множеству U). Невозможным событием будем считать пустое множество $\varnothing$.

Два события $A = \{u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_m}\}$ и $B = \{u_{j_1}, u_{j_2}, \ldots, u_{j_k}\}$ несовместны, если множества A и B не имеют общих элементов. Сумме событий $A + B$ соответствует объединение множеств $A \cup B$, а произведению событий $A \cdot B$ — пересечение $A \cap B$ множеств A и B. Событию B, противоположному событию A, соответствует дополнение B множества A до множества U.

Каждому событию A некоторым образом (например, через статистическое определение) ставится в соответствие его вероятность — число $P(A)$, удовлетворяющее условиям (1)–(3).

Итак, можно сформулировать абстрактные вероятностные понятия, используя только термины теории множеств.

Рассмотрим конечное множество $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$, элементы которого u_i (где $i = 1, 2, \ldots, n$) назовем *элементарными событиями* (множество U называют *пространством элементарных событий*). Любое подмножество $A = \{u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_m}\}$ множества U назовем *событием*. Все множество U — это *достоверное событие*, а пустое множество $\varnothing$ — это *невозможное событие*.

***Сумма* $A + B$ событий A и B определяется как объединение $A \cup B$ множеств A и B, а *произведение* $A \cdot B$ событий A и B — как пересечение $A \cap B$ множеств A и B.**

Если произведение событий A и B является пустым множеством ($A \cdot B = \varnothing$), то события A и B называют *несовместными*.

Событие $\bar{A}$, *противоположное событию A*, определяется как дополнение $\bar{A}$ множества A до множества U (то есть как множество всех элементов u_i, не входящих в множество A). События A и $\bar{A}$ удовлетворяют условиям $A \cdot \bar{A} = \varnothing$ и $A + \bar{A} = U$.

Теперь определим вероятность $P(A)$ события A.

Пусть любым способом заданы числа $p(u_i)$ (где $i = 1, 2, \ldots, n$), удовлетворяющие условиям:

$$p(u_i) \geqslant 0,$$
$$p(u_1) + p(u_2) + \ldots + p(u_n) = 1.$$

Эти числа называют *элементарными вероятностями*.

Вероятность $P(A)$ события $A = \{u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_m}\}$ определим равенством

$$P(A) = p(u_{i_1}) + p(u_{i_2}) + \ldots + p(u_{i_m}).$$

Определенное таким образом понятие вероятности удовлетворяет следующим аксиомам.

Аксиома 1 (неотрицательности вероятности). ***Для случайного события A***

$$\boldsymbol{P(A) \geqslant 0.}$$

Аксиома 2 (нормированности вероятности). ***Для достоверного события U***

$$\boldsymbol{P(U) = 1.}$$

Аксиома 3 (аддитивности вероятности). ***Для любых попарно несовместных событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$*** (то есть для таких, что $A_i \cdot A_j = \varnothing$ для любых не равных между собой i и j)

$$\boldsymbol{P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n).}$$

Фактически, это те же свойства (1)– (3), которым, как было указано выше, должны удовлетворять все определения вероятностей случайных событий. Из этих аксиом следует, что вероятность невозможного события **$P(\varnothing) = 0$**, а вероятность события B, противоположного событию A, вычисляется по формуле **$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.**

Действительно, поскольку $U \cdot \varnothing = \varnothing$, то события U и $\varnothing$ несовместны, и тогда из равенства $U = U + \varnothing$ по аксиоме 3 получаем $P(U) = P(U) + P(\varnothing)$. Учитывая, что по аксиоме 2 вероятность $P(U) = 1$, получаем $1 = 1 + P(\varnothing)$. Отсюда

$$P(\varnothing) = 0.$$

Аналогично, если $B = \overline{A}$, то $A \cdot B = \varnothing$. Следовательно, события A и B несовместны, и тогда из равенства $A + B = U$ по аксиомам 3 и 2, получаем $P(A) + P(B) = P(U)$. То есть $P(A) + P(B) = 1$, следовательно, $P(B) = 1 - P(A)$.

В соответствии с системой аксиом 1–3 в зависимости от решаемой задачи элементарные вероятности $p(u_i)$, а соответственно, и вероятности $P(A)$ могут задаваться разными способами.

2. Классическое определение вероятности. В случае, когда элементарные события не являются равновероятными (например, падение кнопки на острие или на кружок при подбрасывании кнопки — см. с. 261), приходится использовать статистическое определение вероятности. Но для того чтобы найти вероятность интересующего нас события при статистическом определении необходимо провести достаточно большое количество экспериментов или наблюдений. Вместе с тем, когда рассматриваются эксперименты со случайными результатами (то есть случайными событиями) и все эти результаты *равновозможные* (есть все основания считать, что *шансы получения этих результатов одинаковы*), то вероятность случайного события удается найти путем рассуждений, не выполняя экспериментов. Приведем соответствующие рассуждения и определение.

Пусть результатом некоторого случайного эксперимента может быть только одно из попарно несовместных событий $u_1, u_2, \ldots, u_n$. Назовем эти события *элементарными событиями*. Тогда суммой этих событий является достоверное событие U

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n = U.$$

Это следует из определения суммы событий (с. 268), согласно которому если в результате заданного эксперимента обязательно происходит одно из событий u_1, u_2, ..., u_n, то обязательно произойдет и их сумма. Учитывая, что вероятность достоверного события равна единице ($P(U) = 1$) и то, что вероятность суммы несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий, имеем

$$p(u_1) + p(u_2) + \ldots + p(u_n) = 1.$$

Если все события u_1, u_2, ..., u_n равновероятны: ($p(u_1) = p(u_2) = \ldots = p(u_n)$), то получаем

$$p(u_1) = p(u_2) = \ldots = p(u_n) = \frac{1}{n}.$$

Например, если бросать игральный кубик (см. рис. 128) и считать, что кубик имеет правильную форму и изготовлен из однородного материала, то шансы выпадения на его верхней грани любого числа очков от 1 до 6 одинаковы. В этом случае говорят, что существует шесть попарно несовместных равновозможных (или равновероятных) элементарных результатов (событий) этого эксперимента (событие u_k — выпало k очков, где $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$) и вероятность каждого из таких событий равна $\frac{1}{6}$.

Пусть событие A происходит тогда и только тогда, когда происходит одно из m попарно несовместных элементарных событий u_{i_1}, u_{i_2}, ..., u_{i_m} (в этом случае говорят, что элементарные события u_{i_1}, u_{i_2}, ..., u_{i_m} *благоприятствуют* событию A). Это можно записать следующим образом: $A = \{u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_m}\}$ или, используя понятие суммы событий, так: $A = u_{i_1} + u_{i_2} + \ldots + u_{i_m}$. Учитывая, что вероятность суммы попарно несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий и то, что вероятность каждого из m выбранных элементарных событий равна $\frac{1}{n}$ (то есть $p(u_{i_1}) = p(u_{i_2}) = \ldots = p(u_{i_m}) = \frac{1}{n}$), имеем:

$$P(A) = p(u_{i_1}) + p(u_{i_2}) + \ldots + p(u_{i_m}) = \underbrace{\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \ldots + \frac{1}{n}}_{m \text{ раз}} = \frac{m}{n}.$$

Полученное равенство

$$\boldsymbol{P(A) = \frac{m}{n}}$$

часто принимают за определение вероятности в случае равновозможных элементарных событий и называют *классическим определением вероятности*. Его можно сформулировать так:

вероятность события A — это отношение числа благоприятствующих ему элементарных событий к числу всех равновозможных элементарных событий в данном эксперименте.

Задача 1 Пользуясь этим определением, найдем вероятность события A — выпало число очков, кратное 3, при бросании игрального кубика.

▶ Как отмечалось выше, в эксперименте по бросанию кубика существует шесть попарно несовместных равновозможных элементарных событий — выпало 1, 2, 3, 4, 5, 6 очков (также можно сказать, что пространство элементарных событий состоит из шести указанных попарно несовместных равновозможных событий). Благоприятствуют событию A только два элементарных события: выпало 3 очка и выпало 6 очков. Следовательно, вероятность события A равна: $P(A)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$. ◁

Задача 2 Петя и Паша бросают белый и черный игральные кубики и каждый раз подсчитывают сумму выпавших очков. Они договорились, что в случае, когда в очередной попытке в сумме выпадет 8 очков, то выигрывает Петя, а когда в сумме выпадет 7 очков, то выигрывает Паша. Является ли эта игра справедливой?

▶ При бросании кубиков на каждом из них может выпасть 1, 2, 3, 4, 5 или 6 очков. Каждому числу очков, выпавших на белом кубике (1, 2, 3, 4, 5 или 6 очков), отвечает шесть вариантов числа очков, выпавших на черном кубике. Следовательно, всего получаем 36 попарно несовместных равновозможных элементарных событий — результатов этого эксперимента, приведенных в таблице:

(1; 1)	(2; 1)	(3; 1)	(4; 1)	(5; 1)	(6; 1)
(1; 2)	(2; 2)	(3; 2)	(4; 2)	(5; 2)	(6; 2)
(1; 3)	(2; 3)	(3; 3)	(4; 3)	(5; 3)	(6; 3)
(1; 4)	(2; 4)	(3; 4)	(4; 4)	(5; 4)	(6; 4)
(1; 5)	(2; 5)	(3; 5)	(4; 5)	(5; 5)	(6; 5)
(1; 6)	(2; 6)	(3; 6)	(4; 6)	(5; 6)	(6; 6)

(В каждой паре чисел на первом месте записано число очков, выпавшее на белом кубике, а на втором месте — число очков, выпавшее на черном кубике.)

Пусть событие A означает, что при бросании кубиков в сумме выпало 8 очков, а событие B — что при бросании кубиков в сумме выпало 7 очков.

Событию A благоприятствуют следующие 5 результатов (элементарных событий):

(2; 6), (3; 5), (4; 4), (5; 3), (6; 2).

Событию B благоприятствуют следующие 6 результатов (элементарных событий):

(1; 6), (2; 5), (3; 4), (4; 3), (5; 2), (6; 1).

Тогда

$$P(A)=\frac{5}{36},\ P(B)=\frac{6}{36}.$$

Следовательно, шансов выиграть у Паши больше, чем у Пети, значит, такая игра не будет справедливой. ◁

Отметим, что результаты эксперимента по бросанию двух игральных кубиков, приведенные в задаче 2, позволяют вычислить вероятности появления той или иной суммы очков, выпадающих при бросании двух игральных кубиков.

Сумма очков	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Вероятность	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{36}$

Задача 3 Из 15 изготовленных велосипедов 3 оказались с дефектами. Какова вероятность того, что 2 выбранных наугад велосипеда будут без дефектов?

▶ Пусть событие A состоит в том, что 2 выбранных наугад велосипеда будут без дефектов. Из 15 велосипедов выбрать 2 можно C_{15}^2 способами (число соединений из 15 по 2). Все эти выборы являются равновозможными и попарно несовместными. Следовательно, общее количество равновозможных результатов (то есть общее количество элементарных событий) равно C_{15}^2. Событием, благоприятствующим событию A, является выбор 2 бездефектных велосипедов из 12 бездефектных ($15 - 3 = 12$). Следовательно, число результатов (событий), благоприятствующих событию A, равно C_{12}^2. Отсюда получаем

$$P(A) = \frac{C_{12}^2}{C_{15}^2} = \frac{\frac{12!}{2!(12-2)!}}{\frac{15!}{2!(15-2)!}} = \frac{12 \cdot 11}{15 \cdot 14} = \frac{22}{35}. \quad \triangleleft$$

Задача 4 Группа туристов, в которой 6 юношей и 4 девушки, выбирает по жребию четырех дежурных. Какова вероятность того, что будут выбраны 2 юношей и 2 девушки?

▶ Число результатов (элементарных событий) при выборе четырех дежурных из 10 туристов равно C_{10}^4. Все эти события равновозможные и попарно несовместные.

Пусть событие A состоит в том, что среди 4 дежурных есть 2 юношей и 2 девушки. Выбрать двоих юношей из 6 можно C_6^2 способами, а выбрать двух девушек из 4 можно C_4^2 способами. По правилу произведения выбор и двоих юношей, и двух девушек можно выполнить $C_6^2 \cdot C_4^2$ способами — это и есть количество событий, благоприятствующих событию A. Тогда

$$P(A) = \frac{C_6^2 \cdot C_4^2}{C_{10}^4} = \frac{\frac{6!}{2!(6-2)!} \cdot \frac{4!}{2!(4-2)!}}{\frac{10!}{4!(10-4)!}} = \frac{\frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} \cdot \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2}}{\frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}} = \frac{3}{7}. \quad \triangleleft$$

Обратим внимание, что в зависимости от рассматриваемой задачи для одного и того же эксперимента пространство элементарных событий можно вводить по-разному. Чаще всего для этого независимые элементарные события подбираем так, чтобы событие, вероятность которого необходимо найти, само было элементарным или выражалось через сумму элементарных событий. Но для того чтобы использовать классическое определение вероятности, необходимо быть уверенным, что все выделенные элементарные события — равновозможные.

Например, как уже отмечалось в задаче о бросании игрального кубика, пространство элементарных событий может состоять из 6 независимых равновозможных событий — выпало 1, 2, 3, 4, 5, 6 очков. Но если в задаче требуется найти вероятность выпадания четного числа очков, то пространством элементарных событий для этого эксперимента может быть множество только двух событий: u_1 — выпало четное число очков и u_2 — выпало нечетное число очков (поскольку эти события попарно несовместны и результатом эксперимента обязательно будет одно из этих событий). Эти события равновозможны (поскольку среди чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6 ровно половина четных и половина нечетных). Следовательно, по классическому определению вероятность каждого из них равна $\frac{1}{2}$. Конечно, если бы мы рассмотрели первое из указанных пространств элементарных событий, то также смогли бы решить эту задачу: всего событий — 6, а благоприятствующих — 3 (выпадение четного числа очков: 2, 4, 6). Тогда вероятность выпадания четного числа очков равна $\frac{3}{6}$, то есть $\frac{1}{2}$.

Попробуем ввести для решения этой задачи следующее пространство элементарных событий: u_1 — выпало четное число очков, u_2 — выпало 1 очко, u_3 — выпало 3 очка, u_4 — выпало 5 очков. Эти события действительно образуют пространство элементарных событий эксперимента по бросанию игрального кубика, поскольку они попарно несовместны и в результате эксперимента обязательно произойдет одно из этих событий. Но, пользуясь таким пространством элементарных событий, мы не сможем применить классическое определение вероятности, потому что, как мы уже видели, указанные элементарные события не являются равновозможными: $P(u_1)=\frac{1}{2},\ P(u_2)=\frac{1}{6},\ P(u_3)=\frac{1}{6},\ P(u_4)=\frac{1}{6}$.

Вопросы для контроля

1*. Объясните, как можно ввести понятие пространства элементарных событий и другие вероятностные понятия, используя термины теории множеств. Как в этом случае вводится понятие вероятности?
2*. Сформулируйте аксиомы вероятности.
3. На примерах случайных экспериментов с подбрасыванием монеты или бросанием игрального кубика объясните, что такое элементарное событие и пространство элементарных событий.
4. Сформулируйте классическое определение вероятности. Приведите примеры вычисления вероятностей по этому определению.

5*. Опираясь на аксиоматическое определение вероятности, обоснуйте формулу для классического определения вероятности.

Упражнение

1°. На экзамене — 24 билета. Андрей не разобрался в одном билете и очень боится его вытянуть. Какова вероятность, что Андрею достанется «несчастливый» билет?

2°. На вопросы викторины было получено 1250 открыток с правильными ответами, в том числе и ваша. Для определения призера ведущий должен наугад вытянуть одну открытку. Какова вероятность того, что приз достанется вам?

3. В лотерее 10 выигрышных билетов и 240 билетов без выигрыша. Какова вероятность выиграть в эту лотерею, купив один билет?

4. *Задача Даламбера*. Какова вероятность того, что при двух бросаниях монеты хотя бы один раз выпадет «герб»?

5. За победу в телеигре Яна получит главный приз — путешествие, если за одну попытку угадает, в каком из 12 секторов табло (рис. 137) спрятан приз.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12

Рис. 137

1) Какова вероятность того, что Яна отправится в путешествие?
2) Известно, что призы расположены в четырех секторах табло. Какова вероятность того, что Яна выиграет какой-нибудь приз?

6. В лотерее 100 билетов, из них 5 выигрышных. Какова вероятность проигрыша?

7. В кармане лежат 6 монет (рис. 138). Какова вероятность вынуть наугад монету: 1) с четным числом копеек; 2) с нечетным числом копеек; 3) меньше 20 копеек?

8. На карточке спортлото (6 из 49) Даниил отметил номера: 1, 2, 3, 4, 5, 6. Наташа на своей карточке отметила номера: 5, 12, 17, 23, 35, 49. Как вы думаете, выигрыш какого набора чисел более вероятен? Объясните свой ответ.

9. У Юры в коробке 25 белых и 50 красных шаров, у Наташи в коробке 40 белых и 80 красных шаров. Они играют в игру, победителем которой становится тот, кто первым, не глядя, вынет белый шар из своей коробки.

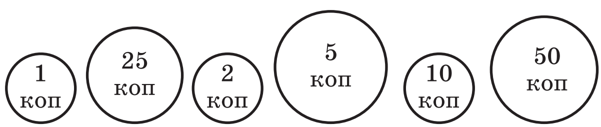


Рис. 138

Если они вынимают белый шар одновременно — ничья. Юра считает, что эта игра несправедлива, потому что у него в коробке меньше белых шаров. Согласны ли вы с Юрой? Объясните свой ответ.

10. Илья отметил в карточке спортлото (6 из 49) номера: 7, 11, 15, 29, 38, 40 — и выиграл. Тогда он решил, что эта комбинация чисел счастливая и он будет отмечать ее во всех тиражах. Действительно ли он увеличит свои шансы на выигрыш? Объясните свой ответ.

11. У сумке лежат 12 красных, 10 зеленых и 3 желтых яблока. 1) Какое яблоко вероятнее всего вынуть наугад из сумки? 2) Какова вероятность вынуть наугад: а) яблоко; б) грушу; в) зеленое яблоко; г) не красное яблоко?

12. Вы выиграете, если шар, вынутый наугад из коробки, белый. Какую из коробок выгоднее выбрать для игры, чтобы вероятность выигрыша была большей: 1) в коробке 15 белых шаров из 45; 2) в коробке 40 белых шаров из 120; 3) в коробке 22 белых шара и 44 красных; 4) в коробке поровну белых, красных и черных шаров.

13. Грани обычного игрального кубика окрашены в красный и желтый цвета. Вероятность того, что выпадет красная грань, равна $1/6$, вероятность того, что выпадет желтая грань, — $5/6$. Сколько красных и желтых граней у кубика?

14. В коробке половина конфет в красных обертках, треть — в синих обертках, остальные — в зеленых обертках. Наугад вынули одну конфету. Какого цвета обертка наименее вероятна у этой конфеты? Найдите эту вероятность.

15. В ящике лежат 8 красных, 2 синих и 20 зеленых карандашей. Вы наугад вынимаете карандаш. Какова вероятность того, что это:
1) красный карандаш? 2) желтый карандаш? 3) не зеленый карандаш?
4) какое наименьшее количество карандашей необходимо вынуть, чтобы с вероятностью, равной 1, среди них был зеленый карандаш?

16. При игре в хоккей мальчики делятся на две команды следующим образом. Каждый кладет свою клюшку в общую кучу, а затем один из игроков (с завязанными глазами) делит эту кучу на две равные части. Так образуются две команды. Пусть в игре собираются брать участие два сильных игрока. Какова вероятность того, что они попадут в разные команды? (У к а з а н и е. Рассмотреть все возможные варианты пребывания сильных игроков в двух командах.)

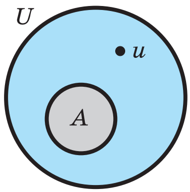
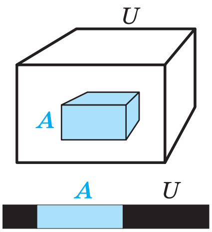
17. Бросают одновременно два игральных кубика. Какова вероятность того, что сумма очков будет равна 12?

18. На скамейку случайным образом садятся двое мужчин и женщина. Какова вероятность того, что мужчины окажутся рядом?

19. Из 5 карточек с буквами M, P, O, A, E наугад выбирают 4 карточки. Найдите вероятность того, что, положив их в ряд в том порядке, в котором мы их выбирали, мы получим слово «море».

19.4. Геометрическое определение вероятности

Таблица 29

1. Основные понятия	
	**U — некоторая фигура на площади,** **$S(U)$ — площадь фигуры U.** *Эксперимент* — это случайный выбор какой-то точки u из фигуры U (можно также представить, что эту точку u случайно бросили на фигуру U). *Элементарные события u* — точки фигуры U. **A — часть фигуры U ($A \subseteq U$),** **$S(A)$ — площадь фигуры A.** Событие A — попадание точек u в фигуру A. Тогда *элементарными событиями, благоприятствующими событию A, будут все точки фигуры A*. (Предполагаем, что вероятность попадания точки в часть фигуры U пропорциональна площади этой части и не зависит от ее конфигурации и расположения в фигуре U.)
2. Определение геометрической вероятности	
$P(A) = \frac{S(A)}{S(U)}$	***Геометрической вероятностью события A* называется отношение площади фигуры, благоприятствующей событию A, к площади всей заданной фигуры.**
3. Общее определение	
	Если U — пространственная фигура (тело), то записи $S(U)$ и $S(A)$ следует понимать как объемы тела U и тела A — части тела U. Если U — отрезок, то записи $S(U)$ и $S(A)$ следует понимать как длины отрезка U и его части — отрезка A. (Объем тела U в пространстве, площадь плоской фигуры U на плоскости, длину отрезка U на прямой назовем *мерой* фигуры U.)
$P(A) = \frac{\text{мера } A}{\text{мера } U}$	***Геометрической вероятностью события A* называется отношение меры фигуры, благоприятствующей событию A, к мере всей заданной фигуры.**

Объяснение и обоснование

Приведенное классическое определение вероятности нельзя применить к случайным экспериментам с бесконечным количеством результатов (то есть в случае, когда множество U бесконечно). В этом случае вероятность события $P(A)$ не всегда можно задать с помощью элементарных вероятностей.

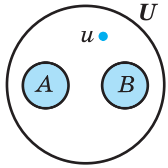


Рис. 139

Рассмотрим случай задания вероятностей $P(A)$ с помощью так называемых *геометрических вероятностей*. Пусть U — некоторая фигура на плоскости, $S(U)$ — ее площадь, A — часть фигуры U с площадью $S(A)$, B — часть фигуры U с площадью $S(B)$ (рис. 139). Элементарным событием u будем считать некоторую точку фигуры U, случайным образом выбранную на фигуре U или брошенную на фигуру U. Событием A будем считать попадание точек u в фигуру A. Также будем считать такой случайный выбор точек *равномерным* (или, как говорят, распределение вероятностей равномерно). Иными словами, вероятности попадания точки u в фигуры A и B, имеющие одинаковые площади, одинаковы и не зависят от положения этих фигур (если $A \subseteq U$, $B \subseteq U$ и $S(A) = S(B)$, то $P(A) = P(B)$). То есть мы полагаем, что вероятность попадания точки в часть фигуры U пропорциональна только площади этой части и не зависит от ее расположения в фигуре U. Тогда вероятность попадания точки u в фигуру A определяется как отношение площадей

$$P(A) = \frac{S(A)}{S(U)}. \qquad (8)$$

Поскольку благоприятствующим элементарным событием для рассмотренного эксперимента является попадание выбранной точки в фигуру A, то фигуру A можно назвать благоприятствующей этому эксперименту, и тогда определение геометрической вероятности можно сформулировать следующим образом:

геометрической вероятностью события A называется отношение площади фигуры, благоприятствующей событию A, к площади всей заданной фигуры.

Задача 1 Пусть круглая мишень радиуса 20 см разделена концентрическими окружностями с радиусами $R_k = 2(10 - k)$, где $k = 1, 2, \ldots, 9$ на 10 колец. Внутренний круг радиуса $R_9 = 2$ также назовем кольцом и будем считать, что $R_{10} = 0$, а $R_0 = 20$ (рис. 140). Плохой стрелок попал в мишень. Будем считать, что стрелок выбил k очков, если он попал в k-е кольцо, то есть в кольцо между окружностями радиусов R_{k-1} и R_k (или попал в окружность радиуса R_{k-1}).

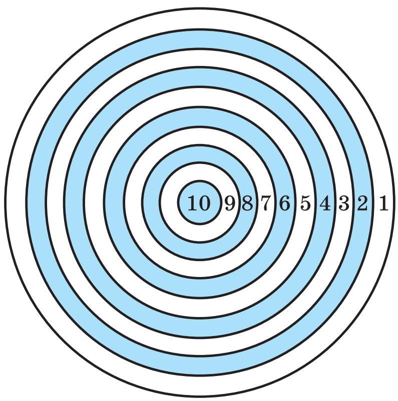


Рис. 140

Обозначим событие A_k — стрелок выбил k очков и определим вероятность каждого из таких событий при $k = 1, 2, ..., 9, 10$.

Если считать, что у плохого стрелка точки попадания пуль равномерно распределены на круге мишени, то можно использовать геометрическое определение вероятности. Получаем $P(A_k) = \frac{S_{k\text{-го кольца}}}{S_{\text{мишени}}}$. Учитывая, что

$$S_{k\text{-го кольца}} = \pi R_{k-1}^2 - \pi R_k^2 = 4\pi(11-k)^2 - 4\pi(10-k)^2 = 4\pi(21-2k)$$

и $S_{\text{мишени}} = \pi R_0^2 = 400\pi$, имеем

$$P(A_k) = \frac{21-2k}{100}, \text{ где } k = 1, 2, ..., 9, 10.$$

З а м е ч а н и е 1. Назовем события A и B несовместными (событие A — точка попала в фигуру A, событие B — точка попала в фигуру B), если фигуры A и B не имеют общих точек (то есть множества точек фигур A и B не имеют общих элементов). *Сумму* событий $A + B$ и *произведение* $A \cdot B$ определим как объединение $A \cup B$ и пересечение $A \cap B$ множеств точек фигур A и B.

Событие $\overline{A}$, *противоположное* событию A, определим как дополнение $\overline{A}$ множества точек фигуры A до множества U (то есть как множество всех точек фигуры U, не входящих в фигуру A).

Тогда приведенное определение геометрической вероятности удовлетворяет свойствам (1)–(3), а следовательно, и аксиомам 1–3, приведенным на с. 274.

Действительно, $P(U) = \frac{S(U)}{S(U)} = 1$, значит, свойство (1) и аксиома 2 выполняются.

По свойству площади $S(A) > 0$, $S(U) > 0$, таким образом, $P(A) \geqslant 0$ (то есть аксиома 1 выполняется). Учитывая, что $A \subseteq U$ (рис. 139), получаем, что $S(A) \leqslant S(U)$, следовательно, $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$ (то есть свойство (2) выполняется).

Если события A и B несовместны, то фигуры A и B не имеют общих точек. Тогда $S(A \cup B) = S(A) + S(B)$. Следовательно,

$$P(A+B) = \frac{S(A \cup B)}{S(U)} = \frac{S(A)+S(B)}{S(U)} = \frac{S(A)}{S(U)} + \frac{S(B)}{S(U)} = P(A) + P(B),$$

то есть свойство (3) выполняется (а значит, выполняется и аксиома 3).

Поскольку разные определения вероятности удовлетворяют одним и тем же основным свойствам (аксиомам), то следствия, которые могут быть получены с использованием этих аксиом, не зависят от способа определения вероятности. Поэтому далее обоснования общих свойств вероятностей мы будем проводить для одного определения — или, как говорят в математике, для одной вероятностной модели, — и иметь в виду, что аналогичное обоснование можно провести и для других моделей. Хотя, конечно, для каждой модели можно указать и свои специфические свойства, которых нет у других моделей.

З а м е ч а н и е 2. Определение геометрической вероятности (8) можно использовать не только в том случае, когда U — плоская фигура.

Если, например, U — пространственная фигура (тело), то в случае равномерного распределения вероятностей (в том понимании, что вероятности попадания точки u в части данного тела, имеющие одинаковые объемы, одинаковы и не зависят от положения этих частей в заданном теле), в формуле (8) под записями $S(U)$ и $S(A)$ следует понимать объемы тела U и его части — тела A.

Аналогично, если U — отрезок, то в случае равномерного распределения вероятностей (в том понимании, что вероятности попадания точки u в части данного отрезка, которые имеют одинаковые длины, одинаковы и не зависят от положения этих частей на заданном отрезке), в формуле (8) под записями $S(U)$ и $S(A)$ следует понимать длины отрезка U и его части — отрезка A.

Отметим, что объем тела U в пространстве, площадь плоской фигуры U на плоскости, длину отрезка U на прямой можно назвать *мерой* фигуры U. Тогда в общем виде формулу (8) можно записать так:

$$P(A)=\frac{\text{мера } A}{\text{мера } U},$$

то есть в общем случае

***геометрической вероятностью события A* называется отношение меры фигуры, благоприятствующей событию A, к мере всей заданной фигуры.**

Задача 2 Две подруги договорились позвонить в промежутке от 9 ч до 10 ч. Найдите вероятность того, что их разговор начнется в промежутке от 9 ч 20 мин до 9 ч 25 мин.

▶ Одна подруга может позвонить другой в промежутке от 9.00 до 10.00. В этой задаче эксперимент — это фиксирование времени телефонного звонка. Изобразим все результаты эксперимента в виде отрезка AB (рис. 141). Элементарные события — это точки отрезка AB (одна подруга может позвонить другой в любое время с 9.00 до 10.00). Если событие A — вызов произошел в промежутке 9.20 – 9.25, то элементарные события, благоприятствующие событию A, можно изобразить точками отрезка CD. Если считать, что время вызова в оговоренном промежутке распределяется равномерно, то

$$P(A)=\frac{\text{мера } CD}{\text{мера } AB}=\frac{5}{60}=\frac{1}{12}\approx 0{,}08.$$

(При вычислении учтено, что в минутах мера CD равна 5, а мера AB равна 60 (1 ч = 60 мин).) ◁

Задача 3* К сигнализатору поступают сигналы от двух устройств,

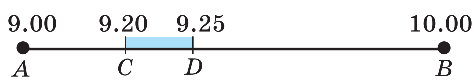


Рис. 141

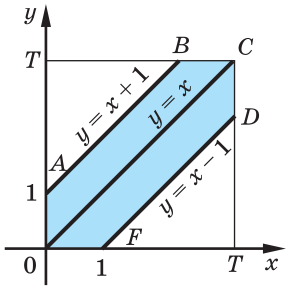


Рис. 142

причем поступление каждого из сигналов равновозможно в любой момент промежутка времени длительностью T мин. Моменты поступления сигналов независимы один от другого. Сигнализатор срабатывает, если разность между моментами поступления сигналов меньше 1 мин. Найдите вероятность того, что сигнализатор срабатывает за время T, если каждое из устройств пошлет по одному сигналу.

▶ Выберем промежуток времени длительностью T, например $[0; T]$. Обозначим моменты поступления сигналов первого и второго устройств соответственно через x и y. Из условия задачи следует, что должны выполняться двойные неравенства: $0 \leqslant x \leqslant T$, $0 \leqslant y \leqslant T$.

Введем прямоугольную систему координат xOy. В этой системе двойным неравенствам удовлетворяют координаты любой точки, принадлежащей квадрату $OTCT$. Следовательно, этот квадрат можно рассматривать как фигуру G, координаты точек которой задают все возможные значения моментов поступления сигналов.

Сигнализатор срабатывает, если разность между моментами поступления сигналов меньше 1 мин, то есть если $y - x < 1$ при $y > x$ и $x - y < 1$ при $x > y$, что равносильно неравенствам

$$y < x + 1 \text{ при } y > x, \tag{9}$$

$$y > x - 1 \text{ при } y < x. \tag{10}$$

Неравенства (9) выполняются для координат точек фигуры G, лежащих выше прямой $y = x$ и ниже прямой $y = x + 1$; неравенства (10) имеют место для координат точек, расположенных ниже прямой $y = x$ и выше прямой $y = x - 1$.

Как видно из рисунка 142, все точки, координаты которых удовлетворяют неравенствам (9) и (10), принадлежат заштрихованному шестиугольнику $OABCDF$. Таким образом, этот шестиугольник можно рассматривать как фигуру g, координаты точек которой являются благоприятными моментами времени x и y для срабатывания сигнализатора.

Учитывая, что

$$\text{площадь } g = 2S_{OABC} = 2 \cdot (S_{\triangle OTC} - S_{\triangle ATB}) =$$
$$= 2S_{\triangle OTC} - 2S_{\triangle ATB} = T^2 - (T-1)^2 = 2T - 1,$$

получаем, что искомая вероятность равна

$$P(A) = \frac{\text{площадь } g}{\text{площадь } G} = \frac{2T-1}{T^2}. \ \triangleleft$$

Вопросы для контроля

1. Объясните, в чем состоит эксперимент при геометрическом определении вероятности.
2. Дайте определение геометрической вероятности. В каких случаях его можно использовать? Приведите примеры.

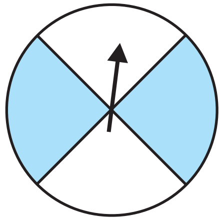


Рис. 143

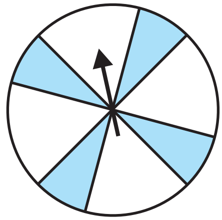


Рис. 144

Упражнения

1°. Егор и Даниил договорились: если стрелка вертушки (рис. 143) остановится на белом поле, то изгородь будет красить Егор, а если на синем поле — Даниил. У кого из мальчиков больше шансов красить изгородь?

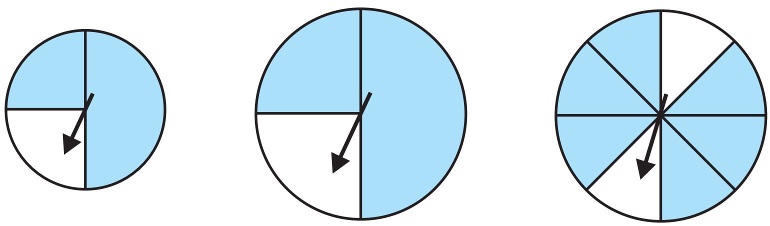
2°. Два приятеля с помощью вертушки (рис. 144) решают, как им провести выходной: если стрелка остановится на белом, они пойдут в кино, если на синем — на стадион. Какое из событий вероятнее: приятели пойдут на стадион или в кино?

3°. Вы выиграете, если стрелка вертушки остановится на белом. Какая из вертушек, изображенных на рисунке 145, дает вам больше шансов на выигрыш?

4. В окружность радиуса R вписан квадрат. В круг, ограниченный заданной окружностью, наугад поставили точку. Найдите вероятность того, что эта точка будет находиться внутри квадрата, считая, что вероятность попадания точки в часть круга пропорциональна площади этой части и не зависит от ее расположения в круге.

5. В сферу радиуса R вписан куб. В шар, ограниченный заданной сферой, наугад бросили точку. Найдите вероятность того, что эта точка будет находиться внутри куба, считая, что вероятность попадания точки в часть шара пропорциональна объему этой части и не зависит от ее расположения в шаре.

6. На отрезке L длиной 20 см расположили меньший отрезок l длиной 10 см. Найдите вероятность того, что точка, наугад поставленная на большом отрезке, попадет на меньший отрезок. Преполагается, что вероятность



а *б* *в*

Рис. 145

попадания точки на отрезок пропорциональна длине отрезка и не зависит от его расположения.

7*. *Задача о встрече*. Два друга договорились встретиться в определенном месте между 12 ч и 13 ч. Тот, кто придет первым, будет ждать второго $\frac{1}{4}$ ч, после чего покинет место встречи. Найдите вероятность того, что встреча произойдет, если каждый из друзей выбирает наугад момент своего прибытия (в промежутке от 12 ч до 13 ч).

Указание. Для упрощения графической иллюстрации будем считать, что встреча может произойти между 0 ч и 1 ч. Удобно обозначить время прибытия первого друга на место встречи через x, а второго — через y и ввести прямоугольную систему координат xOy.

19.5. Условные вероятности

Таблица 30

1. Понятие условной вероятности	
Содержательное определение	Формула
Число, выражающее вероятность события A при условии, что произошло событие B, называется *условной вероятностью события A при условии события B* и обозначается $P_B(A)$ или $P(A \mid B)$.	$P_B(A) = \frac{P(AB)}{P(B)}$
2. Вероятность произведения двух событий (теорема умножения вероятностей)	
$P(AB) = P(A) \cdot P_A(B).$	*Вероятность произведения (то есть совместного появления) двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого события, которая вычисляется при условии, что первое событие уже произошло.*
3. Вероятность произведения нескольких событий	
$P(A_1A_2...A_n) =$ $= P(A_1)P_{A_1}(A_2)P_{A_1A_2}(A_3)...P_{A_1A_2...A_{n-1}}(A_n)$	*Вероятность произведения (то есть совместного появления) нескольких событий равна произведению вероятности одного из них на условные вероятности остальных, причем вероятность каждого следующего события вычисляется при условии, что все предыдущие события уже произошли.*

Объяснение и обоснование

Понятие условной вероятности. Вероятность произведения двух событий. Оценивая вероятность случайного события A, иногда приходится учитывать какие-то дополнительные условия, влияющие на оценку вероятности этого события. Например, если событие A — это выпадание 3 очков при бросании игрального кубика, то его вероятность равна $\frac{1}{6}$ (равновозможные элементарные события — это выпадание 1, 2, 3, 4, 5, 6 очков). Но если известно, что уже произошло событие B — выпало нечетное число очков при бросании игрального кубика, то после этого вероятность события A становится равной $\frac{1}{3}$ (равновозможные элементарные события — это выпадание нечетного числа очков, то есть 1, 3, 5 очков). Также после того как уже произошло событие B, вероятность выпадания 6 очков равна нулю.

Таким образом, получение некоторой информации о результатах случайного эксперимента означает, что при вычислении вероятности события A вместо всего пространства элементарных событий U необходимо брать ту его часть, элементарные события которой благоприятствуют событию B (поэтому обозначим ее через B).

Число, выражающее вероятность события A при условии, что произошло событие B, называется *условной вероятностью события A при условии события B* и обозначается $P_B(A)$ или $P(A \mid B)$.

Условная вероятность события A при условии события B вычисляется по формуле

$$P_B(A) = \frac{P(AB)}{P(B)} \quad (\text{где } P(B) > 0). \tag{9}$$

Докажем эту формулу для классического определения вероятности. Пусть в результате случайного эксперимента мы можем получить n равновозможных элементарных событий (пространство U). Из этих событий m событий благоприятствуют событию A, k — событию B, l — событию AB (рис. 146). Тогда $P(A) = \frac{m}{n}$, $P(B) = \frac{k}{n}$, $P(AB) = \frac{l}{n}$. Найдем вероятность события A при условии события B. Как уже отмечалось, для вычисления условной вероятности вместо всего пространства элементарных событий U необходимо брать только ту его часть, элементарные события которой благоприятствую событию B. В этом случае общее количество результатов эксперимента равно k. Из них событию A благоприятствуют только l элементарных событий, составляющих событие AB. Тогда

$$P_B(A) = \frac{l}{k} = \frac{\frac{l}{n}}{\frac{k}{n}} = \frac{P(AB)}{P(B)}.$$

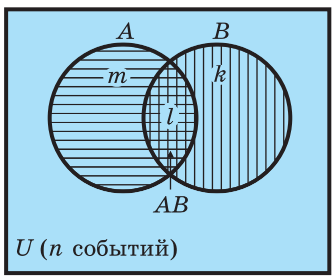


Рис. 146

Отметим, что равенство (9) часто принимается за определение условной вероятности события A при условии, что произошло событие B.

Из равенства (9) получаем, что

$$P(AB) = P(B) \cdot P_B(A). \qquad (10)$$

Поскольку событие BA совпадает с событием AB, то в правой части формулы (10) можно поменять местами A и B. Тогда

$$P(AB) = P(A) \cdot P_A(B). \qquad (11)$$

Вероятность произведения (то есть совместного появления) двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность второго события, вычисленную при условии, что первое событие уже произошло.

Равенство (11) (или (10)) обычно называют *теоремой умножения вероятностей*. Если мы можем вычислить вероятность события A и условную вероятность $P_A(B)$, то по формуле (11) легко найти вероятность $P(AB)$ произведения событий A и B.

Задача 1 В коробке находится 10 шаров, из них 4 белых. Наугад берут друг за другом два шара, причем взятый шар в коробку не возвращают. Вычислим вероятность того, что оба шара будут белые.

▶ Обозначим события: A — первый вынутый шар белый, B — второй вынутый шар белый. Тогда событие AB — оба вынутых шара белые.

Вынимание (наугад) из коробки любого из 10 шаров — равновозможные события. Событию A благоприятствуют 4 события (в коробке всего 4 белых шара). Тогда $P(A)=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$. После того как вынули один белый шар (произошло событие A), в коробке осталось 9 шаров, из них только 3 белые, следовательно, $P_A(B)=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$. Тогда по формуле умножения вероятностей (11) получаем

$$P(AB)=P(A)\cdot P_A(B)=\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{15}. \ \triangleleft$$

Задача 2 Среди однотипных деталей, выпускаемых в цеху, 1 % бракованных. Среди качественных деталей 40 % деталей высшего сорта. Какова вероятность того, что взятая наугад деталь высшего сорта?

▶ Обозначим события: A — деталь небракованная, B — деталь высшего сорта. Тогда событие AB — выбрали качественную деталь высшего сорта.

Выбор одной детали из множества однотипных деталей — равновозможные события. Учитывая, что среди выпущенных деталей 99 % качественных, получаем $P(A) = 0{,}99$, а учитывая, что среди качественных деталей 40 % деталей высшего сорта, получаем, что $P_A(B) = 0{,}4$. Тогда

$$P(AB) = P(A) \cdot P_A(B) = 0{,}99 \cdot 0{,}4 = 0{,}396. \ \triangleleft$$

Формула умножения вероятностей (10) обобщается на случай нескольких событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$:

$$P(A_1A_2\ldots A_n) = P(A_1)P_{A_1}(A_2)P_{A_1A_2}(A_3)\ldots P_{A_1A_2\ldots A_{n-1}}(A_n), \qquad (12)$$

где $P_{A_1A_2\ldots A_{n-1}}(A_n)$ означает условную вероятность события A_n, вычисленную при условии, что все события $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$ уже произошли. Следовательно,

вероятность произведения (то есть совместного появления) нескольких событий равна произведению вероятности одного из них на условные вероятности других, причем вероятность каждого следующего события вычисляется при условии, что все предыдущие события уже произошли.

Задача 3 В коробке лежат 6 белых, 4 черных и 3 красных шара. Наугад один за другим вынимают три шара, причем вынутый шар в коробку не возвращают. Найдите вероятность того, что первый шар будет красным, второй — белым, а третий — черным.

▶ Пусть событие A — первый вынутый шар красный, событие B — второй шар белый, событие C — третий шар черный. Тогда событие ABC — вынули три шара, из которых первый красный, второй белый и третий черный.

В коробке всего 13 шаров. Вынимание (наугад) любого из 13 шаров — равновозможные события. Событию A благоприятствуют 3 события (в коробке всего 3 красных шара). Тогда $P(A) = \frac{3}{13}$. После того как вынули один красный шар (произошло событие A) в коробке осталось 12 шаров, из них только 6 белых, следовательно, $P_A(B) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$. После того как вынули один красный и один белый шар (произошли события A и B, то есть событие AB), в коробке осталось 11 шаров, из них только 4 черных, следовательно, $P_{AB}(C) = \frac{4}{11}$. Тогда по обобщенной формуле умножения вероятностей (12) получаем

$$P(ABC) = P(A) \cdot P_A(B) \cdot P_{AB}(C) = \frac{3}{13} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{11} = \frac{6}{143}. \ \triangleleft$$

Вопросы для контроля

1. Объясните смысл понятия условной вероятности события A при условии события B. Приведите примеры.
2*. Обоснуйте формулу $P_B(A) = \frac{P(AB)}{P(B)}$ (где $P(B) > 0$) для случая классического определения вероятности.
3. Сформулируйте теорему умножения вероятностей. Приведите пример ее использования.
4. Объясните, как можно вычислить вероятность произведения (то есть совместного появления) нескольких событий. Приведите пример вычисления такой вероятности.

Упражнения

1. В ящике находится десять деталей, из которых четыре окрашены. Рабочий наугад по одной вынимает две детали. Найдите вероятность того, что:
1°) вторая деталь окрашена, если первая окрашена;
2°) вторая деталь окрашена, если первая не окрашена;
2) обе детали окрашены;
3) обе детали не окрашены.

2. В коробке находятся 5 белых и 4 черных шара. Из коробки наугад вынимают один за другим два шара (шары в коробку не возвращают). Найдите вероятность того, что второй шар белый, если первый: 1) белый; 2) черный.

3. На некотором предприятии 95 % продукции считается качественной. Из качественных изделий 75 % составляют изделия первого сорта, остальные — второго. Найдите вероятность того, что изделие, изготовленное на этом предприятии, окажется изделием второго сорта.

4. В читальном зале есть шесть учебников по математике, из которых три в твердой обложке. Библиотекарь наугад взял два учебника. Найдите вероятность того, что оба учебника будут в твердой обложке.

5. В коробке лежат 12 красных, 8 зеленых и 10 синих шаров. Наугад один за другим берут три шара, причем взятый шар в коробку не возвращают. Найдите вероятность того, что первый шар будет красным, второй — зеленым, а третий — синим.

19. 6. Независимые события

Таблица 31

<table>
<tr><th colspan="2">1. Понятие независимости двух событий</th></tr>
<tr><th>Содержание</th><th>Определение</th></tr>
<tr><td>Событие B называется независимым от события A, если событие A не изменяет вероятности события B.</td><td>События A и B называются независимыми, если выполняется равенство
$$P(AB) = P(A) \cdot P(B)$$
(вероятность их произведения — то есть совместного появления — равна произведению вероятностей этих событий).</td></tr>
<tr><th colspan="2">2. Независимость нескольких событий</th></tr>
<tr><td colspan="2">Несколько событий называются независимыми, если для какого-либо подмножества этих событий (содержащего два или больше событий) вероятность их произведения равна произведению их вероятностей.
В частности,
если события $A_1, A_2, \ldots, A_n$ независимы, то
$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n)$$</td></tr>
</table>

Продолж. табл. 31

3. Свойство независимых событий
Если мы имеем совокупность независимых событий, то, заменив некоторые из этих событий на противоположные им события, снова получим совокупность независимых событий. Например, *если события A и B независимы, то независимыми будут также события* A и $\bar{B}$, $\bar{A}$ и B, $\bar{A}$ и $\bar{B}$.
4. Вероятность того, что произойдет хотя бы одно из независимых событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$
$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = 1 - (1 - P(A_1)) \cdot (1 - P(A_2)) \cdot \ldots \cdot (1 - P(A_n))$

Объяснение и обоснование

Событие B называется независимым от события A, если появление события A не изменяет вероятности события B. В этом случае

$$P_A(B) = P(B).$$

Тогда по формуле умножения вероятностей

$$P(AB) = P(A) \cdot P_A(B) = P(A) \cdot P(B).$$

Полученное равенство чаще всего принимают за общее определение независимости событий.

События A и B называются *независимыми*, если выполняется равенство

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B), \qquad (13)$$

то есть *два события называются независимыми, если вероятность их произведения (то есть совместного появления) равна произведению вероятностей этих событий*.

Равенство (13) обязательно будет выполняться, если одно из событий невозможное или достоверное. Например, если событие B — невозможное, то есть $B = \varnothing$, то $AB = \varnothing$. Следовательно, $P(AB) = 0$ и $P(B) = 0$, то есть равенство (13) выполняется. Если событие B — достоверное, то есть $B = U$, то $AB = AU = A$. Тогда $P(AB) = P(A)$ и $P(B) = 1$, следовательно, равенство (13) выполняется и в этом случае. Таким образом, *если хотя бы одно из двух событий невозможное или достоверное, то такие два события независимы.*

Отметим, что в случае, когда события A и B не являются невозможными или достоверными и выполняется равенство $P_A(B) = P(B)$ (событие B является независимым от события A), то $P_B(A) = P(A)$ (то есть событие A является независимым от события B). Действительно, по формуле умножения вероятностей $P(AB) = P(A) \cdot P_A(B) = P(B) \cdot P_B(A)$. Тогда

$$P(A) \cdot P_A(B) = P(B) \cdot P_B(A). \qquad (14)$$

Подставляя в последнее равенство вместо $P_A(B)$ равное ему число $P(B)$ и сокращая обе части на $P(B) \neq 0$, получаем, что $P_B(A) = P(A)$. Это подтверждает интуитивно понятный факт, что в случае, когда событие B не зависит от события A, то и событие A не зависит от события B.

Обратим внимание, что в *случае, когда события A и B независимы, то независимыми будут также события A и $\bar{B}$, $\bar{A}$ и B, $\bar{A}$ и $\bar{B}$.*

Докажем, например, что будут независимыми события A и $\bar{B}$. Если события A и B независимые, то по определению $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$. Когда происходит событие A, то в это время событие B может происходить или не происходить. Следовательно, можно утверждать, что событие A происходит тогда и только тогда, когда происходят или события A и B, или события A и $\bar{B}$, то есть $A = AB + A\bar{B}$. Учитывая, что события AB и $A\bar{B}$ несовместны (поскольку события B и $\bar{B}$ — несовместны) и что $P(\bar{B}) = 1 - P(B)$, получаем $P(A) = P(AB) + P(A\bar{B})$. Тогда

$$P(A\bar{B}) = P(A) - P(AB) = P(A) - P(A) \cdot P(B) = P(A) \cdot (1 - P(B)) = P(A) \cdot P(\bar{B}).$$

А это и означает, что события A и $\bar{B}$ независимые.

Аналогично обосновывается независимость событий $\bar{A}$ и B, $\bar{A}$ и $\bar{B}$.

Понятие независимости событий может быть распространено на любое конечное количество событий.

Несколько событий называются *независимыми* (еще говорят — «независимыми в совокупности»), если для любого подмножества этих событий (содержащего два или более событий) вероятность их произведения равна произведению их вероятностей.

Например, три события A, B, C будут независимыми, если выполняются условия:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B),\ P(AC) = P(A) \cdot P(C),\ P(BC) = P(B) \cdot P(C),$$
$$P(ABC) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C).$$

Из определения следует, что в случае, **когда события $A_1, A_2, \dots, A_n$ независимы, то**

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n) \qquad (15)$$

(но выполнение этого равенства при $n > 2$ еще не означает, что события A_1, $A_2, \dots, A_n$ независимые).

Как и в случае двух событий, можно доказать, что если в некоторой совокупности независимых событий, заменить некоторые из них противоположными им событиями, то получится также совокупность независимых событий.

Отметим, что приведенные определения независимости событий в теоретико-вероятностном понимании соответствуют обычному пониманию независимости событий как отсутствию влияния одних событий на другие. Поэтому при решении задач можно пользоваться следующим принципом: *причинно независимые события являются независимыми и в теоретико-вероятностном понимании.*

Задача 1 Прибор состоит из трех узлов, каждый из которых на протяжении суток может выйти из строя независимо от других. Прибор не работает, если не работает хотя бы один из узлов. Вероятность безотказной работы в течение суток первого узла равна 0,95, второго — 0,9, третьего — 0,85.

Найдите вероятность того, что в течение суток прибор будет работать безотказно.

▶ Пусть событие A_1 — первый узел исправен, событие A_2 — второй узел исправен, событие A_3 — третий узел исправен, событие A — в течение суток прибор работает безотказно. Поскольку прибор работает безотказно тогда и только тогда, когда исправны все три узла, то $A = A_1A_2A_3$. По условию события A_1, A_2, A_3 — независимые, следовательно,

$P(A) = P(A_1A_2A_3) = P(A_1)\,P(A_2)\,P(A_3) = 0{,}95 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}85 = 0{,}72675 \approx 0{,}73.$ ◁

Задача 2 Два стрелка сделали по одному выстрелу в одну мишень. Вероятность попасть в мишень для первого стрелка равна 0,9, для второго — 0,8. Найдите вероятность того, что мишень будет поражена.

▶ Рассмотрим такие события: A — первый стрелок попал в мишень, B — второй стрелок попал в мишень, C — мишень поражена. События A и B независимые, но непосредственно использовать в данном случае умножение вероятностей нельзя, поскольку событие C наступает не только тогда, когда оба стрелка попали в мишень, но и тогда, когда в мишень попал хотя бы один из них.

Будем рассуждать иначе. Рассмотрим события $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$, противоположные соответственно событиям A, B, C. Поскольку события A и B независимые, то события $\overline{A}$, $\overline{B}$ — также независимые. Если $P(A) = 0{,}9$, то $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0{,}9 = 0{,}1$. Если

$P(B) = 0{,}8$, то $P(\overline{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$.

Учитывая, что мишень не будет поражена тогда и только тогда, когда в нее не попадет ни первый стрелок, ни второй, получаем, что $\overline{C} = \overline{A}\,\overline{B}$. Тогда

$$P(\overline{C}) = P(\overline{A})\,P(\overline{B}) = 0{,}1 \cdot 0{,}2 = 0{,}02.$$

Поскольку события C и $\overline{C}$ противоположные, то

$$P(C) = 1 - P(\overline{C}) = 1 - 0{,}02 = 0{,}98.$$ ◁

З а м е ч а н и е. Рассуждения, приведенные при решении задачи 2, можно обобщить.

Если события $A_1, A_2, \ldots, A_n$ независимые, то события $\overline{A_1}, \overline{A_2}, \ldots, \overline{A_n}$ также независимые (и $P(\overline{A_i}) = 1 - P(A_i)$, где $i = 1, 2, \ldots, n$). Для нахождения вероятности появления хотя бы одного из независимых событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$, то есть события $C = A_1 + A_2 + \ldots + A_n$, можно найти вероятность противоположного события $\overline{C}$. Событие $\overline{C}$ произойдет тогда и только тогда, когда не произойдет ни событие A_1, ни событие A_2, ..., ни событие A_n, то есть

$\overline{C} = \overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \ldots \cdot \overline{A_n}$. Тогда

$$P(\overline{C}) = P(\overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \ldots \cdot \overline{A_n}) = P(\overline{A_1}) \cdot P(\overline{A_2}) \cdot \ldots \cdot P(\overline{A_n}) =$$
$$= (1 - P(A_1)) \cdot (1 - P(A_2)) \cdot \ldots \cdot (1 - P(A_n)).$$

Учитывая, что $P(C)=1-P(\overline{C})$, получаем, что *вероятность появления хотя бы одного из независимых событий* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ можно вычислить по формуле

$$\boldsymbol{P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = 1 - (1 - P(A_1)) \cdot (1 - P(A_2)) \cdot \ldots \cdot (1 - P(A_n)).}$$

Разумеется, приведенную формулу необязательно запоминать, достаточно при решении задач на нахождение вероятности появления хотя бы одного из независимых событий провести вышеизложенные рассуждения.

Вопросы для контроля

1. Объясните, в каком случае событие B называется независимым от события A.
2. Дайте определение независимости двух событий. Пользуясь этим определением, докажите, что в эксперименте по вытягиванию карт из колоды (36 карт) независимыми являются события: A — вытянули даму, B — вытянули бубновую карту.
3*. Известно, что события A и B независимые. Обоснуйте независимость событий $\overline{A}$ и B, A и $\overline{B}$, $\overline{A}$ и $\overline{B}$.
4. Объясните, как понимают независимость (то есть независимость в совокупности) трех событий K, M, N.
5. Запишите формулу для нахождения вероятности произведения нескольких независимых событий. Приведите пример ее использования.

Упражнения

1°. Вероятность того, что стрелок при одном выстреле попадет в цель, равна 0,8. Стрелок сделал два выстрела. Найдите вероятность того, что при двух выстрелах стрелок попал в цель.

2°. Одновременно подбросили монету и игральный кубик. Найдите вероятность одновременного выпадения «герба» на монете и 1 очка на кубике.

3°. В одной партии электролампочек 3 % бракованных, а во второй — 4 % бракованных. Наугад берут по одной лампочке из каждой партии. Найдите вероятность того, что обе лампочки окажутся бракованными.

4. Бросают два игральных кубика. Найдите вероятность того, что на одном кубике выпадет 1 очко, а на втором — больше трех очков.

5. Три стрелка, для которых вероятности попадания в мишень равны 0,8, 0,75, 0,7, делают по одному выстрелу по одной мишени. Найдите вероятность того, что:

1°) все три стрелка попадут в мишень;
2) хотя бы один из стрелков попадет в мишень;
3) только один из стрелков попадет в мишень;
4) только двое из стрелков попадут в мишень.

6. Вероятность остановки за смену одного из станков, работающих в цеху, равна 0,15, а второго — 0,16. Найдите вероятность того, что оба станка за смену не остановятся.

7. Прибор содержит два независимых элемента. Вероятности отказа элементов соответственно равны 0,05 и 0,08. Найдите вероятность отказа прибора, если для этого достаточно, чтобы отказал хотя бы один элемент.
8*. Вероятность хотя бы одного попадания стрелком в мишень при трех выстрелах равна 0,875. Найдите вероятность попадания при одном выстреле.
9*. Вероятность того, что при одном выстреле стрелок попадет в цель, равна 0,5. Сколько выстрелов должен сделать стрелок, чтобы с вероятностью не меньше 0,9 попасть в цель хотя бы один раз?

19. 7. Схема Бернулли. Закон больших чисел

Таблица 32

<table>
<tr><td colspan="2">1. Понятие экспериментов, независимых относительно события A</td></tr>
<tr><td>Если вероятность события A в каждом эксперименте не зависит от результатов других экспериментов, то такие эксперименты называют независимыми относительно события A.</td><td>Пример. Пусть событие A — выпал «герб». Тогда эксперименты по подбрасыванию одной и той же монеты в одинаковых условиях являются независимыми относительно события A.</td></tr>
<tr><td colspan="2">2. Схема Бернулли (совокупность условий)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Пусть выполняется n независимых экспериментов, в каждом из которых событие A может произойти, а может и не произойти. Вероятность того, что произойдет событие A, в каждом из экспериментов одинакова и равна p, а вероятность того, что событие A не произойдет (то есть произойдет событие $\bar{A}$) равна $q = 1 - p$.</td></tr>
<tr><td colspan="2">3. Формула Бернулли</td></tr>
<tr><td>Вероятность $P_{m,n}$ того, что в n независимых экспериментах событие A произойдет точно m раз, равна
$$P_{m,n} = C_n^m p^m q^{n-m}$$</td><td>Пример. Найдите вероятность того, что при 6 подбрасываниях монеты «герб» выпадет точно 4 раза.
▶ Для этой задачи условия схемы Бернулли таковы:
$$n = 6,\ m = 4,\ p = \frac{1}{2},\ q = 1 - p = \frac{1}{2}.$$
Тогда
$$P_{4,6} = C_6^4 \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2}\left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{15}{64} \approx 0{,}23.$$ ◁</td></tr>
</table>

Продолж. табл. 32

3*. Неравенство Чебышева	
Пусть вероятность того, что в эксперименте произойдет событие A равна p (тогда вероятность того, что событие A не произойдет, равна $q = 1 - p$) и пусть проводятся серии экспериментов, состоящих из n независимых повторений этого эксперимента. Через m обозначим число экспериментов, в которых произошло событие A. Тогда для любого положительного числа a выполняется неравенство $$P\left(\left\|\frac{m}{n}-p\right\|>a\right)<\frac{pq}{a^2n}.$$	
4. Закон больших чисел (простейшая форма)	
Содержание	Математическая запись*
При большом количестве экспериментов относительная частота события, как правило, мало отличается от вероятности этого события.	При условиях, сформулированных в неравенстве Чебышева, $$\lim_{n\to\infty} P\left(\left\|\frac{m}{n}-p\right\|>a\right)=0.$$

Объяснение и обоснование

1. Схема Бернулли. Пусть проводятся несколько экспериментов, результатом каждого из которых может быть одно и то же событие A.

Если вероятность появления события A в каждом из экспериментов не зависит от результатов других экспериментов, то такие эксперименты называют *независимыми относительно события* A. Рассмотрим независимые эксперименты, в каждом из которых вероятность появления события A не изменяется от эксперимента к эксперименту. Обратим внимание, что вследствие независимых экспериментов всегда происходят независимые события.

Например, независимыми являются несколько экспериментов по бросанию одного и того же игрального кубика в одинаковых условиях. Пусть событие A — выпало 1 очко. Если кубик однородный и имеет правильную геометрическую форму, то в каждом из этих экспериментов вероятность p появления события A одинакова и равна $\frac{1}{6}$ $\left(p=\frac{1}{6}\right)$. Отметим, что тогда и вероятность q непоявления события A в каждом из этих экспериментов также одинакова (это вероятность появления события $\bar{A}$, поэтому $q=1-p=\frac{5}{6}$).

Некоторые практические задачи сводятся к построению математической модели проведения независимых экспериментов с двумя результатами, вероятности которых p и q не изменяются от эксперимента к эксперименту. Совокупность условий для построения такой модели называется *схемой Бернулли*.

---

* Материал является обязательным только для классов физико-математического профиля.

Пусть проводится n независимых экспериментов, в каждом из которых событие A может произойти, а может и не произойти. Вероятность того, что произойдет событие A в каждом из экспериментов одинакова и равна p, а вероятность того, что событие A не произойдет (*то есть произойдет событие* $\bar{A}$) *равна* $q = 1 - p$. Найдем вероятность $P_{m,\,n}$ того, что в n независимых экспериментах событие A произойдет точно m раз.

Искомую вероятность при указанных условиях можно вычислить по *формуле Бернулли:*

$$P_{m,\,n} = C_n^m p^m q^{n-m}.$$

Сначала рассмотрим один набор из n экспериментов, в котором событие A произойдет точно m раз в первых m экспериментах (и соответственно событие $\bar{A}$ произойдет $n - m$ раз в последних $n - m$ экспериментах):

$$\underbrace{AA\ldots A}_{m \text{ раз}}\underbrace{\bar{A}\bar{A}\ldots\bar{A}}_{n-m \text{ раз}}. \qquad (16)$$

Поскольку по условию результаты n рассмотренных экспериментов являются событиями, независимыми относительно события A, то вероятность появления такого набора событий равна произведению вероятностей соответствующих независимых событий, то есть

$$\underbrace{P(A)\cdot P(A)\cdot\ldots\cdot P(A)}_{m \text{ раз}}\cdot\underbrace{P(\bar{A})\cdot P(\bar{A})\cdot\ldots\cdot P(\bar{A})}_{n-m \text{ раз}} = \underbrace{p\cdot p\cdot\ldots\cdot p}_{m \text{ раз}}\cdot\underbrace{q\cdot q\cdot\ldots\cdot q}_{n-m \text{ раз}} = p^m q^{n-m}.$$

Если событие A произойдет точно m раз в других m экпериментах из n рассмотренных, то такой набор событий отличается от набора (16) только тем, что события A и $\bar{A}$ стоят на других местах. Количество событий останется неизменным (n событий A и $n - m$ событий $\bar{A}$), а значит, неизменной будет и вероятность появления каждого набора $p^m q^{n-m}$. Количество полученных различных наборов равно C_n^m, то есть количеству возможных выборов m экспериментов, в которых происходит событие A, из n рассмотренных экспериментов. Другими словами C_n^m (фактически равно количеству выборов m мест для буквы A из n мест в записи набора (16)). Полученные наборы событий несовместны, следовательно, вероятность всех благоприятных результатов (того, что событие A произойдет точно m раз в рассмотренных n экспериментах) равна сумме C_n^m чисел, каждое из которых равно $p^n q^{n-m}$. Тогда получаем, что

$$P_{m,\,n} = C_n^m p^m q^{n-m}.$$

Учитывая, что $C_n^m = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$, **формулу Бернулли** можно записать так:

$$P_{m,\,n} = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m q^{n-m}.$$

Задача 1 Найдите вероятность того, что при 10 бросаниях игрального кубика 1 очко выпадет точно 2 раза.

▶ Все условия схемы Бернулли выполнены. Событие A — выпало 1 очко при бросании игрального кубика. При всех бросаниях кубика вероятность выпадания 1 очка (события A) одинакова и равна $p=\frac{1}{6}$, тогда вероятность события $\bar{A}$ равна $q=1-p=\frac{5}{6}$. Кроме того, по условию $n=10$, $m=2$. Следовательно, по формуле Бернулли

$$P_{2,\,10}=C_{10}^{2}p^{2}q^{8}=C_{10}^{2}\left(\frac{1}{6}\right)^{2}\left(\frac{5}{6}\right)^{8}=\frac{10!}{2!\cdot 8!}\cdot\frac{5^{8}}{6^{10}}=\frac{10\cdot 9\cdot 5^{8}}{1\cdot 2\cdot 6^{10}}=\frac{9\cdot 5^{9}}{6^{10}}\approx 0{,}291.\ \triangleleft$$

Задача 2 Вероятность того, что расход электроэнергии в течение суток не превысит установленную норму, равна 0,75. Найдите вероятность того, что в ближайшие 6 суток расход электроэнергии за 4 суток не превысит норму.

▶ Событие A — расход электроэнергии в течение суток не превышает установленную норму. Каждые сутки вероятность события A одинакова: $p=0,75$, тогда вероятность события $\bar{A}$ (перерасход электроэнергии в течение суток) $q=1-p=0{,}25$. Следовательно, все условия схемы Бернулли выполнены. Искомая вероятность по формуле Бернулли равна

$$P_{4,\,6}=C_{6}^{4}p^{4}q^{2}=\frac{6!}{4!\cdot 2!}\cdot 0{,}75^{4}\cdot 0{,}25^{2}=\frac{6\cdot 5}{1\cdot 2}\cdot 0{,}75^{4}\cdot 0{,}25^{2}\approx 0{,}30.\ \triangleleft$$

Вычисления по формуле Бернулли при больших значениях m и n затруднены. В математике предложены приближенные формулы, позволяющие находить приближенные значения для $P_{m,\,n}$ и, что даже более важно для практики, находить суммы значений $P_{m,\,n}$, таких, что значение дроби $\frac{m}{n}$ (относительная частота события A) лежит в заданных границах.

По формуле Бернулли вероятность того, что в серии из 100 бросаний монеты все 100 раз выпадет «герб», равна $\left(\frac{1}{2}\right)^{100}$, то есть приблизительно 10^{-30}. Очень мала и вероятность того, что при 100 подбрасываниях «число» выпадет точно 10 раз (соответственно «герб» выпадет 90 раз). Наиболее вероятно, что количество выпаданий «герба» будет мало отличаться от 50.

Вообще, как отмечалось в пункте 19.1 (см. с. 259), *при большом количестве экспериментов относительная частота появления события, как правило, мало отличается от вероятности этого события*. Математическую формулировку этого качественного утверждения дает открытый Я. Бернулли *закон больших чисел*. Обоснование этого закона опирается на неравенство, открытое П. Л. Чебышёвым, которое мы без доказательства сформулируем в виде теоремы.

Теорема. ***Пусть вероятность появления события A в некотором эксперименте равна p (а вероятность не появления события A, то есть появления события $\overline{A}$, равна q = 1 − p) и пусть проводятся серии экспериментов, состоящие из n независимых повторений этого эксперимента. Через m обозначим число экспериментов, в которых происходило событие A. Тогда для любого положительного числа a выполняется неравенство***

$$P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|>a\right)<\frac{pq}{a^2n}. \qquad (17)$$

Поясним смысл этого неравенства. Выражение $\frac{m}{n}$ равно относительной частоте события A в серии экспериментов, а $\left|\frac{m}{n}-p\right|$ — отклонению этой относительной частоты от теоретического значения p. Неравенство $\left|\frac{m}{n}-p\right|>a$ означает, что отклонение оказалось больше, чем a. Но при постоянном значении a с ростом n правая часть неравенства (17) стремится к нулю. Иными словами, серии, в которых отклонение экспериментальной частоты от теоретической велико, составляют малую часть всех возможных серий экспериментов. Из неравенства Чебышёва следует утверждение, полученное Я. Бернулли, которое является простейшей формой *закона больших чисел*: *по условию теоремы при любом значении a* > 0 имеем

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|>a\right)=0. \qquad (18)$$

Для доказательства этого утверждения достаточно заметить, что $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{pq}{a^2n}=0.$

Отметим, что *по условию теоремы при любом значении* ε > 0 равенство (18) эквивалентно следующему равенству:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|<\varepsilon\right)=1,$$

которое и означает, что *при увеличении числа экспериментов n частота* $\frac{m}{n}$ *появления события A приближается к вероятности появления события A в отдельном эксперименте.*

Замечание. Под законом больших чисел обычно понимают не только приведенную формулировку, но и ряд других теорем, обосновывающих отмеченную закономерность для применения математики в естествознании. Эта закономерность состоит в том, что совместное действие многих случайных факторов часто приводит к результатам, почти не зависящим от этих случайных факторов.

Задача 3* Какое количество экспериментов достаточно провести, чтобы равенство $p \approx \frac{m}{n}$ с точностью до 0,1 получить с вероятностью 0,9?

▶ Для решения достаточно найти такое n (см. неравенство (17)), чтобы было выполнено неравенство $\frac{pq}{0{,}1^2 n} < 0{,}1.$ Учитывая, что $q = 1 - p$, можно записать

$$pq = p(1-p) = p - p^2 = \frac{1}{4} - \left(p - \frac{1}{2}\right)^2 \leqslant \frac{1}{4}$$

и поэтому достаточно указать n, удовлетворяющее неравенству $\frac{1}{4 \cdot 0{,}1^2 n} < 0{,}1.$ Отсюда $n \geqslant 250$.

Как видим, получение вероятности события, даже с такой незначительной точностью, требует большого количества экспериментов. Правда, более глубокие теоремы показывают, что можно ограничиться меньшим числом экспериментов. ◁

Вопросы для контроля

1. Объясните, какие эксперименты называются независимыми относительно события A. Приведите примеры таких экспериментов.
2. Запишите формулу Бернулли. Объясните, в каких условиях ее можно применять.
3. Объясните смысл простейшей формы закона больших чисел.
4*. а) Запишите неравенство Чебышева. Объясните его смысл.
   б) Пользуясь неравенством Чебышева, обоснуйте простейшую форму закона больших чисел.

Упражнения

1°. Найдите вероятность того, что при 10 бросаниях игрального кубика пять очков выпадут ровно: 1) три раза; 2) один раз.

2. Найдите вероятность того, что при 10 бросаниях игрального кубика одно очко выпадет не более трех раз.

3. Найдите вероятность того, что при 6 бросаниях игрального кубика число очков, кратное 3, выпадет ровно: 1) два раза; 2) пять раз.

4. Что вероятнее выиграть у равного противника (ничейный результат не учитывается):
1) три партии из четырех или пять из восьми;
2*) не меньше трех партий из четырех или не меньше пяти партий из восьми?

5°. В мастерской работают 6 моторов. Для каждого мотора вероятность перегрева до обеденного перерыва равна 0,8. Найдите вероятность того, что до обеденного перерыва:
1) перегреются ровно 4 мотора; 2) перегреются все моторы;
3) ни один мотор не перегреется.

6. Вероятность появления события A в эксперименте равна 0,3. Эксперимент повторили независимым образом 5 раз. Найдите вероятность того, что событие A появится не меньше двух раз.

7*. Сколько достаточно провести экспериментов, чтобы равенство $p \approx \frac{m}{n}$ с точностью до 0,01 получить с вероятностью 0,95?

8*. Какова вероятность того, что равенство $p \approx \frac{m}{n}$ выполняется с точностью до 0,1 при проведении 100 экспериментов?

19.8. Понятия случайной величины и ее распределения

Под *случайной величиной* в теории вероятностей понимают переменную величину, которая в данном случайном эксперименте может принимать те или иные числовые значения с определенной вероятностью. Обозначают случайные величины прописными буквами латинского алфавита: X, Y, Z, ..., а их значения — соответствующими строчными буквами: x, y, z, ... Тот факт, что случайная величина X приняла значение x, записывают так: $X = x$.

Например, в пункте 19.3 (с. 279) были найдены вероятности появления той или иной суммы очков при бросании двух игральных кубиков. Появляющаяся сумма очков — случайная величина. Обозначим ее через X. Тогда $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, ..., $x_{10} = 11$, $x_{11} = 12$ — значения случайной величины X. Значения случайной величины X и соответствующая вероятность ее появления (p_1, p_2, ..., p_{10}, p_{11}*) приведены в таблице:

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{36}$

С помощью этой таблицы легко увидеть, какие значения величина X принимает с одинаковыми вероятностями, какое значение величины X появляется с большей вероятностью и т. д. Такую таблицу называют *таблицей распределения значений случайной величины по их вероятностям* и говорят, что эта таблица задает *закон распределения* рассмотренной *случайной величины*.

Приведем определение рассмотренных понятий. Отметим, что случайную величину можно задать в любом случайном эксперименте. Для этого достаточно каждому элементарному событию из пространства элементарных событий эксперимента поставить в соответствие некоторое число (в этом случае говорят, что задана числовая функция, областью определения которой является пространство элементарных событий).

***Случайной величиной* называется числовая функция, областью определения которой является пространство элементарных событий.**

* Таким образом, через p_i обозначена вероятность события — случайная величина X приняла значение x_i. Это можно записать так: $P(X = x_i) = p_i$ (где $i = 1, 2, ..., 11$).

Например, в эксперименте по подбрасыванию монеты пространство элементарных событий состоит из двух событий: u_1 — выпал «герб», u_2 — выпало «число». Эти события несовместны, и в результате эксперимента обязательно произойдет только одно из этих событий. Поставим в соответствие событию u_1 число 1, а событию u_2 — число 0 (то есть будем считать, что в случае появления «герба» выпадает число 1, а в случае появления «числа» выпадает 0). Тогда получим случайную величину X, которая принимает только два значения: $x_1 = 1$, $x_2 = 0$ (то есть $X(u_1) = x_1 = 1$, $X(u_2) = x_2 = 0$). Рассмотренную функцию — случайную величину X — можно задать также с помощью следующей таблицы:

Результат эксперимента	u_1 — выпал «герб»	u_2 — выпало «число»
Значение X	1	0

Закон распределения этой случайной величины задается таблицей:

X	1	0
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Отметим, что закон распределения каждой случайной величины устанавливает соответствие между значениями случайной величины и их вероятностями, то есть является функцией, область определения которой — все значения случайной величины. Поэтому

законом распределения случайной величины X **называется функция, которая каждому значению** x **случайной величины** X **ставит в соответствие число** $P(X = x)$ **(вероятность события, состоящего в том, что случайная величина** X **приняла значение** x**).**

В общем случае закон распределения случайной величины, принимающей только n значений, можно записать в виде таблицы:

X	x_1	x_2	...	x_n
P	p_1	p_2	...	p_n

Здесь $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — разные значения случайной величины X, а $p_i = P(X = x_i)$ (где $i = 1, 2, \ldots, n$) — вероятности, с которыми X принимает эти значения.

События $(X = x_1)$, $(X = x_2)$, ..., $(X = x_n)$ попарно несовместны, и их сумма является достоверным событием. Поэтому сумма вероятностей этих событий равна 1, следовательно,

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1.$$

Это равенство часто используют для проверки правильности задания закона распределения случайной величины, особенно в тех случаях, когда он задается не в результате теоретического расчета вероятностей событий с использованием классического определение вероятности, а в результате использования статистического определения вероятности.

Например, в экспериментах по подбрасыванию кнопки, рассмотренных в пункте 19.1, падение кнопки на острие или на кружок может быть рассмотрено как случайная величина Y с условными значениями $y_1 = 1$ (падение на острие) и $y_2 = 0$ (падение на кружок). Результаты серии экспериментов с некоторой кнопкой представлены в таблице, задающей закон распределения случайной величины.

Y	1	0
P	0,45	0,55

(проверка: $0,45 + 0,55 = 1$)

З а м е ч а н и е. В том случае, когда приходится находить сумму всех значений некоторой величины, можно использовать знак $\sum$ (сигма, читается: «Сумма»), введенный Л. Эйлером (1707 – 1783). Например, если вероятность P принимает значения $P_1, P_2, \ldots, P_k$, то введем обозначение*:

$$P_1 + P_2 + \ldots + P_k = \Sigma P.$$

Используя это обозначение, проверку правильности составления последней таблицы можно записать следующим образом: $\Sigma P = 0,45 + 0,55 = 1$.

Рассмотренные в этом пункте случайные величины принимали изолированные друг от друга значения. Такие величины называют *дискретными*** (от латинского *discretus* — раздельный, прерывистый), а распределение вероятностей такой величины называется *дискретным распределением вероятностей*.

Если случайная величина может принимать любое значение на некотором промежутке, то такая величина называется *непрерывной*. Например, время T ожидания автобуса на остановке является непрерывной случайной величиной в случае, если пассажир знает, что автобусы ходят через 10 мин, и приходит на остановку случайным образом. Эта случайная величина принимает любое числовое значение $T \in [0; 10]$.

Очевидно, что число значений непрерывной случайной величины бесконечно независимо от того, является ли промежуток значений ограниченным (отрезком) или неограниченным. Поэтому мы не можем для этой величины задать закон распределения так, как мы его задавали для дискретной случайной величины (с помощью таблицы, устанавливающей соответствие между каждым значением случайной величины и его вероятностью). Однако существует способ, с помощью которого можно задать распределение и непрерывной случайной величины***. Для этого промежуток значений заданной непрерывной величины разбивают на части и считают вероятности попадания значений случайной величины в каждую из них.

---

* Точнее указанная сумма записывается так: $P_1 + P_2 + \ldots + P_k = \sum_{i=1}^{k} P_i$.

** Случайная величина называется дискретной, если множество ее значений конечно или счётно (счётность означает, что мы можем установить взаимно однозначное соответствие между элементами заданного множества и натуральными числами, то есть можем указать, как можно пронумеровать все элементы множества).

*** Отметим, что в том случае, когда функция распределения непрерывной случайной величины является непрерывной, такое распределение вероятностей случайной величины называют непрерывным распределением вероятностей.

Например, пусть время горения X (в часах) электрической лампочки некоторого вида — $X \in [0; 1000]$. Промежуток $[0; 1000]$ разделили на 5 одинаковых по длине частей и по результатам горения каждой из 100 экспериментальных лампочек составили следующую таблицу распределения случайной величины:

X	$[0; 200)$	$[200; 400)$	$[400; 600)$	$[600; 800)$	$[800; 1000]$
P	0,01	0,03	0,1	0,18	0,68

(проверка: $\Sigma P = 0{,}01 + 0{,}03 + 0{,}1 + 0{,}18 + 0{,}68 = 1$)

В последнем примере для вычисления вероятностей принятия случайной величиной определенных значений было использовано статистическое определение вероятности (вероятности были оценены по результатам 100 экспериментов, в которых лампочки горели непрерывно до перегорания нити накаливания). В таких случаях удобно пользоваться расширенной таблицей распределения случайной величины, включая в нее *распределения рассмотренной величины по частотам и относительным частотам*. Тогда получим следующую таблицу распределений случайной величины X:

X	$[0; 200)$	$[200; 400)$	$[400; 600)$	$[600; 800)$	$[800; 1000]$
Частота $M = n\ (x)$	1	3	10	18	68
Относительная частота $W = \frac{n(X)}{n}$	0,01	0,03	0,1	0,18	0,68
P	0,01	0,03	0,1	0,18	0,68

Учитывая, что по закону больших чисел при значительном количестве экспериментов значения относительных частот близки к соответствующим вероятностям (в последней таблице значения в третьей и четвертой строке просто совпадают), строку со значениями вероятностей не вносят в таблицу распределения, а вместо нее иногда записывают строку со значениями относительной частоты, выраженной в процентах. Тогда соответствующая таблица распределения значений случайной величины X будет следующей:

X	$[0; 200)$	$[200; 400)$	$[400; 600)$	$[600; 800)$	$[800; 1000]$
Частота $M = n\ (x)$	1	3	10	18	68
Относительная частота $W = \frac{n(X)}{n}$	0,01	0,03	0,1	0,18	0,68
Относительная частота (в %)	1	3	10	18	68

Для проверки правильности заполнения такой таблицы используют то, что сумма относительных частот (как и сумма соответствующих вероятностей) равна 1 ($\Sigma W = 1$, или в процентах ($\Sigma W = 100\ \%$), а сумма частот должна равняться количеству экспериментов n ($\Sigma M = n$).

Рассмотрим составление такой таблицы по результатам экспериментов.

Пример Результаты измерения роста 30 гимнасток одного спортивного клуба внесены в следующую таблицу:

148	148	148	149	149	149	149	150	150	151
151	151	151	151	151	151	151	152	152	152
152	152	153	153	153	153	153	153	154	154

По этим данным составьте таблицу распределения значений случайной величины X — роста гимнасток клуба — по частотам (M) и относительным частотам (W).

Решение

Величина X принимает значения:

$$x_1 = 148,\ x_2 = 149,\ x_3 = 150,\ x_4 = 151,\ x_5 = 152,\ x_6 = 153,\ x_7 = 154.$$

Подсчитываем число M гимнасток каждого роста, заносим данные в частотную таблицу, а затем для каждого значения X находим значения относительной частоты W, зная, что $n = 30$. Получаем таблицу распределения значений случайной величины X:

X	148	149	150	151	152	153	154
M	3	4	2	8	5	6	2
$W = \frac{M}{n}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{15}$

(проверка: $\Sigma M = 3 + 4 + 2 + 8 + 5 + 6 + 2 = 30 = n$;

$$\sum W = \frac{1}{10} + \frac{2}{15} + \frac{1}{15} + \frac{4}{15} + \frac{1}{6} + \frac{1}{5} + \frac{1}{15} = \frac{30}{30} = 1\Big) \ \triangleleft$$

Вопросы для контроля

1. а) Объясните, что такое случайная величина для данного случайного эксперимента. Приведите примеры. б*) Дайте определение случайной величины. Пользуясь определением, задайте какую-то случайную величину для эксперимента по подбрасыванию двух монет.
2. Объясните, что такое закон распределения случайной величины. Приведите примеры.
3. Закон распределения случайной величины, принимающей только n значений, задан в виде таблицы. Как можно проверить правильность заполнения строки со значениями вероятностей в этой таблице?

4. Объясните, в чем состоит отличие между дискретной и непрерывной случайными величинами. Приведите примеры таких величин.
5. Объясните, как можно задать распределение непрерывной случайной величины.

Упражнения

1°. Составьте таблицу распределения по вероятностям P случайной величины X — числа очков, выпадающих при бросании игрального кубика.

2. Есть 3 игральных кубика, на гранях которых отмечены только одно или два очка: у кубика A одно очко встречается на гранях один раз, у кубика B — 2 раза, а у кубика C — 3 раза (рис. 147). Случайные величины X, $У$ и Z — число очков, выпавших соответственно на каждом из кубиков A, B и C. Задайте законы распределения случайных величин X, $У$ и Z с помощью соответствующих таблиц.

3. Подбрасывают две монеты. Результату «герб» припишем условное числовое значение 0, а результату «число» — 1. Составьте таблицу распределения по вероятностям P значений случайной величины X — суммы чисел, выпавших на монетах.

4*. Трижды подбрасывают монету. Случайная величина X — число выпаданий «герба». Задайте закон распределения случайной величины X с помощью таблицы. (Указание. Для вычисления соответствующих вероятностей используйте формулу Бернулли.)

5. В таблице приведены размеры обуви 20 девочек 11 класса:

34	35	35	35	36	36	36	36	37	37
37	37	37	37	38	38	38	39	39	40

По этим данными составьте таблицу распределения значений случайной величины X — размер обуви девочек 11 класса — по частотам (M) и по относительным частотами (W).

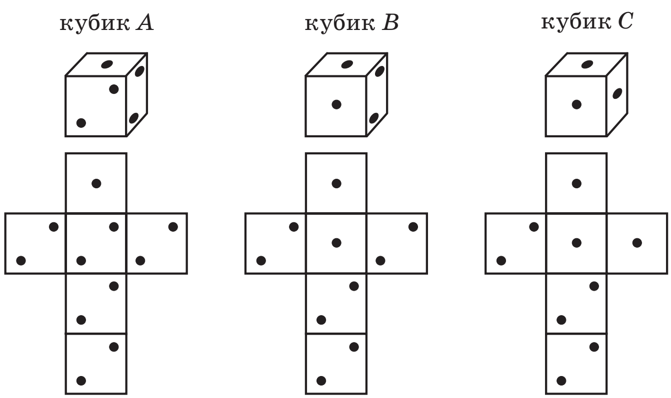


Рис. 147

6. В таблице приведены размеры одежды 50 учащихся 11 класса:

44	42	40	46	48	44	42	50	44	52
48	50	44	52	54	50	48	52	48	50
46	50	48	52	50	44	48	46	48	50
46	46	50	48	50	46	48	52	50	48
50	52	48	46	52	52	46	48	50	52

По этим данными составьте таблицу распределения значений случайной величины X — размер одежды учащихся 11 класса — по частотам (M) и по относительным частотами (W).

19. 9. Полигоны и гистограммы частот

1. Понятие полигона частот. Распределение случайных величин можно задавать и иллюстрировать графически.

Пусть случайная величина X — размер обуви 30 мальчиков 11 класса одной из школ — имеет распределение по частотам, данное в таблице:

X	38	39	40	41	42	43	44	45	
M	2	2	5	7	6	4	3	1	$n = \Sigma M = 30$

Отметим на координатной плоскости точки с координатами $(x_1;\ m_1)$, $(x_2;\ m_2)$, ..., $(x_8;\ m_8)$ и соединим их последовательно отрезками (рис. 148). Полученную ломаную линию называют *полигоном частот*.

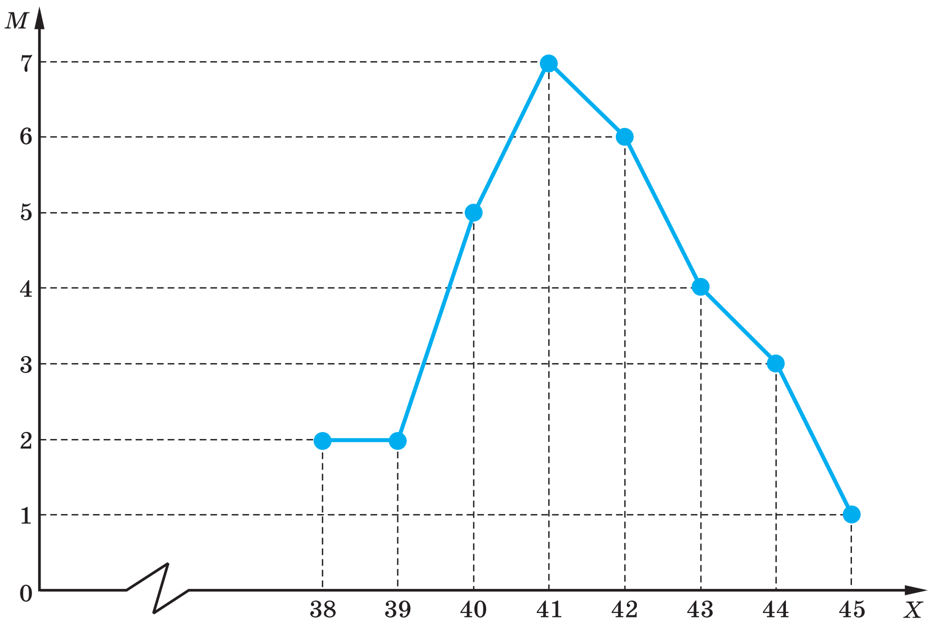


Рис. 148

То есть

***полигоном частот* называют ломаную, отрезки которой последовательно соединяют точки с координатами $(x_1; m_1)$, $(x_2; m_2)$, ..., $(x_k; m_k)$, где x_i — значения случайной величины, а m_i — соответствующие им частоты.**

Аналогично определяется и строится *полигон относительных частот* для случайной величины X (строятся точки с координатами $(x_1; w_1)$, $(x_2; w_2)$, ..., $(x_k; w_k)$, где x_i — значения случайной величины, а w_i — соответствующие им относительные частоты.

Если вычислить относительные частоты для каждого значения случайной величины, рассмотренной в примере в начале этого пункта, то распределение величины X по относительным частотам можно задать таблицей:

X	38	39	40	41	42	43	44	45	
W	$\frac{1}{15} \approx 0{,}07$	$\frac{1}{15} \approx 0{,}07$	$\frac{1}{6} \approx 0{,}17$	$\frac{7}{30} \approx 0{,}23$	$\frac{1}{5} = 0{,}2$	$\frac{2}{15} \approx 0{,}13$	$\frac{1}{10} = 0{,}1$	$\frac{1}{30} \approx 0{,}03$	$\Sigma W = 1$

Также распределение случайной величины X по относительным частотам можно представить в виде полигона относительных частот (рис. 149), в виде линейной диаграммы (рис. 150) или в виде круговой диаграммы, предварительно записав значения относительной частоты в процентах (рис. 151).

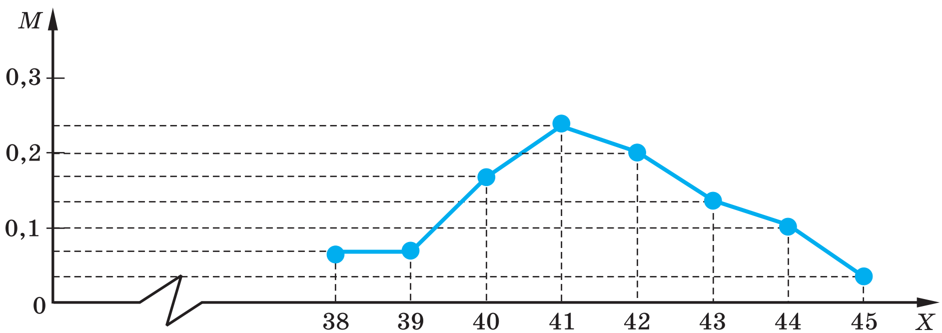


Рис. 149

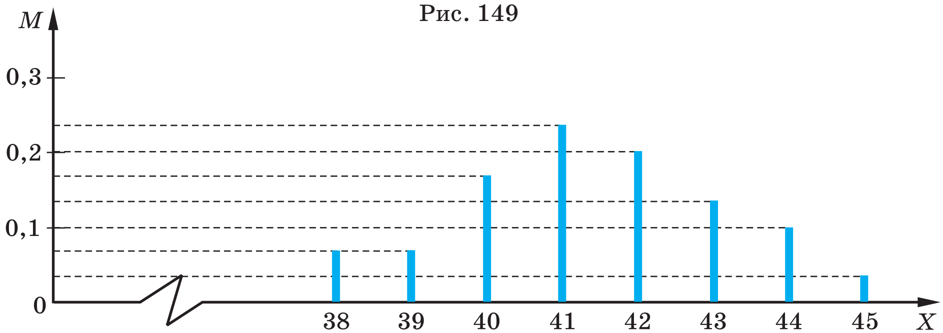


Рис. 150

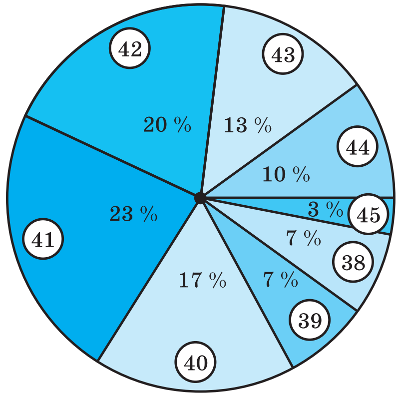


Рис. 151

Напомним, что для построения круговой диаграммы круг разбивается на секторы, центральные углы которых пропорциональны относительным частотам, вычисленным для каждого значения случайной величины. Обратим внимание, что круговая диаграмма сохраняет свою наглядность и выразительность только при небольшом количестве полученных секторов. В противном случае ее применение малоэффективно.

Если случайная величина принимает много разных значений, то ее распределение можно лучше себе представить после разбиения всех ее значений на классы (аналогично тому, как мы разбивали значения непрерывной случайной величины в пункте 19.8 на с. 306). Количество классов может быть любым, удобным для исследования (обычно их выбирают в количестве от 4 до 12). При этом величины (объемы) классов должны быть одинаковыми.

Например, в следующей таблице представлены сведения о заработной плате 100 рабочих одного предприятия. При этом значения зарплаты (округлены до целого числа гривен) сгруппированы в 7 классов, каждый объемом в 100 грн.

Классы	От 400 до 500	От 500 до 600	От 600 до 700	От 700 до 800	От 800 до 900	От 900 до 1000	От 1000 до 1100
Номер класса X	1	2	3	4	5	6	7
Частота (количество рабочих) M	4	6	18	36	22	10	4

(проверка: $\Sigma M = 100$)

Наглядно частотное распределение зарплат по классам можно представить с помощью полигона частот (рис. 152) или столбчатой диаграммы (рис. 153).

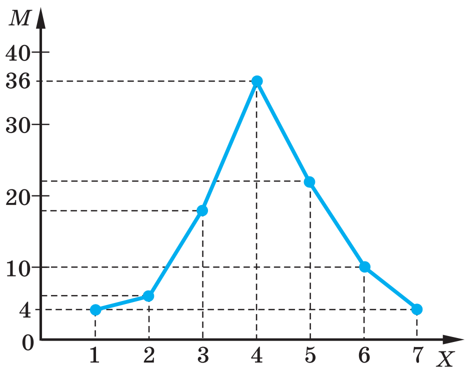


Рис. 152

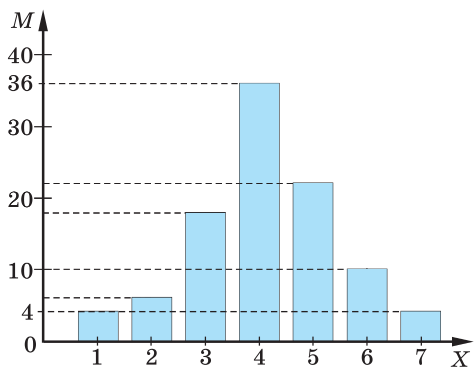


Рис. 153

Обратим внимание, что во всех приведенных выше примерах полигоны частот строились для дискретных случайных величин.

2. Понятие гистограммы частот. Распределение значений непрерывной случайной величины также можно представлять графически. Для этого промежуток значений заданной непрерывной величины разбивают на несколько равных частей и считают частоты попадания значений случайной величины в каждую из этих частей.

Вернемся к таблице частот, рассмотренной в пункте 19.8 (с. 306). Напомним, что случайная величина X — время горения (в часах) электрической лампочки некоторого вида (до перегорання нити накаливания).

X	[0; 200)	[200; 400)	[400; 600)	[600; 800)	[800; 1000]
M	1	3	10	18	68

$\Sigma M = n = 100$

Данные из этой таблицы можно представить с помощью так называемой *гистограммы частот* — ступенчатой фигуры (рис. 154).

Если основанием каждого столбца служит промежуток значений случайной величины длиной h, то высоту столбца берут равной $\frac{M}{h}$ (это отношение называется *плотностью частоты* на рассмотренном промежутке), где M — частота значений величины X на соответствующем промежутке. Тогда площадь такого столбца будет равняться $\frac{M}{h} \cdot h = M$, а площадь фигуры под гистограммой равна

$$\Sigma M = n.$$

З а м е ч а н и е. Если договориться, что единица на горизонтальной оси соответствует величине h (в нашем примере $h = 200$ ч), а единица на вертикальной оси — частоте, равной 1, то построенная на рисунке 154 гистограмма удовлетворяет приведенным требованиям.

Если по данным предыдущей таблицы заполнить таблицу относительных частот, то построенную на ее основании ступенчатую фигуру называют *гистограммой относительных частот* (рис. 155).

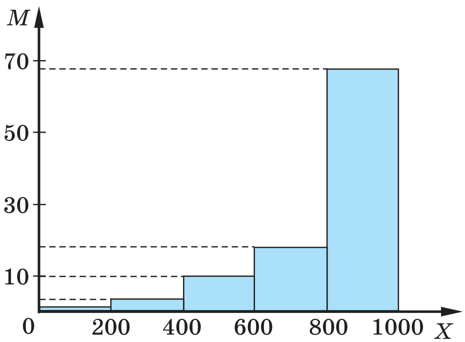


Рис. 154

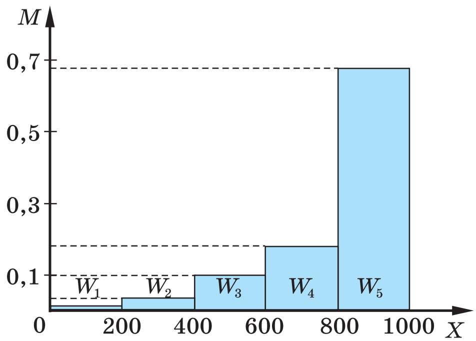


Рис. 155

X	[0; 200)	[200; 400)	[400; 600)	[600; 800)	[800; 1000]
W	0,01	0,03	0,1	0,18	0,68

$\Sigma W = 1$

Гистограмму относительных частот строят обычно таким образом, чтобы площадь каждого столбца под ступенькой равнялась соответствующему значению W. Это делается аналогично построению гистограммы частот. Если основанием каждого столбца служит промежуток значений случайной величины длиной h, то высоту столбца берут равной $\frac{W}{h}$ (это отношение называется *плотностью относительной частоты* на рассмотренном промежутке), где W — относительная частота значений величины X на соответствующем промежутке. Тогда площадь такого столбца будет равняться $\frac{W}{h} \cdot h = W$, а площадь фигуры под гистограммой равна единице ($\Sigma W = 1$).

З а м е ч а н и е. Если договориться, что единица на горизонтальной оси соответствует величине h (в нашем примере $h = 200$ ч), а единица на вертикальной оси — относительной частоте, равной 1, то построенная на рисунке 157 гистограмма удовлетворяет приведенным требованиям.

Если не придерживаться договоренностей, приведенных в замечаниях, то для построения гистограммы необходимо найти плотность соответствующей частоты на каждом из рассмотренных промежутков. После этого на вертикальной оси откладывают уже не значения частоты или относительной частоты, а полученные значения плотности. (Обратим внимание, что длины промежутков разбиения мы выбираем одинаковыми, поэтому все полученные значения плотности будут пропорциональны значениям соответствующих частот на этом промежутке.)

Подчеркнем также различие между гистограммой и столбчатой диаграммой. В столбчатой диаграмме основания прямоугольников выбираются произвольно, а в гистограмме основания прямоугольников — это длины h выбранных интервалов. Внешним признаком отличия столбчатой диаграммы от гистограммы является также то, что столбчатая диаграмма состоит из отдельных столбиков, а гистограмма — из соединенных между собой прямоугольников.

Следует отметить, что многие дискретные случайные величины, которыми мы пользуемся и которые связанные со временем, с ростом живых организмов (людей, растений и т. д.), являются средними значениями промежутков значений непрерывных случайных величин.

Например, размер одежды является не чем иным, как средним значением половины обхвата грудной клетки (V см) (величина V — непрерывна), попадающих в определенные интервалы (рис. 156).

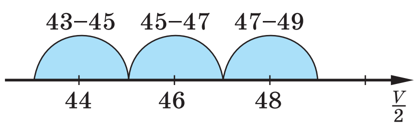


Рис. 156

Вопросы для контроля

1. Объясните, что называют полигоном частот дискретной случайной величины. Приведите примеры построения полигона частот и полигона относительных частот.
2. Объясните, что называют гистограммой частот непрерывной случайной величины. Приведите примеры построения гистограммы частот и гистограммы относительных частот.

Упражнения

1°. На основании данных таблицы представьте в виде столбчатой и круговой диаграмм распределение значений случайной величины X.

1)

X	1	2	3	4
W	0,1	0,3	0,4	0,2

2)

X	1	2	3	4	5
W	0,3	0,3	0,2	0,1	0,1

2. Постройте полигон частот и полигон относительных частот значений случайной величины X, распределение которой представлено в таблице:

1)

X	1	3	5	7	9
M	3	0	5	7	5

2)

X	11	12	13	14	15	16
M	6	5	2	3	1	3

3°. На рисунке 157 построены полигоны, иллюстрирующие распределение частоты продажи магазином в течение недели компьютеров (черная линия) и телевизоров (синяя линия). Укажите два дня, непосредственно следующие друг за другом, когда:

1) число проданных телевизоров выросло больше, чем число проданных компьютеров;
2) число проданных телевизоров увеличилось, а число проданных компьютеров уменьшилось;
3) число проданных компьютеров выросло, а число проданных телевизоров осталось тем же.

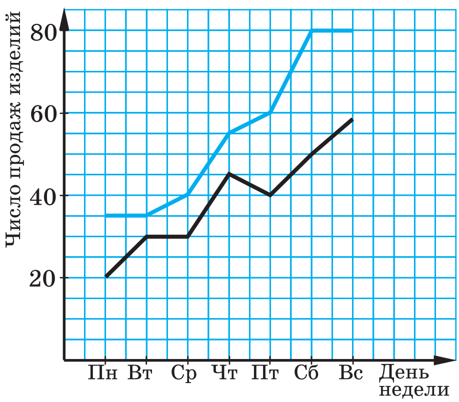


Рис. 157

4. Измерили рост 50 старшеклассников и результаты записали в таблицу:

149	150	150	151	151	152	152	153	154	154
155	155	155	156	156	157	157	157	158	158
159	159	159	159	161	161	161	162	162	162
162	162	165	166	166	166	167	167	169	170
171	171	173	173	173	175	176	178	180	182

Сгруппировав эти данные по классам 145–149, 150–154, 155–159, 160–164, 165–169, 170–174, 175–179, 180–184, представьте частотное распределение роста учащихся по этим классам с помощью:

1) таблицы; 2) полигона частот; 3) столбчатой диаграммы; 4) гистограммы.

5°. На гистограмме (рис. 158) приведены данные о распределении возраста рабочих цеха по группам. Пользуясь гистограммой, найдите:

1) число рабочих цеха в возрасте от 18 до 23 лет;

2) возрастную группу, в которую входит наибольшее количество рабочих;

3) общее количество рабочих цеха.

6. Наблюдая за работой бригады токарей, установили время, затрачиваемое токарями на обработку одной детали. Анализируя полученные данные, составили таблицу:

X — время (мин)	10–12	12–14	14–16	16–18	18–20
M — количество токарей	2	6	11	7	5

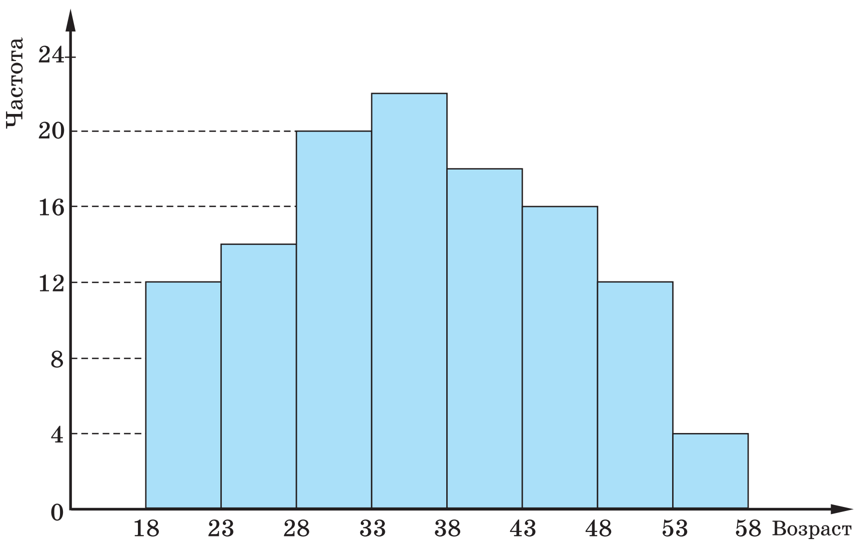


Рис. 158

Пользуясь таблицей, постройте:

1) гистограмму частот значений случайной величины X — времени изготовления одной детали;
2) преобразуйте гистограмму в полигон, заменяя каждый интервал числом, являющимся его серединой (то есть выбирая среднюю точку из рассмотренного интервала как абсциссу соответствующей точки полигона);
3) гистограмму относительных частот значений случайной величины X;
4) преобразуйте гистограмму в полигон, заменяя каждый интервал числом, являющимся его серединой.

§20 ВВЕДЕНИЕ В СТАТИСТИКУ

20.1. Понятие о статистике. Генеральная совокупность и выборка

1. Понятие о статистике. «Статистика знает все», — утверждали И. Ильф и Е. Петров в своем знаменитом романе «Двенадцать стульев» и продолжали: «Известно, сколько какой пищи съедает в год средний гражданин республики… Известно, сколько в стране охотников, балерин, станков, собак всех пород, велосипедов, памятников, девушек, маяков и швейных машинок… Как много жизни, полной пыла, страстей и мысли, глядит на нас из статистических таблиц!»

Это ироничное описание дает достаточно точное представление о *статистике* (от латинского *status* — состояние) — *науке, изучающей, обрабатывающей и анализирующей количественные данные о разнообразнейших массовых явлениях в жизни*. Экономическая статистика изучает изменение цен, спроса и предложения товаров, прогнозирует рост и падение производства и потребления. Медицинская статистика изучает эффективность разных лекарств и методов лечения, вероятность возникновения некоторых заболеваний в зависимости от возраста, пола, наследственности, условий жизни, вредных привычек, прогнозирует распространение эпидемий. Демографическая статистика изучает рождаемость, численность населения, его состав (возрастной, национальный, профессиональный). А есть еще статистика финансовая, налоговая, биологическая, метеорологическая…

Статистика имеет многовековую историю. Уже в Древнем мире вели статистический учет населения. Однако случайное толкование статистических данных, отсутствие строгой научной базы статистических прогнозов даже в середине XIX в. еще не позволяли говорить о статистике как науке. Только в XX в. появилась математическая статистика — наука, опирающаяся на законы теории вероятностей. Выяснилось, что статистические медоды обработки данных из самых разных областей жизни имеют много общего. Это позволило создать универсальные научно обоснованные медоды статистических исследований и проверки статистических гипотез. Таким образом,

***математическая статистика* — это раздел математики, изучающий математические медоды обработки и использования статистических данных для научных и практических выводов.**

В математической статистике рассматриваются методы, которые дают возможность по результатам экспериментов (статистическим данным) делать определенные выводы вероятностного характера.

Среди основных задач математической статистики можно отметить следующие.

1. **Оценка вероятности**. Пусть некоторое случайное событие имеет вероятность $p > 0$, но ее значение нам неизвестно. Требуется оценить эту вероятность по результатам экспериментов, то есть решить задачу об оценке вероятности через частоту.
2. **Оценка закона распределения.** Исследуется некоторая случайная величина, точное выражение для закона распределения которой нам неизвестно. Необходимо по результатам экспериментов найти приближенное выражение для функции, задающей закон распределения.
3. **Оценка числовых характеристик случайной величины** (математического ожидания, дисперсии — см. п. 20.2 и 20.3).
4. **Проверка статистических гипотез** (предположений). Исследуется некоторая случайная величина. Исходя из определенных рассуждений, выдвигается, например, гипотеза, что распределение этой случайной величины близко к нормальному (см. п. 20.4). Необходимо по результатам экспериментов принять или отклонить эту гипотезу.

Результаты исследований, проводимых методами математической статистики, применяются для принятия решений. В частности, при планировании и организации производства, при контроле качества продукции, при выборе оптимального времени наладки или замены действующей аппаратуры (например, при определении времени замены двигателя самолета, отдельных частей станков и т. д.).

Как и в каждой науке, в статистике используются свои специфические термины и понятия. Некоторые из них приведены в таблице 33 на с. 318. Запоминать их определения необязательно, достаточно понимать их смысл.

2. Генеральная совокупность и выборка. Для изучения различных массовых явлений проводятся специальные статистические исследования. Любое статистическое исследование начинается с целенаправленного сбора информации об изучаемом явлении или процессе. Этот этап называют *этапом статистических наблюдений*. Для получения статистических данных в результате наблюдений похожие элементы некоторой совокупности сравнивают по разным признакам. Как мы уже видели в задачах предыдущего параграфа, учащихся 11 классов можно сравнивать, например, по росту, размеру одежды, успеваимости и т. д. Болты можно сравнивать по длине, диаметру, массе, материалу и т. д. Практически любой признак или

Таблица 33

Часто употребляемый термин	Смысл термина	Научный термин	Определение
Общий ряд данных	То, откуда выбирают	**Генеральная совокупность**	*Множество всех возможных результатов наблюдения (измерения)*
Выборка	То, что выбирают	**Статистическая выборка, статистический ряд**	*Множество результатов, реально полученных в данном наблюдении (измерении)*
Варианта	Значение одного из результатов наблюдения (измерения)	**Варианта**	*Одно из значений элементов выборки*
Ряд данных	Значения всех результатов наблюдения (измерения)	**Вариационный ряд**	*Упорядоченное множество всех вариант*

непосредственно измеряется, или может получить условную числовую характеристику (см. пример с выпаданием «герба» или «числа» при подбрасывании монеты на с. 304). Таким образом, некоторый признак элементов совокупности можно рассматривать как случайную величину, принимающую те или иные числовые значения.

При изучении реальных явлений часто бывает невозможно обследовать все элементы совокупности. Например, практически невозможно выяснить размеры обуви у всех людей планеты. А проверить, например, наличие листов некачественной фотобумаги в большой партии хотя и реально, но бессмысленно, потому что полная проверка приведет к уничтожению всей партии бумаги. В подобных случаях вместо изучения всех элементов совокупности, называемой *генеральной совокупностью,* обследуют ее значительную часть, выбранную случайным образом. Эту часть называют *выборкой.*

Если в выборке присутствуют все значения случайной величины в тех же пропорциях, что и в генеральной совокупности, то эту выборку называют *репрезентативной* (от французского *représentatif* — показательный).

Например, если менеджер швейной фабрики большого города хочет выяснить, в каком количестве необходимо сшить одежду тех или иных размеров, он должен составить репрезентативную выборку людей этого города. Объем ее может быть и не очень большим (например, 1000 человек), но в такую выборку нельзя, например, брать только детей детского сада или только рабочих одного завода. Очевидно, микромоделью города может служить совокупность жителей многоквартирного дома (или нескольких домов), в котором приблизительно в тех же пропорциях, что и в самом городе, проживают люди разного возраста и разных комплекций.

Пусть S — объем генеральной совокупности, n — объем репрезентативной выборки, в которой k значений исследуемых признаков распределены по частотам $M_1, M_2, \ldots, M_k$, где $\Sigma M = n$. Тогда в генеральной совокупности частотам $M_1, M_2, \ldots, M_k$ будут соответствовать частоты $s_1, s_2, \ldots, s_k$ тех же значений признака, что и в выборке ($\Sigma s = S$). По определению репрезентативной выборки получаем:

$$\frac{M_i}{n} = W_i = \frac{s_i}{S}$$

где i — порядковый номер значения признака ($1 \leqslant i \leqslant k$). Из этого соотношения находим

$$s_i = SW_i \left(\text{или } s_i = S\frac{M_i}{n}\right), \text{ где } 1 \leqslant i \leqslant k. \qquad (1)$$

Пример Обувной цех должен выпустить 1000 пар кроссовок молодежного фасона. Для определения того, сколько кроссовок и какого размера необходимо выпустить, были выявлены размеры обуви у 50 случайным образом выбранных подростков. Распределение размеров обуви по частотам представлено в таблице:

Размер (X)	36	37	38	39	40	41	42	43	44
Частота (M)	2	5	6	12	11	7	4	2	1

$\Sigma M = n = 50$

Сколько кроссовок разного размера будет изготавливать фабрика?

Решение

Будем считать рассмотренную выборку объемом $n = 50$ подростков репрезентативной. Тогда в генеральной совокупности (объемом $S = 1000$) количество кроссовок каждого размера пропорционально количеству кроссовок соответствующего размера в выборке (и для каждого размера находится по формуле (1)). Результаты расчетов будем записывать в таблицу:

Размер (X)	36	37	38	39	40	41	42	43	44	
Частота (M)	2	5	6	12	11	7	4	2	1	$\Sigma M = n = 50$
Относительная частота (W)	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{25}$	$\frac{6}{25}$	$\frac{11}{50}$	$\frac{7}{50}$	$\frac{2}{25}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{50}$	$\Sigma W = 1$
Количество кроссовок (SW)	40	100	120	240	220	140	80	40	20	$\Sigma(SW) = S = 1000$

Ответ.

Размер	36	37	38	39	40	41	42	43	44
Количество кроссовок	40	100	120	240	220	140	80	40	20

◁

В промышленности и сельском хозяйстве для определения количественного соотношения изделий разного сорта пользуются так называемым *выборочным методом.* Суть этого метода будет ясна из описания следующего опыта, теоретическую основу которого составляет закон больших чисел.

В коробке тщательно перемешан горох двух сортов: зеленый и желтый. Небольшой емкостью, например ложкой, вынимают из разных мест коробки порции гороха. В каждой порции подсчитывают число желтых горошин M и число всех горошин n. Для каждой порции находят относительную частоту появления желтой горошины $W = \frac{M}{n}$. Так делают k раз (на практике обычно берут $5 < k < 10$) и каждый раз вычисляют относительную частоту. В качестве статистической вероятности извлечения желтой горошины из коробки принимают среднее арифметическое полученных относительных частот $W_1, W_2, \ldots, W_k$:

$$W_{\text{ср}} = \frac{W_1 + W_2 + \ldots + W_k}{k}.$$

Вопросы для контроля

1. Объясните, какие задачи решают статистика и математическая статистика.
2. Объясните, как вы понимаете термины: генеральная совокупность, выборка, репрезентативная выборка. Приведите примеры.

Упражнения

1. Определите, какую из предложенных выборок в последнем столбце таблицы можно считать репрезентативной.

№	Генеральная совокупность	Цель обследования	Выборка
1	2	3	4
1°	Партия одинаковых деталей объемом 10 000 штук	Определение числа бракованных деталей в партии	1) 5 деталей, лежащих рядом; 2) 5 деталей, выбранных случайным образом из разных частей партии; 3) 100 деталей, выбранных случайным образом из разных частей партии

1	2	3	4
2°	Все бродячие собаки областного центра	Определение числа собак, больных чумкой	1) одна собачья стая; 2) по несколько случайным образом отловленных собак из каждого района города
3°	Все экзаменационные работы внешнего тестирования по математике выпускников школ города	Определение соотношения между числом учащихся, находящихся на достаточном, среднем и высоком уровнях учебных достижений по математике	1) 5 работ, взятых случайным образом из числа всех работ; 2) 50 работ, взятых случайным образом из числа всех работ; 3) 5 работ выпускников одной школы
4°	Партия штампованных деталей объемом 100 000 штук	Определение средней массы детали в партии	1) 2 детали; 2) 100 деталей, изготовленных последними; 3) 50 деталей, случайным образом выбранных из партии
5	Бидон молока	Определение жирности молока (в процентах)	1) Ложка молока, взятая с поверхности через 2 ч после доения; 2) стакан молока, налитый из бидона после охлаждения его в погребе в течение 2 ч; 3) ложка молока, взятая после тщательного перемешивания молока
6	Урожай зерна с площади 1000 га	Определение урожайности зерна на этом поле	1) Урожай зерна с северного склона холма площадью 1 га; 2) среднее арифметическое урожайности зерна с двух соседних участков площадью 1 га: северного и восточного склонов холма; 3) среднее арифметическое урожайностей зерна с 10 участков, выбранных на поле случайным образом, площадь каждого участка 10 соток

2. В отрывке из художественного произведения некоторого автора объемом 600 слов деепричастия встречаются 72 раза. Определите ориентировочное количество деепричастий в отрывке объемом 2000 слов этого же автора.

3. Среди случайным образом выбранных 100 молодых людей, которые летом носят кепки, провели опрос о цветовых предпочтениях для этого вида головных уборов. Результаты опроса отображены в таблице:

Цвет	Черный	Красный	Синий	Серый	Белый	Желтый	Зеленый
Частота	32	20	16	14	11	5	2

Считая рассмотренную выборку репрезентативной, предложите рекомендации швейной фабрике по количеству выпуска кепок каждого цвета, если фабрика должна выпустить 30 000 кепок.

4. Молокозавод выпускает молоко разной жирности. В продуктовых магазинах города, для которых завод производит молоко, был проведен опрос 50 наугад выбранных покупателей о том, какой жирности молоко они потребляют. Результаты опроса представлены в таблице:

Жирность молока (в %)	0	0,5	1	1,5	2,5	3,5	5
Частота	10	6	4	5	12	7	6

Считая рассмотренную выборку репрезентативной, дайте рекомендации молокозаводу по объему выпуска молока каждого вида, если молокозавод должен выпускать 2000 л молока ежедневно.

20. 2. Статистические характеристики рядов данных. Математическое ожидание случайной величины

Таблица 34

Определение	Пример
Ранжирование ряда данных	
Под *ранжированием ряда данных* понимают расположение элементов этого ряда в порядке возрастания (имеется в виду, что каждое следующее число или больше, или не меньше предыдущего).	Если ряд данных выборки имеет вид 5, 3, 7, 4, 6, 4, 6, 9, 4, то после ранжирования он превращается в ряд 3, 4, 4, 4, 5, 6, 6, 7, 9. (*)

Продолж. табл. 34

<table>
<tr><th colspan="2">Размах выборки (R)</th></tr>
<tr><td>Размах выборки — это разность между наибольшим и наименьшим значениями случайной величины в выборке.</td><td>Для ряда (*) размах выборки:
$R = 9 - 3 = 6.$</td></tr>
<tr><th colspan="2">Мода (Mo)</th></tr>
<tr><td>Мода — это значение случайной величины, встречающееся чаще остальных.</td><td>В ряду (*) значение 4 встречается чаще всего, итак, $\boldsymbol{Mo} = 4$.</td></tr>
<tr><th colspan="2">Медиана (Me)</th></tr>
<tr><td>Медиана — это так называемое серединное значение упорядоченного ряда значений случайной величины:
— если количество чисел в ряду нечетное, то медиана — это число, записанное посередине;
— если количество чисел в ряду четное, то медиана — это среднее арифметическое двух чисел, стоящих посередине.</td><td>Для ряда (*), в котором 9 членов, медиана — это среднее (то есть пятое) число 5:
$Me = 5.$
Если рассмотреть ряд
3, 3, 4, 4, 4, 5, 6, 6, 7, 9,
в котором 10 членов, то медиана — это среднее арифметическое пятого и шестого членов:
$Me = \frac{4+5}{2} = 4{,}5.$</td></tr>
<tr><th colspan="2">Среднее значение $(\overline{X})$ случайной величины X</th></tr>
<tr><td>Средним значением случайной величины X называется среднее арифметическое всех ее значений.
Если случайная величина X принимает n значений $x_1, x_2, \ldots, x_n$, то
$$\overline{X} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}. \qquad (**)$$
Если случайная величина X принимает значения $x_1, x_2, \ldots, x_k$ соответственно с частотами $m_1, m_2, \ldots, m_k$ (тогда $\Sigma M = n$), то среднее арифметическое можно вычислить по формуле
$$\overline{X} = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2 + \ldots + x_k m_k}{n}.$$</td><td>Пусть случайная величина X задана таблицей распределения по частотам M:
<table><tr><td>X</td><td>2</td><td>4</td><td>5</td><td>7</td></tr><tr><td>M</td><td>3</td><td>1</td><td>2</td><td>2</td></tr></table>
$\Sigma M = n = 8.$
Тогда по формуле (**)
$$\overline{X} = \frac{2+2+2+4+5+5+7+7}{8} = \frac{34}{8} = 4{,}25$$
или по другой формуле
$$\overline{X} = \frac{2 \cdot 3 + 4 \cdot 1 + 5 \cdot 2 + 7 \cdot 2}{8} = \frac{34}{8} = 4{,}25.$$</td></tr>
</table>

Продолж. табл. 34

Математическое ожидание (MX) случайной величины X

Пусть случайная величина X принимает значения $x_1, x_2, \ldots, x_k$ соответственно с вероятностями $p_1, p_2, \ldots, p_k$, то есть имеет закон распределения:

X	x_1	x_2	...	x_k
P	p_2	p_2	...	p_k

Сумма произведений всех значений случайной величины на соответствующие вероятности называется математическим ожиданием величины X:

$$MX = x_1p_1 + x_2p_2 + \ldots + x_kp_k.$$

Пусть закон распределения случайной величины X задан таблицей:

X	2	5	6	7
P	0,3	0,1	0,2	0,4

Тогда $MX = 2 \cdot 0{,}3 + 5 \cdot 0{,}1 + 6 \cdot 0{,}2 + 7 \cdot 0{,}4 = 5{,}1.$

Математическое ожидание показывает, какое среднее значение случайной величины X можно ожидать в результате эксперимента (при значительном количестве повторений эксперимента).

Объяснение и обоснование

1. Размах, мода и медиана ряда данных. Иногда выборку случайных величин или всю генеральную совокупность этих величин приходится характеризовать одним числом. На практике это необходимо, например, для быстрого сравнения двух или больше совокупностей по общему признаку.

Рассмотрим конкретный пример.

Пусть после летних каникул провели опрос 10 девочек и 9 мальчиков одного класса о количестве книг, прочитанных ими за каникулы. Результаты были записаны в порядке опроса. Получили следующие ряды чисел:

для девочек: 4, 3, 5, 3, 8, 3, 12, 4, 5, 5;

для мальчиков: 5, 3, 3, 4, 6, 4, 4, 7, 4.

Чтобы удобнее было анализировать информацию, в подобных случаях числовые данные *ранжируют*, располагая их в порядке возрастания (когда каждое следующее число или больше, или не меньше предыдущего). В результате ранжирования получили следующие ряды.

Для девочек:

$$3,\ 3,\ 3,\ 4,\ 4,\ 5,\ 5,\ 5,\ 8,\ 12; \qquad (1)$$

для мальчиков:

$$3,\ 3,\ 4,\ 4,\ 4,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7. \qquad (2)$$

Тогда распределение по частотам M случайных величин: X — число книг, прочитанных за каникулы девочками, и Y — число книг, прочитанных за каникулы мальчиками, можно задать таблицами:

X	3	4	5	8	12
M	3	2	3	1	1

$\Sigma M = n = 10$

Y	3	4	5	6	7
M	2	4	1	1	1

$\Sigma M = n = 9$

Эти распределения можно также проиллюстрировать графически с помощью полигона частот (рис. 159, *а*, *б*).

Для сравнения рядов (1) и (2) (то есть рядов значений случайных величин X и Y) используют различные характеристики. Приведем некоторые из них.

Размахом ряда чисел (обозначается R) называют разность между наибольшим и наименьшим из этих чисел. Поскольку мы анализируем выборку случайных величин, то

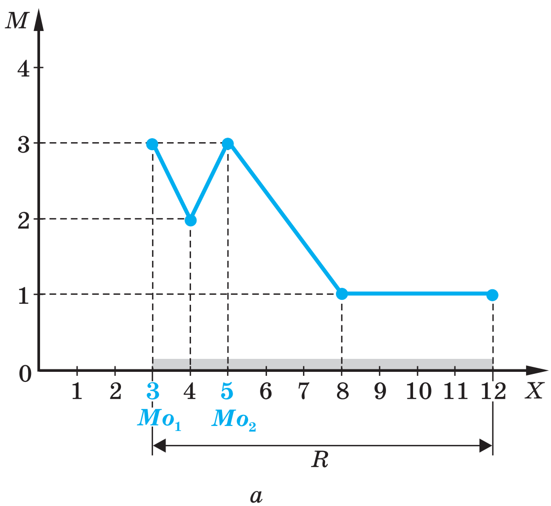
***размах выборки* — это разность между наибольшим и наименьшим значениями случайной величины в выборке.**

Для ряда (1) размах $R = 12 - 3 = 9$, а для ряда (2) размах $R = 7 - 3 = 4$. На графике размах — это длина области определения полигона частот (рис. 161).

Важной статистической характеристикой ряда данных является его *мода* (обозначается Mo, от латинского слова *modus* — мера, правило).

***Мода* — это значение случайной величины, встречающееся чаще остальных.**

Так, в ряду (1) две моды — числа 3 и 5: $Mo_1 = 3$, $Mo_2 = 5$, а в ряду (2) одна мода — число 4: $Mo = 4$. На графике мода — это значение абсциссы точки, в которой достигается максимум полигона частот (см. рис. 159). Отметим, что моды может и не быть, если все значения случайной величины встречаются одинаково часто.



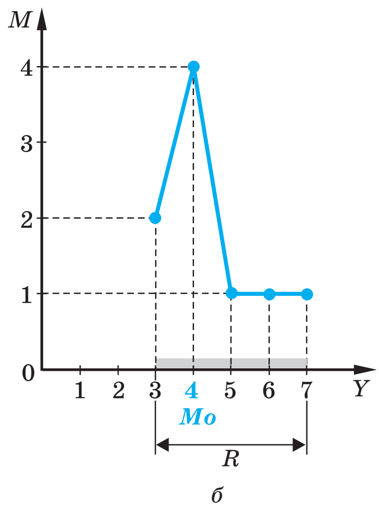


Рис. 159

Моду ряда данных обычно находят тогда, когда хотят выяснить некоторый типовой показатель. Например, когда изучают данные о моделях мужских рубашек, проданных в определенный день в универмаге, то удобно использовать такой показатель, как мода, который характеризует модель, пользующуюся наибольшим спросом (собственно, этим и объясняется название «мода»).

Еще одной важной статистической характеристикой ряда данных является его медиана.

Медиана — это так называемое серединное значение упорядоченного ряда значений случайной величины (обозначается Me).

Медиана делит упорядоченный ряд данных на две равные по количеству элементов части.

Если количество чисел в ряду нечетное, то медиана — это число, записанное посередине.

Например, в ряду (2) нечетное количество элементов ($n = 9$). Тогда его медианой является число, стоящее посередине, то есть на пятом месте: $Me = 4$.

$$3,\ 3,\ 4,\ 4,\ \underset{\textbf{медиана}}{4},\ 4,\ 5,\ 6,\ 7$$

Следовательно, о мальчиках можно сказать, что одна половина из них прочитала не больше 4 книг, а вторая — не меньше 4 книг. (Отметим, что в случае нечетного n номер среднего члена ряда равен $\frac{n+1}{2}$.)

Если количество чисел в ряду четное, то медиана — это среднее арифметическое двух чисел, стоящих посередине.

Например, в ряду (1) четное количество элементов ($n = 10$). Тогда его медианой является число, равное среднему арифметическому чисел, стоящих посередине, то есть на пятом и шестом местах: $Me = \frac{4+5}{2} = 4{,}5.$

$$3,\ 3,\ 3,\ 4,\ 4,\ \underset{4{,}5\text{ — медиана}}{\uparrow}\ 5,\ 5,\ 5,\ 8,\ 12$$

Следовательно, о девочках можно сказать, что одна половина из них прочитала меньше 4,5 книг, а вторая — больше 4,5 книг. (Отметим, что в случае четного n номера средних членов ряда равны $\frac{n}{2}$ и $\frac{n}{2}+1$.)

2. Среднее значение случайной величины и ее математическое ожидание.

Средним значением случайной величины X (обозначается $\overline{X}$) **называется среднее арифметическое всех ее значений.**

Если случайная величина X принимает n значений $x_1, x_2, \ldots, x_n$, то

$$\overline{X} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}.$$

Если случайная величина X принимает значения $x_1, x_2, \ldots, x_k$ соответственно с частотами $m_1, m_2, \ldots, m_k$ (тогда $\Sigma M = n$), то, заменяя одинаковые слагаемые в числителе на соответствующие произведения, получаем, что среднее арифметическое можно вычислять по формуле

$$\overline{X} = \frac{x_1m_1 + x_2m_2 + \ldots + x_km_k}{n}. \qquad (3)$$

Последнюю формулу удобно использовать в тех случаях, когда распределение случайной величины по частотам задано в виде таблицы. Напомним, что распределение по частотам M случайных величин: X — число книг, прочитанных за каникулы девочками, и Y — число книг, прочитанных за каникулы мальчиками, было задано такими таблицами:

X	3	4	5	8	12
M	3	2	3	1	1

$\Sigma M = n = 10$

Y	3	4	5	6	7
M	2	4	1	1	1

$\Sigma M = n = 9$

Тогда средние значения заданных случайных величин равны:

$$\overline{X} = \frac{3\cdot3+4\cdot2+5\cdot3+8\cdot1+12\cdot1}{10} = \frac{52}{10} = 5{,}2, \qquad \overline{Y} = \frac{3\cdot2+4\cdot4+5\cdot1+6\cdot1+7\cdot1}{9} = \frac{40}{9} \approx 4{,}4.$$

Поскольку $\overline{X} > \overline{Y}$, то можно сказать, что за один и тот же промежуток времени девочки в классе читают книг больше, чем мальчики.

Если в правой части формулы (3) почленно разделить каждое слагаемое в числителе на знаменатель, то получим следующую формулу:

$$\overline{X} = x_1\frac{m_1}{n} + x_2\frac{m_2}{n} + \ldots + x_k\frac{m_k}{n}. \qquad (4)$$

Напомним, что отношение $\frac{m_i}{n}$ (где $1 \leqslant i \leqslant k$) является относительной частотой случайного события — случайная величина X приняла значение x_i (мы обозначали это событие так: $X = x_i$). Если считать проведенные случайные эксперименты статистически стойкими, то при значительным количестве экспериментов значения относительных частот близки к соответствующим вероятностям. Обозначим вероятность события — случайная величина X приняла значение x_1, то есть $P\,(X = x_1)$, через p_1; $P\,(X = x_2)$ — через p_2, ..., $P\,(X = x_k)$ — через p_k. Тогда правая часть равенства (4) приобретет вид

$$x_1p_1 + x_2p_2 + \ldots + x_kp_k.$$

Полученное выражение называется *математическим ожиданием* случайной величины X и обозначается MX (или $M\,(X)$). Сформулируем соответствующее определение для дискретной случайной величины.

Пусть случайная величина X принимает значения $x_1, x_2, \ldots, x_k$ соответственно с вероятностями $p_1, p_2, \ldots, p_k$, то есть имеет закон распределения:

X	x_1	x_2	...	x_k
P	p_1	p_2	...	p_k

Сумма произведений всех значений случайной величины на соответствующие вероятности называется *математическим ожиданием величины X*:

$$MX = x_1p_1 + x_2p_2 + \dots + x_kp_k. \qquad (5)$$

Математическое ожидание показывает, на какое среднее значение случайной величины X можно надеяться в результате эксперимента (при значительном количестве повторений эксперимента). С помощью математического ожидания можно сравнивать случайные величины, заданные законами распределения.

Например, пусть количества очков, выбиваемых при одном выстреле каждым из двух ловких стрелков, имеют следующие законы распределения:

X	8	9	10
P	0,4	0,1	0,5

Y	8	9	10
P	0,1	0,6	0,3

Чтобы выяснить, какой из стрелков стреляет более метко, находят математическое ожидание для каждой случайной величины:

$MX = 8 \cdot 0,4 + 9 \cdot 0,1 + 10 \cdot 0,5 = 9,1$; $MY = 8 \cdot 0,1 + 9 \cdot 0,6 + 10 \cdot 0,3 = 9,2$.

Следовательно, среднее количество очков, выбиваемое при одном выстреле, у второго стрелка несколько больше, чем у первого. Это дает основание сделать вывод о том, что второй стрелок стреляет немного лучше, чем первый.

Согласно закону больших чисел при значительном количестве экспериментов значения относительных частот близки к соответствующим вероятностям. Отсюда можно сделать вывод, что выражение $x_1\frac{m_1}{n} + x_2\frac{m_2}{n} + \dots + x_k\frac{m_k}{n}$ будет приближаться к выражению $x_1p_1 + x_2p_2 + \dots + x_kp_k$. Но по формуле (4) первое из этих выражений является средним (то есть средним арифметическим) значением случайной величины X, а второе (по формуле (5)) — математическим ожиданием этой величины. Таким образом,

при значительном количестве экспериментов среднее арифметическое всех значений случайной величины приближается к ее математическому ожиданию.

Обратим внимание, что в пособиях по статистике моду, медиану и среднее значение объединяют одним термином — *меры центральной тенденции*, подчеркивая тем самым возможность охарактеризовать ряд выборки одним числом, к которому стремятся все ее значения.

Не для каждого ряда данных имеет смысл формально находить центральные тенденции. Например, если исследуется ряд

$$5,\ 5,\ 8,\ 110 \qquad (5)$$

годовых доходов четырех людей (в тыс. грн.), то очевидно, что ни мода (5), ни медиана (6,5), ни среднее значение (32) не могут выступать в роли единой характеристики всех значений ряда данных. Это объясняется тем, что размах ряда (105) является соизмеримым с наибольшим из его значений.

В данном случае можно искать центральные тенденции, например, для части ряда (5):

$$5,\ 5,\ 8,$$

условно назвав его выборкой годового дохода низкооплачиваемой части населения.

Если в выборке среднее значение существенно отличается от моды, то его нецелесообразно выбирать в качестве типичной характеристики рассматриваемой совокупности данных (чем больше значение моды отличается от среднего значения, тем «более несимметричным» является полигон частот совокупности).

Вопросы для контроля

1. На примере ряда данных 2, 2, 3, 5, 5, 5, 13 объясните, что такое размах, мода, медиана и среднее значение этого ряда и дайте соответствующие определения.
2. Дайте определение математического ожидания случайной величины X.

Упражнения

1. Найдите размах, моду, медиану и среднее значение ряда данных некоторой случайной величины X:
1) 1, 1, 2, 2, 2, 3, 4, 4, 5; 2) −3, −2, −2, −1, 0, 2, 2, 2, 3, 5.
Постройте полигон частот значений величины X. Укажите на рисунке размах, моду и медиану заданного ряда данных.

2. Найдите размах, моду, медиану и среднее значение совокупности значений случайной величины X:

1)

X	2	3	4	5
M	3	4	1	3

2)

X	−1	3	4	5	7
M	2	3	4	4	1

Постройте полигон частот значений величины X. Укажите на рисунке размах, моду и медиану заданной совокупности данных.

3. Девочки 11 класса на уроке физкультуры при прыжках в высоту показали следующие результаты (в см):

90, 125, 125, 130, 130, 135, 135, 135, 140, 140, 140.

Найдите моду, медиану и среднее значение этой совокупности данных. Какое из этих значений лучше всего характеризует спортивную подготовку девочек класса?

4. Пусть закон распределения случайной величины X задан таблицей:

1)

X	2	5	6	7
P	0,3	0,1	0,2	0,4

2)

X	4	5	8	10	12
P	0,4	0,1	0,05	0,95	0,4

Найдите математическое ожидание этой величины.

5. Выигрыши (в грн.), которые приходятся на один билет в каждой из двух лотерей, имеют следующие законы распределения:

X	0	1	5	10
P	0,9	0,06	0,03	0,01

Y	0	1	5	10
P	0,85	0,12	0,02	0,01

Какой из этих лотерей вы отдали бы предпочтение?

20.3. Отклонение от среднего значения, дисперсия, среднее квадратическое отклонение

Таблица 35

<table>
<tr><th>Определение</th><th>Пример</th></tr>
<tr><td colspan="2">Отклонение от среднего значения</td></tr>
<tr><td>

Отклонением от среднего значения **называют разность между рассматриваемым значением случайной величины и средним значением всей совокупности ряда данных** (для случайной величины X отклонение от среднего — это $X-\overline{X}$)

</td><td>

Пусть случайная величина X задана таблицей распределения по частотам M:

<table>
<tr><td>X</td><td>2</td><td>3</td><td>5</td><td>7</td></tr>
<tr><td>M</td><td>1</td><td>2</td><td>1</td><td>1</td></tr>
</table>

$\Sigma M = n = 5$. Тогда получаем

$$\overline{X} = \frac{2+3+3+5+7}{5} = 4$$

<table>
<tr><td>X</td><td>2</td><td>3</td><td>3</td><td>5</td><td>7</td></tr>
<tr><td>$X-\overline{X}$</td><td>−2</td><td>−1</td><td>−1</td><td>1</td><td>3</td></tr>
</table>

</td></tr>
<tr><td colspan="2">Дисперсия (D)</td></tr>
<tr><td>

Дисперсией **называется среднее арифметическое суммы квадратов всех отклонений от среднего заданных n значений случайной величины**

$$D = \frac{(x_1-\overline{X})^2+(x_2-\overline{X})^2+\ldots+(x_n-\overline{X})^2}{n}$$

</td><td>

Для рассматриваемой случайной величины X:

<table>
<tr><td>X</td><td>2</td><td>3</td><td>5</td><td>7</td></tr>
<tr><td>M</td><td>1</td><td>2</td><td>1</td><td>1</td></tr>
<tr><td>$X-\overline{X}$</td><td>−2</td><td>−1</td><td>1</td><td>3</td></tr>
<tr><td>$(X-\overline{X})^2$</td><td>4</td><td>1</td><td>1</td><td>9</td></tr>
<tr><td>$(X-\overline{X})^2\cdot M$</td><td>4</td><td>2</td><td>1</td><td>9</td></tr>
</table>

$$D = \frac{\Sigma\left((X-\overline{X})^2\cdot M\right)}{\Sigma M} = \frac{4+2+1+9}{5} = \frac{18}{5} = 3{,}6$$

</td></tr>
<tr><td colspan="2">Среднее квадратическое отклонение (σ — «сигма»)</td></tr>
<tr><td>

Средним квадратическим отклонением **называется квадратный корень из дисперсии**

$$\sigma = \sqrt{D}$$

</td><td>

Для рассматриваемой случайной величины X:

$$\sigma = \sqrt{D} = \sqrt{3{,}6} \approx 1{,}90$$

</td></tr>
</table>

Объяснение и обоснование

1. Отклонение от среднего значения и дисперсия. В предыдущем пункте было рассмотрено сравнение совокупностей значений случайных величин с помощью центральных тенденций (моды, медианы, среднего значения). Но бывают ситуации, когда такое сравнение выполнить невозможно.

Например, пусть на одно место токаря претендуют двое рабочих. Для каждого из них установили испытательный срок, в течение которого они должны были изготавливать одинаковые детали. Результаты их работы представлены в таблице:

День недели	Количество деталей, изготовленных за день	
	первым рабочим (X)	вторым рабочим (Y)
Понедельник	52	61
Вторник	54	40
Среда	50	50
Четверг	48	55
Пятница	46	44

Каждый из рабочих за 5 дней изготовил 250 деталей, следовательно, средняя производительность труда за день обоих рабочих одинакова:

$$\overline{X}=\overline{Y}=\frac{250}{5}=50 \text{ (дет./день)}.$$

Моды у предложенных совокупностей отсутствуют, а медианы одинаковы (50 и 50).

Возникает вопрос: «Кого из этих рабочих взять на работу?» В данном случае как критерий сравнения совокупностей результатов их работы может выступать стабильность производительности труда рабочего. Ее можно оценить с помощью отклонений от среднего значения элементов совокупности.

Отклонением от среднего **называют разность между рассматриваемым значением случайной величины и средним значением всей совокупности ряда данных**

(для случайной величины X отклонение от среднего — это $X-\overline{X}$).

Например, если значение величины $x_1 = 52$, а среднее значение $\overline{X}=50$, то отклонение x_1 от среднего будет равняться $x_1-\overline{X}=52-50=2$.

Очевидно, что отклонение от среднего может быть как положительным, так и отрицательным числом. Нетрудно показать, что *сумма отклонений всех значений совокупности от среднего значения равна нулю* (см., например, сумму отклонений в таблице, приведенной ниже). Поэтому характеристикой стабильности элементов совокупности может служить *сумма квадратов отклонений от среднего.*

Найдем соответствующие значения для количества деталей, изготовленных за день каждым рабочим и запишем их в таблицу:

День недели	X	$X-\overline{X}$	$(X-\overline{X})^2$	Y	$Y-\overline{Y}$	$(Y-\overline{Y})^2$
Понедельник	52	2	**4**	61	11	**121**
Вторник	54	4	**16**	40	−10	**100**
Среда	50	0	**0**	50	0	**0**
Четверг	48	−2	**4**	55	5	**25**
Пятница	46	−4	**16**	44	−6	**36**
Сумма	250	0	**40**	250	0	**282**

Как видим, у второго рабочего сумма квадратов отклонений от среднего больше, чем у первого рабочего

$$\left(40=\sum\left(X-\overline{X}\right)^2<\sum\left(Y-\overline{Y}\right)^2=282\right).$$

На практике это означает, что второй рабочий имеет нестабильную производительность труда: в какие-то дни работает не в полную силу, а в какие-то наверстывает упущенное, что всегда сказывается на качестве продукции. Очевидно, что работодатель захочет взять на место токаря первого рабочего (у которого сумма квадратов отклонений от средней производительности труда меньше).

Если бы рабочие работали разное количество дней и изготовили в среднем одинаковое число деталей, то стабильность работы каждого из них можно было бы оценить по величине *среднего арифметического суммы квадратов отклонений*. Эта величина называется *дисперсией* (от латинского слова *dispersio* — рассеяние) и обозначается буквой D. Таким образом,

***дисперсией* называется среднее арифметическое суммы квадратов всех отклонений от среднего заданных n значений случайной величины.**

Для случайной величины X, принимающей n разных значений $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и имеющей среднее значение $\overline{X}$, дисперсия находится по формуле

$$D=\frac{\left(x_1-\overline{X}\right)^2+\left(x_2-\overline{X}\right)^2+\ldots+\left(x_n-\overline{X}\right)^2}{n}.$$

Задача 1 Два токаря вытачивали одинаковые детали, причем первый работал полную рабочую неделю, а второй — 4 дня. Сведения о количестве деталей, которые они изготавливали за каждый рабочий день, приведены в таблице:

День недели	Количество деталей, изготовленных за день	
	первым токарем (X)	вторым токарем (Y)
Понедельник	53	52
Вторник	54	46
Среда	49	53
Четверг	48	49
Пятница	46	—

Сравните стабильность работы токарей, используя дисперсию совокупности значений соответствующей случайной величины.

Найдем средние значения величин X и Y:

$$\overline{X} = \frac{53+54+49+48+46}{5} = \frac{250}{5} = 50,$$

$$\overline{Y} = \frac{52+46+53+49}{4} = \frac{200}{4} = 50.$$

Очевидно, что $\overline{X} = \overline{Y}$.

Вычислим сумму квадратов отклонений от средних значений величин X и Y, последовательно записывая результаты в таблицу:

День недели	Значение случайной величины		Отклонение от среднего		Квадрат отклонения от среднего	
	X	Y	$X-50$	$Y-50$	$(X-50)^2$	$(Y-50)^2$
Понедельник	53	52	3	2	9	4
Вторник	54	46	4	−4	16	16
Среда	49	53	−1	3	1	9
Четверг	48	49	−2	−1	4	1
Пятница	46	—	−4	—	16	—
				Сумма:	46	30

Найдем значения дисперсии:

$$D_X = \frac{46}{5} = 9{,}2; \qquad D_Y = \frac{30}{4} = 7{,}5.$$

Как видим, $D_X > D_Y$. Следовательно, второй токарь работает более стабильно, чем первый. ◁

Обратим внимание, что в том случае, когда значения $x_1, x_2, .., x_k$ случайной величины X повторяются с частотами $m_1, m_2, .., m_k$ соответственно, то дисперсию случайной величины X можно вычислить по формуле

$$D=\frac{\left(x_1-\overline{X}\right)^2\cdot m_1+\left(x_2-\overline{X}\right)^2\cdot m_2+\ldots+\left(x_k-\overline{X}\right)^2\cdot m_k}{m_1+m_2+\ldots+m_k},\qquad(3)$$

где

$$\overline{X}=\frac{x_1m_1+x_2m_2+\ldots+x_km_k}{m_1+m_2+\ldots+m_k}.$$

Задача 2 Случайная величина X имеет распределение по частотам M, приведенное в таблице:

X	3	5	6	11
M	1	2	3	1

Найдите ее дисперсию.

▶ Среднее значение случайной величины X равно:

$$\overline{X}=\frac{3\cdot1+5\cdot2+6\cdot3+11\cdot1}{1+2+3+1}=\frac{42}{7}=6.$$

По формуле (3) находим дисперсию:

$$D=\frac{(3-6)^2\cdot1+(5-6)^2\cdot2+(6-6)^2\cdot3+(11-6)^2\cdot1}{1+2+3+1}=\frac{9+2+0+25}{7}=\frac{36}{7}\approx5{,}1.$$

Ответ. $D\approx5{,}1$. ◁

2. Среднее квадратическое отклонение. Пусть величина X имеет некоторую размерность (например, сантиметры). Тогда ее среднее значение X и отклонение от среднего $X-\overline{X}$ имеют ту же размерность, что и сама величина (сантиметры). Квадрат же отклонения $\left(X-\overline{X}\right)^2$ и дисперсия D имеют размерности квадрата этой величины (то есть квадратные сантиметры).

Для оценки степени отклонения от среднего значения удобно иметь дело с величиной той же размерности, что и величина X. С этой целью используют значение квадратного корня из дисперсии $\sqrt{D}$.

Квадратный корень из дисперсии называют *средним квадратическим отклонением* и обозначают σ (греческая буква «сигма»):

$$\sigma=\sqrt{D}.$$

Замечание. Дисперсию и среднее квадратическое отклонение называют в статистике *мерами рассеяния* значений случайной величины вокруг среднего значения.

Задача 3 Распределение по частотам величины X — числа забитых голов десятью игроками футбольной команды за период соревнований — показано в таблице. Найти среднее квадратическое отклонение от среднего числа забитых голов.

X	0	1	2	3
M	4	2	3	1

Результаты последовательных расчетов будем заносить в таблицу:

X	0	1	2	3
M	4	2	3	1
$X \cdot M$	0	2	6	3
$X-\overline{X}$	–1,1	–0,1	0,9	1,9
$(X-\overline{X})^2$	1,21	0,01	0,81	3,61
$(X-\overline{X})^2 \cdot M$	4,84	0,02	2,43	3,61

$$\Sigma M = 10$$

$$\overline{X} = \frac{\Sigma(X \cdot M)}{\Sigma M} = \frac{11}{10} = 1{,}1$$

$$D = \frac{\Sigma\left((X-\overline{X})^2 \cdot M\right)}{\Sigma M} = \frac{4{,}84+0{,}02+2{,}43+3{,}61}{10} = \frac{10{,}9}{10} = 1{,}09 \quad (\text{гол.}^2).$$

$$\sigma = \sqrt{D} = \sqrt{1{,}09} \approx 1{,}044 \quad (\text{гол.}).$$

Ответ. $\sigma \approx 1{,}044$ гола.

Вопросы для контроля

1. Дайте определение отклонения элементов совокупности от среднего значения. Приведите примеры.
2. Объясните, как найти дисперсию совокупности значений случайной величины. Сформулируйте соответствующее определение.
3. Дайте определение среднего квадратического отклонения. Объясните, как найти среднее квадратическое отклонение от среднего значения элементов выборки: 1 см, 2 см, 3 см, 3 см, 6 см.

Упражнения

1. Найдите дисперсию выборки:
   1) 10 см, 12 см, 7 см, 11 см;
   2) 16 г, 14 г, 13 г, 17 г;
   3) 11 с, 14 с, 11 с, 12 с, 12 с;
   4) 5 м, 13 м, 8 м, 12 м, 12 м.
2. Найдите дисперсию совокупности значений случайной величины X, заданную частотным распределением:

1)

X	2	3	4	6
M	3	2	2	3

2)

X	–1	2	3	4	5
M	3	1	2	3	1

3. Двух футболистов, которые принимали участие в играх пяти сезонов и забили одинаковое количество голов (см. таблицу), сравните по стабильности результатов.

Условный номер сезона	1	2	3	4	5
Число голов, забитых первым футболистом	18	23	19	17	23
Число голов, забитых вторым футболистом	19	16	22	23	20

4. Двух футболистов, один из которых принимал участие в пяти игровых сезонах, а второй — в шести (см. таблицу), сравните по результативности и стабильности в забивании голов.

Условный номер сезона	1	2	3	4	5	6
Число голов, забитых первым футболистом	—	17	20	18	21	14
Число голов, забитых вторым футболистом	17	21	20	16	15	19

5. Найдите среднее квадратическое отклонение от среднего значения элементов выборки:
1) 3 кг, 5 кг, 5 кг, 8 кг, 4 кг; 2) 12 м, 10 м, 7 м, 12 м, 9 м.

6. Найдите среднее квадратическое отклонение величины X, заданной частотным распределением:

1)

X	2	3	4	6
M	2	2	1	3

2)

X	−5	−2	2	3
M	2	3	4	2

7. Определите, какая выборка:

$$-1,\ 0,\ 2,\ 3,\ 5,\ 3 \text{ или } -5,\ -3,\ 0,\ -3,\ 1$$

имеет меньшее рассеяние данных вокруг своего среднего значения.

20. 4. Нормальное распределение. Правило трех сигм

Рассмотрим несколько примеров распределения случайных величин.

Значения размеров одежды (X) и обуви (Y) тысячи выбранных случайным образом одиннадцатиклассниц школ города и распределение их по частотам представлены в таблицах:

X	40	42	44	46	48	50	52
M	18	79	215	375	213	81	19

X	34	35	36	37	38	39	40	41
M	6	48	139	309	305	141	46	6

Полигоны частот заданных совокупностей изображены на рисунке 162.

Оказывается, что многие признаки разных явлений природы и техники (рост, масса живых организмов одного вида, результаты измерения характеристик однотипных технических изделий, дальность полета снаряда при стрельбе по цели из одной и той же пушки и др.) имеют подобные с пред-

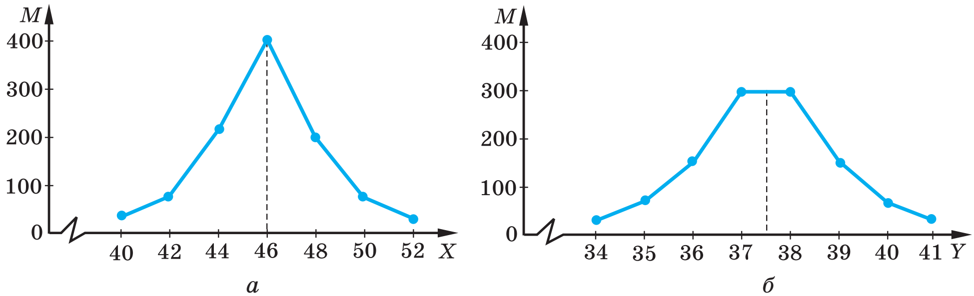


Рис. 160

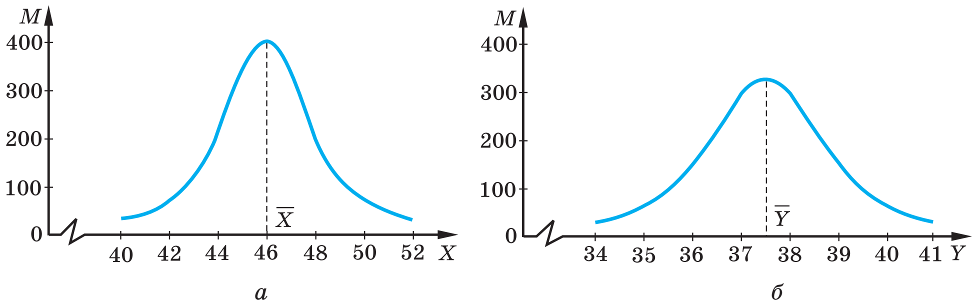


Рис. 161

ставленными на рисунке 160 распределения своих числовых значений по частотам. Эти распределения называют *нормальными распределениями*.

Проведем через точки, отмеченные на рисунке 160, плавные кривые (рис. 161). Эти кривые называют *кривыми нормального распределения*. Отметим, что *кривые нормального распределения симметричны относительно вертикальных прямых, проходящих через средние значения* $\left(\overline{X} = 46\right.$ и $\left.\overline{Y} = 37{,}5\right)$ *рассмотренных совокупностей*.

Подобно тому, как графики всех парабол можно получить с помощью геометрических преобразований одной параболы $y = x^2$, так и все кривые нормальных распределений можно получить с помощью геометрических преобразований одной кривой. Эту кривую называют *кривой нормального распределения*, или *гауссовой кривой*, названной в честь немецкого математика Карла Гаусса (рис. 162).

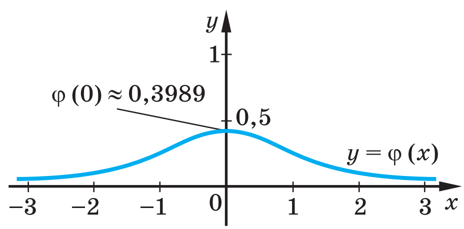


Рис. 162

Эта бесконечная «колоколоподобная» кривая симметрична относительно оси ординат и имеет единственный максимум. Площадь части плоскости, ограниченной гауссовой кривой и осью Ox, равна единице. Ее «ветви»

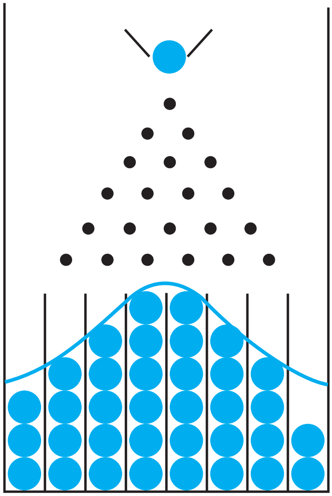


Рис. 163

очень быстро приближаются к оси абсцисс: площадь криволинейной трапеции, ограниченной гауссовой кривой, осью Ox и прямыми $x = -3$ и $x = 3$ больше 0,99 всей площади, то есть больше 99 %. Функцию, заданную гауссовой кривой, обозначают $\varphi(x)$. Аналитически она задается достаточно сложной формулой:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Но для практических расчетов эта формула не очень нужна. Для значений этой функции составлены подробные числовые таблицы.

Примером реального получения кривой нормального распределения может служить результат опыта, проведенного английским ученым Ф. Гальтоном (1822–1911). Для проведения этого опыта в доску забивают в «шахматном порядке» гвозди (рис. 163). Доска устанавливается с небольшим наклоном к горизонтальной поверхности. В верхней части доски делается конусное отверстие, через которое пропускаются одинаковые шары. Расстояние между соседними гвоздями везде одинаково и немного больше диаметра шаров.

Пройдя через отверстие, шар отталкивается от первого верхнего гвоздя и случайным образом огибает его или слева, или справа. Аналогично шар проходит каждый из нижних гвоздей, встречающихся на его пути (с вероятностью, близкой к $\frac{1}{2}$, огибает его или слева, или справа). Пройдя все ряды гвоздей, шар попадает в один из вертикальных пеналов-накопителей.

Если число рядов гвоздей значительно увеличить и запустить много шаров, можно заметить, что кривая, огибающая верхний ряд шаров в пеналах, имеет вертикальную ось симметрии и напоминает кривую нормального распределения.

В курсе теории вероятностей доказывается, что

68 % (или приблизительно $\frac{2}{3}$) всех значений нормально распределенной случайной величины X имеют отклонения от среднего значения, по абсолютной величине не превышающие среднее квадратическое отклонение σ, а 96 % всех значений — не превышающие 2σ. Также доказывается, что почти все значения (точнее, 99,7 % всех значений) имеют отклонения от среднего, не превышающие по абсолютной величине утроенное среднее квадратическое отклонение 3σ.

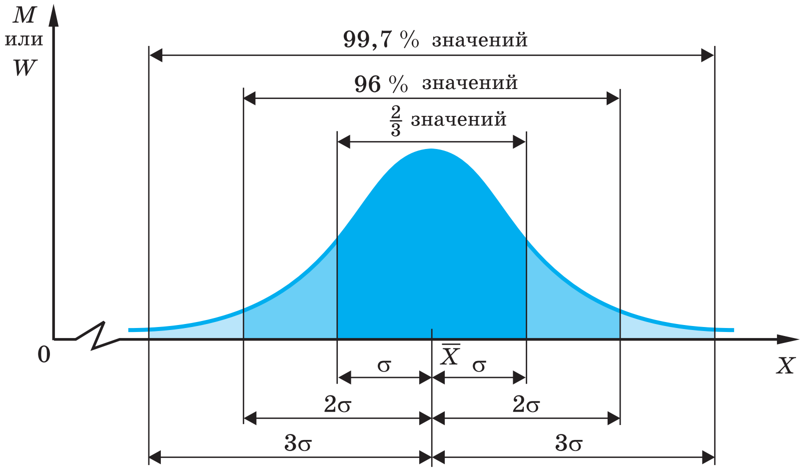


Рис. 164

Эту закономерность часто называют *правилом трех сигм* (рис. 164).

Известно, что результаты измерений в массовом производстве (длина, масса конкретных видов продукции) — непрерывные случайные величины, имеющие нормальное распределение.

Например, измерения диаметров d партии труб (объем партии равен n), изготовленных трубопрокатным заводом, показали, что размеры диаметров находятся в промежутке от 149,7 мм до 150,3 мм. Это означает, что среднее значение их совокупности

$$\overline{d} = \frac{149{,}7 + 150{,}3}{2} = 150 \text{ (мм)}.$$

Размеры диаметров труб распределены нормально со средним квадратическим отклонением от среднего значения $\overline{d}$, равным $\sigma = \frac{150 - 149{,}7}{3} = 0{,}1$ (мм). Это проиллюстрировано на рисунке 165.

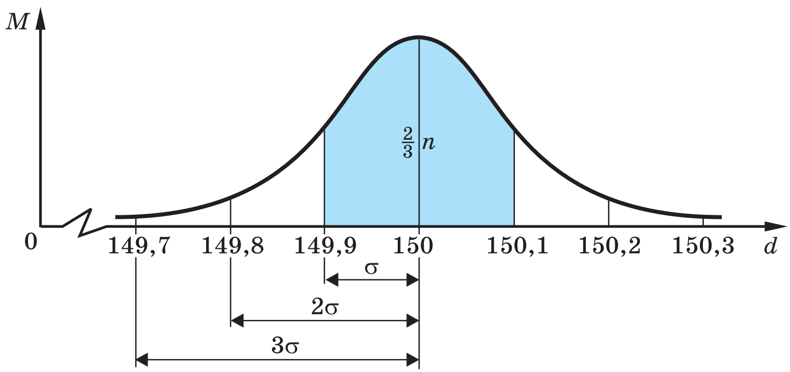


Рис. 165

Из приведенных рассуждений можно сделать вывод, что приблизительно $\frac{2}{3}$ всех труб имеют диаметры от 149,9 мм до 150,1 мм, а значительная их часть (96 %) имеют диаметры от 149,8 мм до 150,2 мм.

Пример В некоторых международных играх по разным видам спорта должны принимать участие 600 спортсменов. Известно, что размеры одежды (V) участников игр варьируются от 40-го (у гимнасток) до 62-го (у тяжелоатлетов). Оргкомитет игр решил подарить всем участникам майки с эмблемой игр. Швейной фабрике был сделан заказ на пошив маек свободного покроя трех условных размеров: I, II, III. Какие стандартные размеры (от 40-го до 62-го) целесообразно объединить в условные размеры I, II и III и сколько маек каждого из этих трех размеров необходимо сшить?

▶ Полагая, что размеры одежды (V) спортсменов имеют нормальное распределение, найдем среднее значение совокупности размеров $\overline{V}=\frac{40+62}{2}=51$.

Согласно правилу трех сигм считаем, что практически вся совокупность маек от 40-го до 62-го размера попадает в интервал длиной 6σ. При этом в центральную часть распределения (рис. 166) попадают размеры 48, 50, 52, 54, им целесообразно присвоить условный размер II.

На эти размеры во всей совокупности будет приходиться приблизительно $\frac{2}{3}$ маек, то есть

$$600\cdot\frac{2}{3}=400.$$

В I условный размер войдут 40, 42, 44 и 46-й размеры; в III — 56, 58, 60 и 62-й размеры. Вследствие симметричности кривой нормального распределения относительно вертикальной прямой, проходящей через среднее значение, на I и III условные размеры маек приходится поровну: $\left(1-\frac{2}{3}\right):2=\frac{1}{6}$ от всей совокупности маек, то есть по $600\cdot\frac{1}{6}=100$ маек.

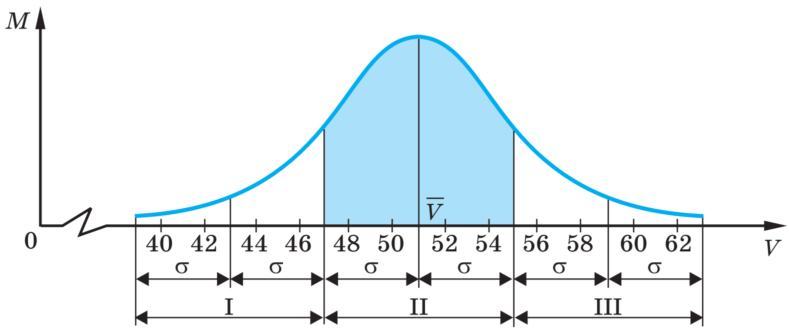


Рис. 166

Ответ. I (размеры 40–46) — 100 маек; II (размеры 48–54) — 400 маек; III (размеры 56–62) — 100 маек. ◁

Вопросы для повторения

1. Назовите случайные величины, которые считаются нормально распределенными. Изобразите схематический вид кривой нормального распределения. Что является осью симметрии этой кривой?
2. Объясните смысл правила трех сигм для нормально распределенной случайной величины.

Упражнения

1. Постройте полигон частот для размеров обуви:
1) 60 случайным образом выбранных женщин (см. таблицу слева);
2) 60 случайным образом выбранных мужчин (см. таблицу справа).

Женщины					
22,5	24	23,5	23	24,5	23
23,5	24,5	22,5	23,5	25,5	25
25,5	22	24	25	23,5	21
23	24,5	23	24,5	23	24
25	24	21,5	23,5	24,5	22,5
22	23,5	26,5	23,5	25	26
24,5	23	24	24,5	22,5	24
23,5	24	23	25	24	22
25,5	21,5	24,5	26	25,5	23,5
22,5	24	23	22,5	24	25

Мужчины					
26	28,5	27,5	29,5	26,5	30,5
27,5	27	29	27	28,5	27,5
28	25	26	28	30	27
26,5	27,5	28	29,5	26,5	29
28	29	27	26,5	28,5	27,5
27,5	28	28	25,8	29	28
26,5	27,5	29,5	27,5	26	30
29,5	25,5	27	28,5	28	27
27	28,5	29	26	26,5	28,5
28	27,5	28,5	27,5	29	27

Убедитесь в том, что распределение частот близко к нормальному распределению. Проведите на основании построенного полигона кривую нормального распределения и назовите ее свойства. Найдите среднее значение выборки.

§ 21 СОЕДИНЕНИЯ С ПОВТОРЕНИЯМИ. РЕШЕНИЕ БОЛЕЕ СЛОЖНЫХ КОМБИНАТОРНЫХ ЗАДАЧ

21.1. Соединения с повторениями

Таблица 36

Размещения с повторениями	
Размещением с повторениями из n элементов по k **называется конечная последовательность, состоящая из** k **элементов** $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ **некоторого** n**-элементного множества** M	
Формула числа размещений с повторениями	Пример
$\widetilde{A}_n^k = n^k$	Количество различных трехзначных чисел, которые можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, если цифры могут повторяться, равно $\widetilde{A}_6^3 = 6^3 = 216$
Перестановки с повторениями	
Перестановкой с повторениями состава $n = k_1 + k_2 + \ldots + k_m$ ***из элементов*** $a_1, a_2, \ldots, a_m$ **некоторого множества** M **называется любая конечная последовательность, состоящая из** n **элементов, в которую элемент** a_1 **входит** k_1 **раз, элемент** a_2 **входит** k_2 **раз, ..., элемент** a_m **входит** k_m **раз**	
Формула числа перестановок с повторениями	Пример
$\widetilde{P}_n = \dfrac{n!}{k_1!k_2!\cdot\ldots\cdot k_m!}$, где $k_1 + k_2 + \ldots k_m = n$	Количество различных шестизначных чисел, которые можно составить из трех двоек, двух семерок и одной пятерки, равно $\widetilde{P}_6 = \dfrac{6!}{3!\cdot 2!\cdot 1!} = \dfrac{720}{6\cdot 2\cdot 1} = 60$ (учтено, что $3 + 2 + 1 = 6$).
Сочетания с повторениями	
Если задано n**-элементное множество, то** ***сочетаниями с повторениями из n элементов по k*** **называются наборы, в каждый из которых входят** k **заданных элементов (не обязательно разных), отличающихся только составом элементов (хотя бы одним элементом).**	
Формула числа сочетаний с повторениями	Пример
$\widetilde{C}_n^k = C_{n+k-1}^k$	Если в продаже есть цветы четырех сортов, то количество разных букетов, составленных из 7 цветов, равно $\widetilde{C}_4^7 = C_{4+7-1}^7 = C_{10}^7 = \dfrac{10!}{7!(10-7)!} = \dfrac{10!}{7!-3!} = \dfrac{8\cdot 9\cdot 10}{1\cdot 2\cdot 3} = 120$

Продолж. табл. 36

Схема решения комбинаторных задач	
Выбор правила	
Правило суммы	Правило произведения
Если элемент A можно выбрать m способами, а элемент B — n способами, то **A или B** можно выбрать **$m + n$** способами.	Если элемент A можно выбрать m способами, а после этого элемент B — n способами, то **A и B** можно выбрать **$m \cdot n$** способами.
Выбор формулы	

Учитывается ли порядок следования элементов в соединении?

Да — Все ли элементы входят в соединение? (Да — Перестановки; Нет — Размещения)

Нет — Сочетания

Перестановки		Размещения		Сочетания	
без повторений	с повторениями	без повторений	с повторениями	без повторений	с повторениями
$P_n = n!$	$\widetilde{P}_n = \dfrac{n!}{k_1!k_2!\ldots k_m!}$, где $k_1 + k_2 + \ldots + k_m = n$	$A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$	$\widetilde{A}_n^k = n^k$	$C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$	$\widetilde{C}_n^k = C_{n+k-1}^k$

21.1.1. Размещения с повторениями

Объяснение и обоснование

Для введения понятия размещения с повторениями напомним понятие последовательности, которым вы пользовались в курсе алгебры 9 класса.

Например, рассмотрим последовательность (a_n) двузначных чисел, оканчивающихся цифрой 5:

$$15;\ 25;\ 35;\ 45;\ 55;\ 65;\ 75;\ 85;\ 95.$$

У этой последовательности

$$a_1 = 15,\ a_2 = 25,\ a_3 = 35,\ a_4 = 45,\ a_5 = 55,\ a_6 = 65,\ a_7 = 75,\ a_8 = 85,\ a_9 = 95.$$

Можно сказать, что каждому натуральному числу от 1 до 9 ставится в соответствие единственное двузначное натуральное число, оканчивающееся цифрой 5. Тем самым задается функция, областью определения которой служит множество $\{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$, а областью значений — множество $\{15; 25; 35; 45; 55; 65; 75; 85; 95\}$.

Тогда можно дать следующее определение последовательности.

Функция, областью определения которой является множество натуральных чисел или множество первых n натуральных чисел, называется *последовательностью*.

Если последовательность определена на множестве всех натуральных чисел, то ее называют *бесконечной последовательностью*, а если последовательность определена на множестве первых n натуральных чисел, то ее называют *конечной*.

Размещением с повторениями из n элементов по k **называется конечная последовательность, состоящая из k элементов $(a_1, a_2, ..., a_k)$ некоторого n-элементного множества M.**

Например, из трех цифр множества $\{1; 5; 7\}$ можно составить такие размещения из двух элементов с повторениями:

$$(1; 1), (1; 5), (1; 7), (5; 5), (5; 7), (7; 7), (5; 1), (7; 1), (7; 5).$$

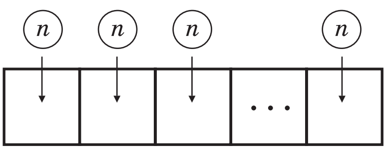
Количество размещений из n элементов по k элементов с повторениями обозначается $\tilde{A}_n^k$ (волнистая линия указывает на возможность повторения элементов). Как видим, $\tilde{A}_3^2 = 9$.

Выясним, сколько всего можно составить размещений с повторениями из n элементов по k. Составление размещения представим себе как последовательное заполнение k мест, которые мы будем изображать в виде клеточек (рис. 167). На первое место мы можем выбрать один из n элементов заданного множества (то есть элемент для первой клеточки можно выбрать n способами). Далее, если элементы можно повторять, то на каждое следующее место мы снова можем выбрать один из n элементов заданного множества.

Поскольку нам необходимо выбрать элементы и на первое место, и на второе, ..., и на k-е, то используем правило произведения и получим **формулу для вычисления числа размещений из n элементов по k с повторениями:**

$$\tilde{A}_n^k = \underbrace{n \cdot n \cdot \ldots \cdot n}_{k \text{ множителей}} = n^k$$

Например, $\tilde{A}_3^2 = 3^2 = 9$ (что совпадает с соответствующим значением, полученным выше).



k мест

Рис. 167

Напомним, что при решении простейших комбинаторных задач важно правильно выбрать формулу, по которой будут проводиться вычисления.

Для этого достаточно выяснить:

— *Учитывается ли порядок следования элементов в соединении?*

— *Все ли заданные элементы входят в полученное соединение?*

Если, например, порядок следования элементов учитывается и из n заданных элементов в соединении используется только k элементов, то по определению — это размещение из n элементов по k. После определения вида соединения следует также выяснить, *могут ли элементы в соединении повторяться*, то есть выяснить, какую формулу необходимо использовать — для количества соединений без повторений или с повторениями.

Примеры решения задач

Задача 1 Найдите количество трехзначных чисел, которые можно составить из цифр 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, если: 1) цифры в числе не повторяются; 2) цифры в числе могут повторяться.

Решение

▶ Количество трехзначных чисел, которые можно составить из семи цифр 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, равно числу размещений из 7 элементов по 3. Тогда получаем количество трехзначных чисел для задания 1:

$$A_7^3 = 7 \cdot 6 \cdot 5 = 210,$$

для задания 2*: $\tilde{A}_7^3 = 7^3 = 343$. ◁

Комментарий

При выборе формулы принимаем во внимание, что для чисел, которые мы будем составлять, порядок следования элементов учитывается и не все элементы выбираются (только 3 цифры из заданных семи). Следовательно, соответствующее соединение — размещение из 7 элементов по 3 (без повторений для задания 1 и с повторениями для задания 2).

Задача 2 Найдите количество трехзначных чисел, которые можно составить из цифр 3, 4, 5, 6, 7, 8, 0, если: 1) цифры в числе не повторяются; 2) цифры в числе могут повторяться.

Решение

▶ 1) Количество трехзначных чисел, которые можно составить из семи цифр (среди которых нет цифры 0), равно числу размещений из 7 элементов по 3, то есть A_7^3.
Но среди данных цифр есть цифра 0, с которой не может начинаться трехзначное число. Поэтому из размещений из 7 элементов по 3 необходимо исключить те размещения, в которых первым элементом является

Комментарий

Выбор формулы производится так же, как и в задаче 1. Следует учесть, что число, составленное из трех цифр, первая из которых цифра 0, не считается трехзначным. Тогда из заданных 7 цифр сначала можно составить все числа, состоящие из 3 цифр (см. задачу 1), а затем из их количества вычесть количество чисел, составленных из трех цифр, начинающихся цифрой 0. В последнем цифра 0. Их количество равно числу размещений из 6 элементов по 2, то есть A_6^2. Следовательно, искомое количество трехзначных чисел равно

$$A_7^3 - A_6^2 = 7 \cdot 6 \cdot 5 - 6 \cdot 5 = 180. \triangleleft$$

▶ 2) На первое место в трехзначном числе мы можем поставить любую цифру, кроме 0, — всего 6 возможностей. Так как цифры в числе могут повторяться, то на второе место можно поставить любую из 7 заданных цифр — имеем 7 возможностей. На третье место снова можно поставить любую из 7 заданных цифр — также 7 возможностей. Поскольку мы должны заполнить и первое место, и второе, и третье, то по правилу произведения получаем, что искомое количество трехзначных чисел равно $6 \cdot 7 \cdot 7 = 294$. ◁

случае из всех цифр без нуля (их 6) мы фактически будем составлять двузначные числа: их количество будет равно числу размещений из 6 элементов по 2 (см. задание 1).

Также можно выполнить непосредственное вычисление, последовательно заполняя три места в трехзначном числе и используя правило произведения (см. задание 2). В этом случае, чтобы сделать рассуждения наглядными, удобно изобразить соответствующие разряды в трехзначном числе в виде клеточек, например так:

1)	6 возможностей	6 возможностей	5 возможностей
2)	6 возможностей	7 возможностей	7 возможностей

Вопросы для контроля

1. Объясните, что называется размещением из n элементов по k: а) без повторений, б) с повторениями. Приведите примеры.
2. Запишите формулу для вычисления числа размещений из n элементов по k: а) без повторений; б) с повторениями. Приведите примеры ее использования.
3. Обоснуйте формулу для вычисления числа размещений из n элементов по k с повторениями.

Упражнения

1. Сколько четырехзначных чисел можно составить из цифр 4, 5, 6, 9, если: 1) цифры в числе не повторяются; 2) цифры в числе могут повторяться?

2. Сколько четырехзначных чисел можно составить из цифр 0, 2, 3, 5, 7, если: 1) цифры в числе не повторяются; 2) цифры в числе могут повторяться?

3. Сколько существует семизначных телефонных номеров, у которых первая цифра отлична от нуля?

4. Сколько разных трехзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5 так, чтобы полученные числа были: 1) четными; 2) кратными 5?

21.1.2. Перестановки с повторениями

Объяснение и обоснование

Если мы будем переставлять цифры в числе 2226 так, чтобы получить разные четырехзначные числа, то получим *перестановки с повторениями*, составленные из трех двоек и одной шестерки: (2, 2, 2, 6), (2, 2, 6, 2), (2, 6, 2, 2), (6, 2, 2, 2) — всего 4 перестановки (соответственно получаем четыре четырехзначных числа: 2226, 2262, 2622, 6222).

Перестановкой с повторениями состава $n = k_1 + k_2 + \ldots + k_m$ из элементов $a_1, a_2, \ldots, a_m$ некоторого множества M называется любая конечная последовательность, состоящая из n элементов, в которую элемент a_1 входит k_1 раз, a_2 входит k_2 раз, ..., a_m входит k_m раз.

Количество перестановок с повторениями из n элементов обозначают $\tilde{P}_n$. Иногда, чтобы подчеркнуть, что в заданной перестановке из n элементов k_1 раз повторяется первый элемент a_1, k_2 раз повторяется второй элемент a_2, ..., k_m раз повторяется m-й элемент a_m (сумма $k_1 + k_2 + \ldots + k_m = n$), используется также обозначение $P(k_1, k_2, \ldots, k_m)$. В частности, в рассмотренном примере можно записать: $\tilde{P}_4 = P(3, 1) = 4$.

Выясним, сколько всего можно составить перестановок с повторениями из n элементов, если в каждой из перестановок k_1 раз повторяется элемент a_1, k_2 раз повторяется элемент a_2, ..., k_m раз повторяется элемент a_m (где $k_1 + k_2 + \ldots + k_m = n$). Составление перестановки представим себе как последовательное заполнение n мест, которые мы будем изображать в виде клеточек (на рисунке 168 изображена одна из таких перестановок). Сначала предположим, что все n элементов, из которых составляется перестановка, разные. Тогда получаем перестановки без повторений, их количество $P_n = n!$. Далее учтем, что при перестановке местами элементов a_1, занимающих какие-то k_1 мест (не обязательно подряд), рассмотренная перестановка не изменится (поскольку мы переставляем одинаковые элементы). Элементы, стоящие на k_1 местах, можно переставить $k_1!$ способами. Подсчитывая общее количество перестановок из n разных элементов, мы пользовались правилом произведения (см. с. 234). Тогда в полученном произведении $n!$, в случае повторения k_1 раз элемента a_1, лишним является произведение $k_1!$. Чтобы избавиться от этого лишнего

$$\overbrace{\underbrace{\boxed{a_1}\boxed{a_1}\boxed{\cdots}\boxed{a_1}}_{k_1\ \text{раз}}\underbrace{\boxed{a_2}\boxed{a_2}\boxed{\cdots}\boxed{a_2}}_{k_2\ \text{раз}}\boxed{\cdots}\underbrace{\boxed{a_m}\boxed{a_m}\boxed{\cdots}\boxed{a_m}}_{k_m\ \text{раз}}}^{n\ \text{мест}}$$

Рис. 168

множителя, достаточно число $n!$ разделить на число $k_1!$. Аналогично, если элемент a_2 повторяется k_2 раз, то в полученном произведении $n!$ лишним является произведение $k_2!$. Чтобы избавиться от этого множителя, достаточно число $n!$ разделить на число $k_2!$. Повторяя эти рассуждения m раз, получаем, что **количество перестановок с повторениями из n элементов, в каждой из которых k_1 раз повторяется элемент a_1, k_2 раз повторяется элемент a_2, ..., k_m раз повторяется элемент a_m (где $k_1 + k_2 + \ldots + k_m = n$), равно**

$$\tilde{P}_n = P(k_1, k_2, \ldots, k_m) = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_m!}.$$

Например, количество перестановок с повторениями, составленных из трех двоек и одной шестерки, равно $\tilde{P}_4 = P(3, 1) = \frac{4!}{3! \cdot 1!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1} = 4$ (что совпадает со значением, полученным выше с помощью непосредственного вычисления количества таких перестановок).

Примеры решения задач

Задача Найдите количество разных четырехзначных чисел, которые можно получить при перестановке цифр 1, 1, 4, 4.

Решение

► Искомое количество четырехзначных чисел равно

$$\tilde{P}_4 = P(2; 2) = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2} = 6. \quad \triangleleft$$

Комментарий

Поскольку порядок элементов учитывается и для получения четырехзначного числа необходимо использовать все элементы, то искомое соединение — это перестановки с повторениями из 4 элементов. Их количество $\tilde{P}_4$ вычисляется по приведенной выше формуле, при этом учитывается состав этих перестановок: $k_1 = 2$ (2 цифры 1), $k_2 = 2$ (2 цифры 4), $n = k_1 + k_2 = 2 + 2 = 4$.

Вопросы для контроля

1. Объясните, что называется перестановкой из n элементов: а) без повторений; б) с повторениями. Приведите примеры.
2. Запишите формулу для вычисления числа перестановок из n элементов: а) без повторений; б) с повторениями. Приведите примеры ее использования.
3. Обоснуйте формулу для вычисления числа перестановок из n элементов с повторениями.

Упражнения

1. Сколько различных пятизначных чисел можно составить при перестановке цифр: 2, 2, 3, 3, 5?

2. Сколько шестизначных чисел можно составить:
1) из двух цифр 5 и четырех цифр 7; 2) из трех цифр 5 и трех цифр 7?

3. Найдите сумму цифр всех четырехзначных чисел, которые можно составить при перестановке цифр 0, 0, 6, 6.

4. Сколькими способами можно разложить 28 предметов в 4 разных ящика так, чтобы в каждом ящике было 7 предметов?

21.1.3. Сочетания с повторениями

Объяснение и обоснование

Пусть задано n-элементное множество (то есть множество, содержащее n разных элементов). Будем составлять наборы, содержащие k элементов этого множества (один и тот же элемент может входить в набор несколько раз). Два таких набора будем считать одинаковыми тогда и только тогда, когда они имеют одинаковый состав (не учитывая порядок следования элементов в наборе). Такие наборы назовем *сочетаниями с повторениями из n элементов по k*. Таким образом,

если задано n-элементное множество, то *сочетаниями с повторениями из n элементов по k* называются наборы, в каждый из которых входит k заданных элементов (не обязательно разных), отличающихся только составом элементов (хотя бы одним элементом).

Например, из двух букв $\{a;\ b\}$ можно составить следующие сочетания с повторениями по четыре элемента: $aaaa$, $aaab$, $aabb$, $abbb$, $bbbb$. (Отметим, что, в соответствии с принятой выше договоренностью, например, наборы $aaab$ и $abaa$ одинаковы, поскольку они имеют одинаковый состав — три буквы a и одну букву b.)

Количество сочетаний с повторениями из n элементов по k обозначим $\tilde{C}_n^k$. Как видим, $\tilde{C}_2^4 = 5$.

Выясним, сколько всего можно составить сочетаний с повторениями из n элементов по k. Составление сочетания представим себе как заполнение (в любом порядке) k мест, которые мы будем изображать в виде клеточек (рис. 169). Повторение элемента представим себе как его копирование и помещение копии этого элемента на соответствующем месте. Для того чтобы в последнюю клеточку мы могли поместить любой из заданных n элементов, в предыдущие $k - 1$ клеточки мы долж-

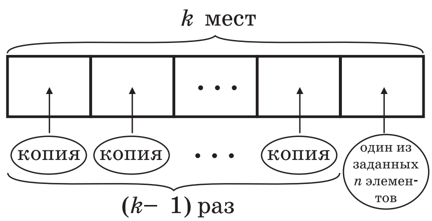


Рис. 169

ны поместить копии выбранных элементов (см. рис. 169). Но тогда мы должны фактически поместить $n + k - 1$ элементов (n заданных элементов и еще $k - 1$ копию) без повторений на k мест (не учитывая порядок следования элементов), а это можно сделать C_{n+k-1}^{k} способами. Следовательно,

$$\tilde{C}_n^k = C_{n+k-1}^k.$$

Например, $\tilde{C}_2^4 = C_{2+4-1}^4 = C_5^4 = \frac{5!}{4!(5-4)!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 1} = 5$ (что совпадает со значением, полученным выше с помощью непосредственного подсчета количества таких сочетаний с повторениями).

Примеры решения задач

Задача В почтовом отделении продаются открытки 5 видов. Найдите количество способов покупки 7 открыток.

Решение

Искомое число способов равно числу сочетаний с повторениями из 5 элементов по 7, то есть

$$\tilde{C}_5^7 = C_{5+7-1}^7 = C_{11}^7 = \frac{11!}{7!\cdot 4!} = \frac{11\cdot 10\cdot 9\cdot 8}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = 330.$$

Комментарий

При выборе открыток порядок их следования не учитывается, значит, соответствующие соединения — сочетания. Условие задачи не запрещает покупать одинаковые открытки, следовательно, используем формулу для числа сочетаний с повторениями: $\tilde{C}_n^k = C_{n+k-1}^k$.

Вопросы для контроля

1. Объясните, что называется сочетаниями из n элементов по k: а) без повторений; б) с повторениями. Приведите примеры.
2. Запишите формулу для вычисления числа сочетаний из n элементов по k: а) без повторений; б) с повторениями. Приведите примеры ее использования.
3. Обоснуйте формулу для вычисления числа сочетаний из n элементов по k с повторениями.

Упражнения

1. Сколько существует треугольников, длины сторон которых принимают любые три из следующих значений: 4, 5, 6, 7?

2. В почтовом отделении продаются открытки 10 видов. Сколькими способами можно купить в этом отделении: а) 12 открыток; б) 8 открыток? Сколькими способами можно купить 8 различных открыток?

3. Сколько можно построить разных прямоугольных параллелепипедов, длины ребер которых выражаются натуральными числами от 1 до 10?

21.2. Решение более сложных комбинаторных задач

При решении комбинаторных задач с выбором нескольких элементов приходится выяснять, каким правилом (суммы или произведения — см. с. 234) необходимо пользоваться, а после этого определять, по каким формулам можно вычислить количество соответствующих соединений. Схема таких рассуждений приведена в таблице 36 на с. 343.

Напомним, что в случае, когда нам приходится выбирать набор, в который входит **и первый, и второй, и третий, и т. д. элементы**, способы выбора каждого элемента надо **перемножать**, а если приходится выбирать **или первый элемент, или второй, или третий и т. д. элемент**, способы выбора каждого элемента надо **складывать**.

При выборе формулы для подсчета количества соответствующих соединений следует иметь в виду, что в определении только одного вида соединений — сочетаний — не учитывается порядок следования элементов. А те соединения, где учитывается порядок следования элементов (размещения и перестановки), отличаются тем, что в перестановки входят все заданные элементы, а в размещения — не все (конечно, за исключением того случая, когда мы рассматриваем перестановки как частный случай размещения).

Таким образом, как уже отмечалось, для выбора соответствующей формулы достаточно дать ответ на два вопроса (см. схему на с. 233).

— Учитывается ли порядок следования элементов в соединении? (Если «нет», то это сочетания; если «да», то отвечаем на второй вопрос.)

— Все ли элементы входят в соединение? (Если «да», то это перестановки, если «нет», то это размещения.)

Кроме того, чтобы выбрать соответствующую формулу для соединений (без повторений или с повторениями) необходимо дополнительно выяснить, могут ли элементы в соединении повторяться. Приведем примеры таких рассуждений (простейшие примеры были приведены в § 18).

Задача 1 Собрание из 60 членов выбирает председателя, секретаря и трех членов редакционной комиссии по подготовке проекта постановления собрания. Сколькими способами это можно сделать?

Решение

1) Поскольку надо выбрать и председателя, и секретаря, и членов редакционной комиссии, то будем использовать правило произведения.

2) Сначала выберем председателя и секретаря. Задаем себе вопрос: «Учитывается ли порядок следования элементов?» Ответ: «Да» (потому что первый выбранный будет председателем, а второй — секретарем собрания). Задаем себе второй вопрос: «Все ли элементы входят в соединение?» Ответ: «Нет» (потому что выбираем двух из 60 человек). Следовательно,

соответствующее соединение будет размещением (без повторений) из 60 элементов по 2, и число таких размещений равно A_{60}^2.

Аналогично выбираем трех членов редакционной комиссии (из оставшихся 58 членов). Снова задаем себе вопрос: «Учитывается ли порядок элементов?» Ответ: «Нет» (потому что независимо от того, в каком порядке будут выбраны члены редакционной комиссии, они все будут выполнять одну и ту же работу). Значит, соответствующее соединение будет сочетанием (без повторений) из 58 элементов по 3, и число таких сочетаний равно C_{58}^3.

Тогда выбор и председателя, и секретаря, и трех членов редакционной комиссии выполняется $A_{60}^2 \cdot C_{58}^3$ способами, то есть

$$A_{60}^2 \cdot C_{58}^3 = \frac{60!}{(60-2)!} \cdot \frac{58!}{3! \cdot (58-3)!} = 10 \cdot 59 \cdot 58 \cdot 57 \cdot 56 = 109\,230\,240. \; \triangleleft$$

З а м е ч а н и е. Как уже отмечалось, ответ к этой задаче можно не записывать в виде числа, а оставить в виде $A_{60}^2 \cdot C_{58}^3$.

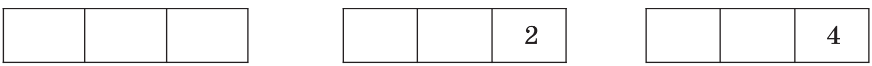
Некоторые комбинаторные задачи связаны с цифровой записью числа. Анализируя условие и требование таких задач, часто удобно изображать позиции, которые может занимать каждая цифра, в виде пустых клеточек (рис. 170, *а–в*).

Задача 2 Сколько четных трехзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5:

1) если цифры в числе не повторяются;
2) если цифры повторяются?

Р е ш е н и е

▶ Чтобы число было четным, последняя его цифра должна быть четной, то есть из заданных цифр это 2 (рис. 169, *б*) или 4 (рис. 169, *в*).



а *б* *в*

Рис. 170

Поскольку условию задачи удовлетворяет или первый вариант (последняя цифра 2), или второй (последняя цифра 4), то применим правило суммы. Вычислим количество четных трехзначных чисел в каждом варианте. Задаем себе вопрос: «Учитывается ли порядок следования элементов?» Ответ: «Да» (потому что, например, числа 352 и 532 — разные). Задаем второй вопрос: «Все ли элементы входят в соединение»? Ответ: «Нет» (потому что у нас только два свободных места, а на них «претендуют» 4 цифры (или 5 — если цифры могут повторяться). Следовательно, имеем дело с размещениями: 1) из четырех элементов по два (без повторений) — A_4^2; 2) из пяти элементов по два (с повторениями) — $\tilde{A}_5^2$.

Количество возможных трехзначных чисел, оканчивающих на 2 и на 4 (см. рис. 170, *б* и *в*), одинаково, поэтому по правилу суммы общее количество четных трехзначных чисел будет следующим:

1) $2A_4^2 = 2\cdot\dfrac{4!}{(4-2)!} = 2\cdot\dfrac{4!}{2!} = 24;$ 2) $2\tilde{A}_5^2 = 2\cdot 5^2 = 50.$ ◁

Задача 3 Лифт, в котором находится 9 пассажиров, может останавливаться на 10 этажах. Пассажиры выходят группами по два, три и четыре человека. Сколькими способами эти группы пассажиров могут выходить из лифта на указанных этажах?

Решение

▶ Так как по условию 9 пассажиров выходят группами по 2, 3 и 4 человека, то лифт должен сделать 3 остановки, чтобы вышли все пассажиры (2 + + 3 + 4 = 9). Отдельно подсчитаем количество способов разделения пассажиров на три группы (по 2, 3 и 4 человека) и отдельно — количество способов выбора трех остановок лифта. Для решения задачи необходимо выбрать и группы пассажиров, и этажи для их выхода, следовательно, будем применять правило произведения.

Из 9 пассажиров можно выбрать группу из 2 человек (не учитывая порядок их выбора, поскольку они выходят на одном этаже) C_9^2 способами. Из семи оставшихся пассажиров можно выбрать группу из 3 человек C_7^3 способами. После этого останется 1 группа из 4 членов (формально ее можно выбрать $C_4^4 = 1$ способом). Следовательно, группы пассажиров можно составить $C_9^2 C_7^3 C_4^4$ способами.

Три остановки из 10 этажей можно выбрать A_{10}^3 способами (порядок учитывается, поскольку группы могут выходить в разном порядке). Тогда искомое число равно $A_{10}^3 C_9^2 C_7^3 C_4^4 = \dfrac{10!}{7!}\cdot\dfrac{9!}{2!\cdot 7!}\cdot\dfrac{7!}{3!\cdot 4!}\cdot 1 = \dfrac{10!}{4}.$ ◁

Обратим внимание, что для решения многих комбинаторных задач главным является не столько знание комбинаторных формул, сколько умение построить целесообразную математическую модель заданной ситуации.

Задача 4 В некотором сказочном королевстве не было двух людей с одинаковым набором зубов. Каким может быть максимальное количество жителей этого королевства, если у человека 32 зуба?

Решение

▶ Пронумеруем все зубы, которые должны быть у человека, числами от 1 до 32. Изобразим набор зубов у каждого жителя королевства в виде 32 клеточек (рис. 171) и в каждую клеточку поставим цифру 1, если на этом месте у рассматриваемого жителя зуб есть, и цифру 0, если на этом месте у него зуба нет (на рисунке изображен один из возможных наборов зубов).

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	1	0	1	1	0	1	1	1	0	0	1	0	1	0	0

0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	0	1	1
17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32

Рис. 171

Тогда каждый житель королевства будет закодирован некоторой упорядоченной последовательностью из 32 нулей и единиц. По условию, в королевстве нет людей с одинаковыми наборами зубов, поэтому максимальное количество людей в королевстве равно количеству таких наборов. Эти наборы являются размещениями с повторениями из двух элементов (0 и 1) по 32. Следовательно, их количество равно $\tilde{A}_2^{32} = 2^{32}$. Таким образом, максимальное количество людей в сказочном королевстве может равняться 2^{32} (это приблизительно $4 \cdot 10^9$). ◁

Упражнения

1. Сколько существует шестизначных чисел, которые делятся на 5, если:
1) цифры в числе не повторяются;
2) цифры в числе могут повторяться?

2. На одной из параллельных прямых даны 100 точек, а на другой — 200. Сколько существует треугольников с вершинами в этих точках?

3. Сколько существует семизначных чисел, в которых каждые две соседние цифры разной четности?

4. Сколькими способами можно выбрать 4 карты из колоды в 36 карт, чтобы выбранные карты были: 1) одной масти; 2) двух мастей; 3) трех мастей; 4) четырех мастей?

5. Сколько трехзначных чисел, кратных 3, можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, если:
1) цифры в числе не повторяются;
2) цифры в числе могут повторяться?

6. Четыре стрелка должны поразить восемь мишеней (каждый по две). Сколькими способами они могут распределить мишени между собой?

7. Поезд метро делает 16 остановок, на которых выходят все пассажиры (каждый на своей). Сколькими способами могут распределиться между этими остановками 100 пассажиров, вошедших в поезд на станции, с которой начинается движение?

8. В шахматном кружке 2 девочки и 7 мальчиков. Для участия в соревнованиях надо составить команду из четырех человек, в которую обязательно должна войти хотя бы одна девочка. Сколькими способами это можно сделать?

9. Сколькими способами можно разложить 20 одинаковых шаров в 6 разных ящиков, если:
1) ни один ящик не должен быть пустым;
2) некоторые ящики могут быть пустыми?

10. Сколькими способами натуральное число n можно представить в виде суммы k натуральных слагаемых (суммы, отличающиеся порядком слагаемых, считаются разными)?

§22 КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

22.1. Алгебраическая форма комплексного числа

Таблица 37

1. Понятие комплексного числа	
Определение	Обозначения и термины
Комплексными числами **называются числа вида $a + bi$, где a и b — действительные числа ($a \in R$, $b \in R$), i — некоторое (не действительное) число, квадрат которого равен -1:** $$i^2 = -1.$$	$z = a + bi$ — комплексное число, a — действительная часть комплексного числа (также обозначают $a = \mathbf{Re}\, z$), bi — мнимая часть комплексного числа, b — коэффициент при мнимой части (также обозначают $b = Im\, z$), i — мнимая единица. **Действительное число a считается равным комплексному числу $a + 0i$**, то есть $a = a + 0i$, где $a \in R$, в частности, $$0 = 0 + 0i.$$ **Числа $z = a + bi$ и $\bar{z} = a - bi$ называются *сопряженными комплексными числами.***
2. Равенство комплексных чисел	
Определение	Пример
Два комплексных числа называются *равными*, если равны их действительные части и равны коэффициенты при мнимых частях	$$a + bi = c + di \Leftrightarrow \begin{cases} a = c, \\ b = d \end{cases}$$ $(a, b, c, d \in R)$ Если $2 + xi = y + 5i$, то $y = 2$, $x = 5$.

Продолж. табл. 37

3. Действия над комплексными числами в алгебраической форме

Ориентир	Пример	Запись в общем виде (определение)
Арифметические действия (сложение, вычитание, умножение и деление) над комплексными числами выполняются как действия над обыкновенными буквенными выражениями (одночленами и двучленами), но с учетом того, что $i^2 = -1$.	*Сложение*	
	$(6 + 7i) + (3 - 5i) = 6 + 3 + 7i - 5i = 9 + 2i$	$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$
	Вычитание	
	$(9 + 2i) - (3 - 5i) = 9 - 3 + 2i + 5i = 6 + 7i$	$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$
	Умножение	
	$(3 + 2i) \cdot (4 + 3i) = 12 + 9i + 8i + 6i^2 =$ (заменяем i^2 на -1) $= 12 + 17i - 6 = 6 + 17i$	$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$
Выполняя деление комплексных чисел, удобно сначала умножить числитель и знаменатель на число, сопряженное знаменателю.	*Деление*	
	$\frac{6+17i}{4+3i} = \frac{(6+17i)(4-3i)}{(4+3i)(4-3i)} = \frac{24-18i+68i-51i^2}{16-9i^2} = \frac{24+50i+51}{16+9} = \frac{75+50i}{25} = 3+2i$	$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$

4. Свойства сопряженных чисел

Если $z = a + bi$, $\bar{z} = a - bi$, где $a \in R$, $b \in R$, то

$z + \bar{z} = 2a \in R$,

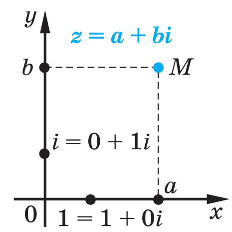
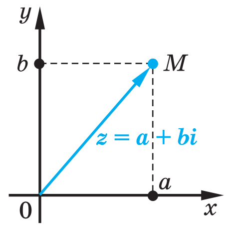
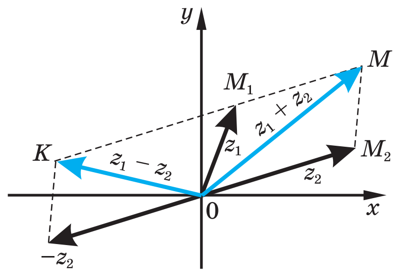
$z \cdot \bar{z} = a^2 - b^2 i^2 = a^2 + b^2 \in R$.

Сумма и произведение двух сопряженных комплексных чисел являются действительными числами.

5. Нахождение степеней числа i

$i^0 = 1$	$i^1 = i$	$i^2 = -1$	$i^3 = i^2 \cdot i = -i$
$i^4 = (i^2)^2 = 1$	$i^5 = i^4 \cdot i = i$	$i^6 = i^4 \cdot i^2 = -1$	$i^7 = i^4 \cdot i^3 = -i$
$i^8 = (i^4)^2 = 1$			
...	...	...	...
$i^{4k} = 1$	$i^{4k+1} = i^{4k} \cdot i = i$	$i^{4k+2} = i^{4k} \cdot i^2 = -1$	$i^{4k+3} = i^{4k} \cdot i^3 = -i$

Продолж. табл. 37

6. Геометрическое изображение комплексных чисел		
в виде точек на координатной плоскости	в виде векторов на координатной плоскости	
		
Геометрическое изображение комплексных чисел устанавливает взаимно однозначное соответствие		$z_1 = a_1 + b_1 i \leftrightarrow \overline{OM_1}$ $z_2 = a_2 + b_2 i \leftrightarrow \overline{OM_2}$
между комплексными числами и точками плоскости (которая называется *комплексной плоскостью*)	**между комплексными числами и радиус-векторами** (векторами, отложенными от начала координат)	$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i \leftrightarrow \overline{OM}$ $z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i \leftrightarrow \overline{OK}$
$z = a + bi \leftrightarrow M\ (a;\ b)$	$z = a + bi \leftrightarrow \overline{OM}$	

Объяснение и обоснование

1. Расширение понятия числа. Понятие комплексного числа. Рассмотрим, как может происходить расширение понятия числа. Простейшим числовым множеством является множество ***N*** *натуральных чисел*. В этом множестве всегда можно выполнить действия сложения и умножения (то есть сумма двух натуральных чисел является натуральным числом и произведение двух натуральных чисел является натуральным числом). Вычитание выполняется не всегда ($5 - 3 = 2$, а разность $3 - 5$ не выражается натуральным числом).

Чтобы действие вычитания можно было выполнять всегда, необходимо расширить множество натуральных чисел, дополнить его отрицательными числами и нулем. В результате такого расширения получили множество ***Z*** *целых чисел*.

Однако во множестве целых чисел не всегда можно выполнить действие деления. Чтобы действие деления (на число, не равное нулю) всегда выполнялось, необходимо расширить множество целых чисел, дополнить его множеством всех обыкновенных дробей (то есть числами вида $\frac{m}{n}$, где m и n — целые числа и $n \neq 0$). В результате такого расширения мы получаем множество Q *рациональных чисел*. В этом множестве всегда можно выполнить действия сложения, вычитания, умножения и деления (кроме деления на нуль).

В множестве рациональных чисел не всегда можно выполнить действие извлечения корня из положительного числа (например, $\sqrt{2}$ не является рациональным числом). Чтобы действие извлечения корня из положительного числа всегда выполнялось, необходимо расширить множество рациональных чисел, дополнить его *иррациональными числами*. В результате такого расширения мы получаем множество $\boldsymbol{R}$ *действительных чисел*. В этом множестве, кроме действий сложения, вычитания, умножения и деления (за исключением деления на нуль), также всегда можно выполнить действие извлечения квадратного корня из неотрицательного числа. Отметим, что каждое расширение множества чисел проводят таким образом, чтобы в новом множестве выполнялись все законы действий, которые выполнялись в предыдущем множестве.

Однако во множестве действительных чисел нельзя извлечь квадратный корень из отрицательного числа, то есть во множестве действительных чисел нельзя решить даже такие простейшие, на первый взгляд, уравнения, как $x^2+1=0$, $x^2+9=0$ и др. Таким образом, мы приходим к необходимости расширить множество действительных чисел, присоединив к нему новые числа, такие, чтобы в новом множестве C так называемых комплексных чисел всегда можно было извлечь квадратный корень (или корень n-й степени) не только из положительного, но и из отрицательного числа.

Обратим внимание, что для того чтобы извлечь квадратный корень из отрицательного числа, достаточно уметь извлекать квадратный корень из (-1). Тогда, например, если выполняются известные правила действий, то $\sqrt{-9}=\sqrt{9\cdot(-1)}=\sqrt{9}\cdot\sqrt{-1}=3\sqrt{-1}$.

Число нового вида $\sqrt{-1}$ принято обозначать знаком i (буквой i) и называть *мнимой единицей* (i — первая буква латинского слова *imaginarius* — мнимый). По определению квадратного корня, квадрат числа i равен (-1), то есть $i^2=-1$ (это равенство примем за определение числа i). С помощью нового числа можно записать значение квадратного корня из любого отрицательного числа, например, $\sqrt{-16}=\sqrt{16\cdot(-1)}=\sqrt{16}\cdot\sqrt{-1}=4i$*. Тогда выражение $2+\sqrt{-16}$ может быть записано так: $2+4i$.

Мы получили выражение $a+bi$, где a и b — действительные числа. Числа такого вида называются *комплексными числами*. Таким образом,

***комплексными числами* называются числа вида $a+bi$, где a и b — действительные числа ($a\in R$, $b\in R$), i — некоторое (не действительное) число, квадрат которого равен -1: $i^2=-1$.**

---

* Для комплексных чисел знак $\sqrt{\ }$ уже не является знаком только арифметического квадратного корня, поэтому $\sqrt{-1}=\pm i$ (поскольку $(\pm i)^2=i^2=-1$), $\sqrt{-16}=\pm 4i$, а $2+\sqrt{-16}=2\pm 4i$. Более подробно операция извлечения корня n-й степени из комплексного числа рассмотрена на с. 366.

В комплексном числе $a+bi$ число a называется *действительной частью,* а выражение bi называется *мнимой частью* (b — коэффициент при мнимой части).

При $a = 0$ мы получаем комплексное число вида $0 + bi = bi$, называемое *чисто мнимым числом.*

При $b = 0$ мы получаем комплексное число $a + 0i = a$, то есть действительное число. Таким образом, ***действительные числа являются частью множества комплексных чисел.*** Например, $5 + 0i = 5$, $0 + 0i = 0$.

2. Понятие равенства комплексных чисел и операции над комплексными числами.

Два комплексных числа называются равными, если равны их действительные части и коэффициенты при мнимых частях,

то есть $a + bi = c + di$, тогда и только тогда, когда $a = c$ и $b = d$.

Например, равенство $2 + xi = y - 5i$ при действительных x и y возможно только при

$$y = 2 \text{ и } x = -5.$$

Действия сложения, вычитания и умножения над комплексными числами выполняются по тем же законам, что и над действительными. Это позволяет пользоваться следующим ориентиром: ***для практического выполнения действий над комплексными числами достаточно выполнять эти операции так, как будто выражение (a + bi) является не комплексным числом, а двучленом. (При этом необходимо учитывать, что i — это не переменная, а определенное число, такое, что $i^2 = -1$, поэтому в результате умножения необходимо заменить i^2 на (−1).)***

Для того чтобы иметь право пользоваться этим ориентиром, необходимо соответствующим образом дать определение действий над комплексными числами.

1) *Сложение комплексных чисел.* Пусть $z_1 = 2 + 3i$, $z_2 = 7 + 4i$.
Тогда $z_1 + z_2 = (2 + 7) + (3+4)i = 9 + 7i$. Запись выполнения соответствующей операции в общем виде и является *определением суммы двух комплексных чисел*.

Если $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$, то *суммой* этих комплексных чисел называется комплексное число $z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)\, i$.

Отметим, что, как и для действительных чисел,

$$z_1 + 0 = (a + bi) + (0 + 0i) = a + bi = z_1.$$

2) *Вычитание комплексных чисел.* Пусть $z_1 = 9 + 7i$, $z_2 = 2 + 3i$.
Тогда $z_1 - z_2 = (9 - 2) + (7 - 3)\, i = 7 + 4i$. Если обозначить разность рассмотренных чисел через $z_3 = z_1 - z_2 = 7 + 4i$, то $z_3 + z_2 = (7 + 4i) + (2 + 3i) = 9 + 7i = z_1$. Поэтому для *определения действия вычитания* достаточно знать определения суммы и равенства комплексных чисел.

***Разностью* двух комплексных чисел $z_1 = a + bi$ и $z_2 = c + di$ называется такое комплексное число $z_3 = x + yi$, которое в сумме с z_2 дает z_1.**

Если $z_3 + z_2 = z_1$, то $(x + c) + (y + d)\, u = a + bi$. Согласно определению равенства комплексных чисел $x + c = a$, $y + d = b$. Тогда $x = a - c$, $y = b - d$. Таким образом, $z_1 - z_2 = x + yi = (a - c) + (b - d)\, i$.

3) *Умножение комплексных чисел*. Пусть $z_1 = 2 + 3i$, $z_2 = 7 + 4i$.
Тогда $z_1 \cdot z_2 = (2 + 3i) \cdot (7 + 4i) = 14 + 8i + 21i + 12i^2$. Заменяя i^2 на (-1) получаем: $z_1 \cdot z_2 = 14 + 29i - 12 = 2 + 29i$.
Запись выполнения соответствующей операции в общем виде и является *определением произведения двух комплексных чисел*.

Если $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$, то *произведением* этих комплексных чисел называется комплексное число $z_1 \cdot z_2 = (ac - bd) + (ad + bc)\,i$.

Как и для действительных чисел, *возведение комплексного числа в натуральную степень* сводится к последовательному умножению числа на себя (при этом, как всегда при умножении, i^2 необходимо заменить на -1). Например, $i^3 = i \cdot i \cdot i = i^2 \cdot i = -i$, $i^4 = i \cdot i \cdot i \cdot i = (i^2)^2 = (-1)^2 = 1$.

Примем по определению $i^0 = 1$ (а также при $z \neq 0$ $z^0 = 1$).

Тогда, учитывая, что $i^4 = 1$, получаем:

$i^{4k} = (i^4)^k = 1^k = 1$, $i^{4k+1} = i^{4k} \cdot i = i$, $i^{4k+2} = i^{4k} \cdot i^2 = -1$, $i^{4k+3} = i^{4k} \cdot i^3 = -i$.

Например, $i^{23} = i^{20} \cdot i^3 = -i$, $i^{102} = i^{100} \cdot i^2 = -1$.

Обратим внимание, что при возведении комплексного числа $a + bi$ в квадрат или в куб можно использовать соответствующие формулы сокращенного умножения (заменяя i^2 на -1). Например, $(1 + i)^3 = 1 + 3i + 3i^2 + i^3 =$
$= 1 + 3i - 3 - i = -2 + 2i$.

Введем также понятие *сопряженных комплексных чисел*, которые нам будут необходимы для практического выполнения деления комплексных чисел.

Числа $z = a + bi$ и $\overline{z} = a - bi$ называют *сопряженными* комплексными числами.

Например, числа $z = 2 + 5i$ и $\overline{z} = 2 - 5i$ — сопряженные. Найдем сумму и произведение этих чисел:

$z + \overline{z} = (2 + 5i) + (2 - 5i) = 4$ — действительное число,

$z \cdot \overline{z} = (2 + 5i) \cdot (2 - 5i) = 4 - 25i^2 = 4 + 25 = 29$ — действительное число.

Сумма и произведение двух сопряженных комплексных чисел являются действительными числами.

Если $z = a + bi$, $\overline{z} = a - bi$, где $a \in \boldsymbol{R}$, $b \in \boldsymbol{R}$, то

$z + \overline{z} = 2a$ — действительное число ($2a \in \boldsymbol{R}$).

$z \cdot \overline{z} = a^2 - b^2 i^2 = a^2 + b^2 \in \boldsymbol{R}$.

4) *Деление комплексных чисел*. Пусть необходимо разделить $z_1 = 2 + 29i$ на $z_2 = 2 + 3i$. Запишем деление с помощью черты дроби и, пользуясь основным свойством дроби, умножим числитель и знаменатель на число, сопряженное знаменателю (чтобы получить в знаменателе действительное число):

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2 + 29i}{2 + 3i} = \frac{(2 + 29i)(2 - 3i)}{(2 + 3i)(2 - 3i)} = \frac{4 - 6i + 58i - 87i^2}{4 - 9i^2} = \frac{4 + 52i + 87}{4 + 9} = \frac{91 + 52i}{13} = 7 + 4i.$$

На с. 360 (п. 3) мы получили, что $(2+3i)(7+4i)=2+29i$. Следовательно, и в множестве комплексных чисел операцию деления можно проверять с помощью операции умножения.

В общем виде деление комплексных чисел выполняется так:

$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i. \quad (1)$$

Обратим внимание, что строгое получение формулы (1) опирается на *определение частного комплексных чисел*, аналогичное определению их разности.

Частным **двух комплексных чисел $z_1=a+bi$ и $z_2=c+di$ ($z_2\neq 0$) называется такое комплексное число $z_3=x+yi$, которое при умножении на z_2 дает z_1.**

Из этого определения получаем, что $z_3\cdot z_2=z_1$. То есть $(x+yi)(c+di)=a+$ $+bi$. Тогда по определению равенства комплексных чисел $\begin{cases} xc-yd=a, \\ xd+yc=b. \end{cases}$ Умножим первое уравнение системы на c, а второе — на d и сложим полученные уравнения. Имеем $x(c^2+d^2)=ac+bd$. Поскольку $z_2\neq 0$, то $c^2+d^2\neq 0$, следовательно, $x=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}$. Аналогично, если первое уравнение умножить на d, а второе — на c и вычесть из второго уравнения первое, получим $y(c^2+d^2)=$ $=bc-ad$, следовательно, $y=\frac{bc-ad}{c^2+d^2}$. Тогда $\frac{z_1}{z_2}=z_3=x+yi=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$, что совпадает с результатом, полученным по формуле (1).

Таким образом, мы обосновали корректность использования приведенного практического ориентира для выполнения действий над комплексными числами.

Из приведенных определений операций над комплексными числами следует справедливость для комплексных чисел тех основных свойств операций сложения и умножения, которые выполнялись для действительных чисел (проверьте это самостоятельно).

Свойства сложения

1) $z+w=w+z$;
2) $(z+w)+t=z+(w+t)$;
3) $z+0=z$ $\quad (0=0+0i)$;
4) **Для каждого комплексного числа $z=a+bi$ существует противоположное число ($-z=-a-bi$), такое, что**

$$z+(-z)=0;$$

Свойства умножения

1′) $zw=wz$;
2′) $(zw)t=z(wt)$;
3′) $z\cdot 1=z$ $\quad (1=1+0i)$;
4′) **Для каждого комплексного числа $z\neq 0$ существует обратное ему число $\frac{1}{z}$ такое, что $z\cdot\frac{1}{z}=1$.** Например, для комплексного числа $z=c+di$ по формуле (1) имеем

$$\frac{1}{z}=\frac{c}{c^2+d^2}-\frac{d}{c^2+d^2}i.$$

5) **Операции сложения и умножения комплексных чисел объединены распределительным законом**

$$(z + w)\,t = zt + wt.$$

Для множества действительных чисел эти основные свойства 1–5 (их еще называют аксиомами поля действительных чисел) определяют все остальные свойства действительных чисел (кроме свойств упорядоченности и непрерывности, которые определяются в поле действительных чисел другими аксиомами). Поскольку основные свойства 1–5 выполняются и для комплексных чисел, то все тождества, которые вы знаете из курса алгебры, остаются справедливыми и в множестве комплексных чисел. Например,

$$(z + w)^3 = z^3 + 3z^2w + 3zw^2 + w^3.$$

3. Геометрическое изображение комплексных чисел. Каждое комплексное число $z = a + bi$ ($a \in \boldsymbol{R}$, $b \in \boldsymbol{R}$) можно изобразить точкой M на координатной плоскости с координатами $(a; b)$ (рис. 172). И наоборот, каждую точку $M\ (a; b)$ координатной плоскости можно считать изображением комплексного числа $z = a + bi$. В таком случае говорят, что геометрическое изображение комплексных чисел в виде точек координатной плоскости устанавливает взаимно однозначное соответствие между комплексными числами и точками плоскости (эту плоскость называют *комплексной плоскостью*).

Действительные числа $a = a + 0i$ изображаются точками с координатами $(a; 0)$, которые находятся на оси абсцисс. Поэтому эта ось комплексной плоскости называется действительной осью. Чисто мнимые числа $bi = 0 + bi$ изображаются точками с координатами $(0; b)$, которые находятся на оси ординат. Поэтому эта ось комплексной плоскости называется мнимой осью.

Также комплексное число $z = a + bi$ на координатной плоскости можно изображать в виде так называемого радиус-вектора $\overline{OM}$ (вектора с началом в начале координат и концом в точке $M\ (a; b)$ — то есть в виде вектора $\overline{OM}$ с координатами $(a; b)$) (рис. 173). Такое изображение также устанавливает взаимно однозначное соответствие между комплексными числами и соответствующими радиус-векторами. С помощью последнего изображения можно проиллюстрировать, что нахождение суммы и разности комплексных чисел — это просто нахождение суммы и разности соответствующих векторов (рис. 174), поскольку при сложении векторов соответствую-

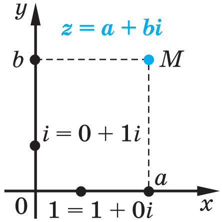


Рис. 172

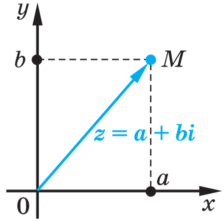


Рис. 173

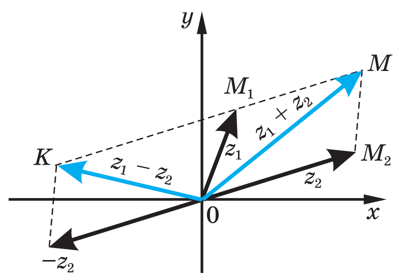


Рис. 174

щие координаты складываются, а при вычитании — вычитаются (см. табл. 37).

З а м е ч а н и е. Геометрическое изображение действительных чисел на числовой прямой позволяет легко сравнивать действительные числа: из двух чисел на числовой прямой больше то, которое изображено правее (и меньше то, которое изображено левее). Но для комплексных чисел, изображаемых точками на координатной плоскости, мы не можем сказать, какая точка расположена левее, а какая правее (поскольку рассматривается не одна, а две координаты). Поэтому для комплексных чисел не вводится понятие «больше» или «меньше», то есть нельзя, например, сказать, какое из комплексных чисел больше: $3 + 2i$ или $2 + 5i$.

Отметим, что введение комплексных чисел позволяет решать *квадратные уравнения с отрицательным дискриминантом* (которые в множестве действительных чисел не имели корней). Во множестве комплексных чисел знак $\sqrt{\ }$ уже не является знаком только арифметического квадратного корня, поэтому, например, $\sqrt{-1} = \pm i$ (поскольку $(\pm i)^2 = i^2 = -1$), $\sqrt{-4} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{-1} = \pm 2i$, $\sqrt{-7} = \sqrt{7} \cdot \sqrt{-1} = \pm i\sqrt{7}$. (Как будет показано далее (с. 374), квадратный корень из комплексного числа имеет только два значения, поэтому других значений записанные квадратные корни не имеют.) Учитывая это, найдем корни квадратных уравнений с помощью известных формул.

Пример Решите уравнение: 1) $x^2 - 2x + 5 = 0$, 2) $x^2 - 3x + 4 = 0$.

▶ 1) $x^2 - 2x + 5 = 0$, тогда $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1-5} = 1 \pm \sqrt{-4} = 1 \pm 2i$. Следовательно,

$$x_1 = 1 + 2i,\ x_2 = 1 - 2i. \quad \triangleleft$$

▶ 2) $x^2 - 3x + 4 = 0$, тогда $x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-16}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{-7}}{2} = \frac{3 \pm i\sqrt{7}}{2}$. Следовательно,

$$x_1 = \frac{3 + i\sqrt{7}}{2} = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{7}}{2}i,\ x_2 = \frac{3 - i\sqrt{7}}{2} = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{7}}{2}i. \quad \triangleleft$$

Вопросы для контроля

1. Дайте определение комплексного числа. Приведите примеры. Укажите на этих примерах действительную и мнимую части комплексного числа.
2. Сформулируйте определение равенства двух комплексных чисел. В каком случае будут равны комплексные числа $(m + 5i)$ и $(-3 + ni)$ при $m, n \in \boldsymbol{R}$?
3. 1) Приведите примеры выполнения операций сложения, вычитания, умножения и деления над комплексными числами.

   2) Дайте определения суммы, разности, произведения и частного комплексных чисел.
4. 1) Объясните, какие комплексные числа называются сопряженными.

2) Сформулируйте свойства сопряженных комплексных чисел. Приведите примеры.

3) Докажите свойства сопряженных комплексных чисел.

5. 1) Сформулируйте основные свойства операций сложения и умножения в множестве комплексных чисел.

2) Обоснуйте справедливость этих свойств.

6. Объясните на примерах, как можно изображать комплексные числа на координатной плоскости: а) в виде точек, б) в виде радиус-векторов.

Упражнения

1. Назовите действительную и мнимую части комплексного числа:
1) $5 + 3i$; 2) $2 - 4i$; 3) $-5 + i$;
4) $-5 - 3i$; 5) $4i$; 6) 7.

2. Зная, что заданные комплексные числа равны, найдите значения x и y (при $x \in \boldsymbol{R}$, $y \in \boldsymbol{R}$):
1) $2x + 4i = 6 - yi$; 2) $8 + 4xi = y + 12i$;
3) $-4 + xi = 2y - 3i$; 4) $2xi = y + 2i$.

3. Найдите сумму комплексных чисел:
1) $(5 + 2i) + (3 - 4i)$; 2) $(1 - 7i) + (-3 + 8i)$;
3) $(4 - i) + (-1 - 3i)$; 4) $(2 + 6i) + (2 - 6i)$.

4. Найдите разность комплексных чисел:
1) $(9 - i) - (5 + 4i)$; 2) $(3 + 8i) - (1 - 11i)$;
3) $(-5 - 2i) - (6 + 3i)$; 4) $(4 + i) - (-2 - 3i)$.

5. Найдите произведение комплексных чисел:
1) $(2 + 5i) \cdot (4 - 2i)$; 2) $(5 - i) \cdot (-2 - 6i)$;
3) $(-4 + 6i) \cdot (3 + i)$; 4) $(7 - 4i) \cdot (7 + 4i)$.

6. Найдите частное комплексных чисел:
1) $\frac{18+i}{2+3i}$; 2) $\frac{6-4i}{1-i}$; 3) $\frac{11-10i}{4-3i}$; 4) $\frac{1}{1+i}$.

Упростите выражение (**7–8**).

7. 1) i^{41}; 2) $i^{27} + 2i^{13}$; 3) $3i^{24} + 2i^{14}$; 4) $i^{33} + i^{7}$.

8. 1) $(2 - 3i)^2$; 2) $(1 - i)^3$; 3) $(3 + 4i)^2$; 4) $(2 + i)^3$.

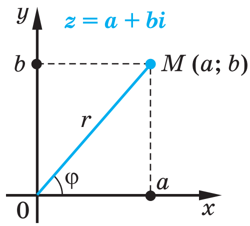
9. Изобразите на координатной плоскости заданное комплексное число: а) в виде точки; б) в виде радиус-вектора:
1) $z_1 = 2 + 3i$; 2) $z_2 = -1 - i$; 3) $z_3 = 3 - 2i$;
4) $z_4 = -2 - 4i$; 5) $z_5 = -3$; 6) $z_6 = 4i$.

10. Решите уравнение:
1) $x^2 - 4x + 29 = 0$; 2) $2x^2 - 2x + 1 = 0$;
3) $x^2 + x + 2 = 0$; 4) $3x^2 + 5x + 3 = 0$.

22.2. Тригонометрическая форма комплексного числа

Таблица 38

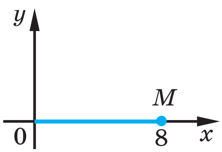
1. Понятие тригонометрической формы комплексного числа

Понятие	Иллюстрация, термины и определения
Комплексное число $z = a + bi$ изображается точкой $M\ (a;\ b)$. Положение этой точки можно однозначно зафиксировать, задавая длину отрезка $OM = r$ и величину угла φ, который луч OM образует с положительным направлением оси Ox. Тогда $r=\sqrt{a^2+b^2}$, $\cos\varphi=\frac{a}{r}$, $\sin\varphi=\frac{b}{r}$. Отсюда $a = r\cos\varphi$, $b = r\sin\varphi$, поэтому $z = a + bi = r\cos\varphi + (r\sin\varphi)\,i$. Тогда **$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ — тригонометрическая форма комплексного числа**	 $r=\sqrt{a^2+b^2}$ — *модуль* (или *абсолютная величина*) комплексного числа $z = a + bi$. $\lvert z\rvert = r = \sqrt{a^2+b^2}$ φ — *аргумент* комплексного числа z (обозначается $\operatorname{Arg} z$) **$\operatorname{Arg} z = \varphi$**, где **$\cos\varphi=\frac{a}{r}$, $\sin\varphi=\frac{b}{r}$.**

Примеры

1. Изобразим комплексное число $8 = 8 + 0i$ на комплексной плоскости. Из рисунка видно, что $\lvert 8\rvert = OM = 8$, $\operatorname{Arg} 8 = 0$, то есть в тригонометрической форме

$$8 = 8(\cos 0 + i\sin 0).$$



2. $z = 1 - i$, где $a = 1$, $b = -1$. Тогда

$$\lvert z\rvert = \lvert 1-i\rvert = r = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{2}.$$

$$\left.\begin{aligned}\cos\varphi&=\frac{a}{r}=\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \sin\varphi&=\frac{b}{r}=-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{aligned}\right\}\ \operatorname{Arg} z=\varphi=\frac{7\pi}{4},$$

то есть в тригонометрической форме

$$1-i=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)=\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right).$$

2. Равенство комплексных чисел в тригонометрической форме

$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$,
$z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$,

$$\boxed{z_1 = z_2} \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{l} r_1 = r_2 \\ \varphi_1 = \varphi_2 \text{ (или отличаются на } 2\pi k, \text{ где } k \in Z) \end{array}}$$

Два комплексных числа, заданных в тригонометрической форме, равны тогда и только тогда, когда равны их модули, а аргументы или равны, или отличаются на $2\pi k$, где $k \in Z$.

Продолж. табл. 38

<table>
<tr><td colspan="2">3. Действия над комплексными числами в тригонометрической форме</td></tr>
<tr><td colspan="2">$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1),$$ $$z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$$</td></tr>
<tr><td>Умножение</td><td>Деление</td></tr>
<tr><td>$$z_1 \cdot z_2 = $$ $$= r_1 \cdot r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2))$$ При умножении комплексных чисел их модули умножаются, а аргументы складываются</td><td>$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\sin(\varphi_1-\varphi_2))$$ При делении комплексных чисел их модули делятся, а аргументы вычитаются (модуль делимого делится на модуль делителя и из аргумента делимого вычитается аргумент делителя)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Возведение в степень</td></tr>
<tr><td>$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$ $$\boxed{z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi),\ n \in N}$$ При возведении комплексного числа в натуральную степень модуль возводится в эту степень, а аргумент умножается на показатель степени. (Формулу можно использовать и для целых отрицательных n.)</td><td>Пример $$(1-i)^{20} = \left(\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right)\right)^{20} =$$ $$= (\sqrt{2})^{20}\left(\cos\left(\frac{7\pi}{4}\cdot 20\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{4}\cdot 20\right)\right) =$$ $$= 2^{10}(\cos 35\pi + i\sin 35\pi) =$$ $$= 1024(-1 + i\cdot 0) = -1024$$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Извлечение корня n-й степени</td></tr>
<tr><td>$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$ $$\boxed{\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right),\ k \in Z}$$ (Всего получаем n разных значений при $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.)</td><td>При извлечении корня n-й степени из комплексного числа извлекается арифметический корень n-й степени из модуля, а к аргументу прибавляется $2\pi k$ и результат делится на показатель корня</td></tr>
</table>

Продолж. табл. 38

	Примеры
Во множестве комплексных чисел знаки $\sqrt{\ }$, $\sqrt[4]{\ }$, $\sqrt[2k]{\ }$ являются знаками не только арифметических корней, как во множестве действительных чисел. Поэтому знаком $\sqrt[n]{z}$ обозначаются все n значений корня для любого n (четного или нечетного).	1. $\sqrt{-1}=\pm i$. 2. $\sqrt{9}=\pm 3$ (только во множестве комплексных чисел!). 3. $t=\sqrt[3]{8}=\sqrt[3]{8(\cos 0+i\sin 0)}=$ $=\sqrt[3]{8}\cdot\left(\cos\frac{0+2\pi k}{3}+i\sin\frac{0+2\pi k}{3}\right)=2\left(\cos\frac{2\pi k}{3}+i\sin\frac{2\pi k}{3}\right),\ k\in \boldsymbol{Z}$ (в последнем равенстве $\sqrt[3]{8}=2$ — арифметический корень). Имеем три различных значения $\sqrt[3]{8}$: 1) при $k=0$ $t_0=\sqrt[3]{8}=2(\cos 0+i\sin 0)=2$; 2) при $k=1$ $t_1=\sqrt[3]{8}=2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)=2\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-1+i\sqrt{3}$; 3) при $k=2$ $t_2=\sqrt[3]{8}=2\left(\cos\frac{4\pi k}{3}+i\sin\frac{4\pi k}{3}\right)=2\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-1-i\sqrt{3}$, то есть $\sqrt[3]{8}$ имеет три значения: 2; $-1+i\sqrt{3}$; $-1-i\sqrt{3}$.

Объяснение и обоснование

1. Понятие тригонометрической формы комплексного числа. Как уже отмечалось, каждое комплексное число $z=a+bi$ можно изобразить на координатной (комплексной) плоскости в виде точки $M(a;\ b)$ или в виде вектора $\overline{OM}$ (с координатами $(a;\ b)$). Но положение точки M (вектора $\overline{OM}$) на координатной плоскости можно однозначно зафиксировать, задавая длину отрезка $OM=r$ и величину угла* φ, который луч OM образует с положительным направлением оси Ox (рис. 175). Учитывая формулу расстояния между двумя точками и определение косинуса и синуса на координатной плоскости, получаем:

$$r=OM=\sqrt{a^2+b^2},\ \cos\varphi=\frac{a}{r},\ \ \sin\varphi=\frac{b}{r}.$$

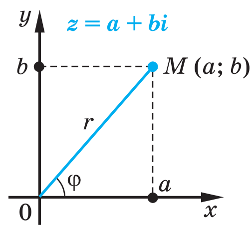


Рис. 175

Тогда $a=r\cos\varphi$, $b=r\sin\varphi$ и заданное комплексное число z можно записать так: $z=a+bi=r\cos\varphi+(r\sin\varphi)\,i=$ $=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$. Полученная запись комплексного числа z называется *три-*

* Величину угла будем измерять в радианах.

гонометрической формой этого числа, а его запись в виде $a + bi$ — *алгебраической формой* комплексного числа. Следовательно,

тригонометрической формой комплексного числа $z = a + bi$ **называется запись этого числа в виде:**

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi), \text{ где } r = \sqrt{a^2+b^2},\ \cos\varphi = \frac{a}{r},\ \ \sin\varphi = \frac{b}{r}.$$

Неотрицательное число $r = \sqrt{a^2+b^2}$ называется *модулем* (или *абсолютной величиной*) комплексного числа $z = a + bi$) и обозначается $|z|$. Следовательно,

$$|z| = r = \sqrt{a^2+b^2}.$$

Как и для действительных чисел на координатной (комплексной) плоскости, *модуль комплексного числа — это расстояние от точки, изображающей заданное число, до точки* 0 (до начала координат). Как и для действительных чисел, только при $z = 0$ модуль z равен нулю, а если $z \neq 0$, то $|z| > 0$. Отметим, что для действительного числа $z = a = a + 0i$ его модуль $|z| = \sqrt{a^2+0^2} = \sqrt{a^2} = |a|$ совпадает с обычным модулем действительного числа.

Число φ, входящее в запись тригонометрической формы комплексного числа $z = a + bi$, называется *аргументом* комплексного числа и обозначается $\mathrm{Arg}\, z$. Следовательно,

$$\mathrm{Arg}\, z = \varphi, \text{ где } \cos\varphi = \frac{a}{r},\ \ \sin\varphi = \frac{b}{r}\ \ \left(r = \sqrt{a^2+b^2}\right).$$

Как уже отмечалось, при геометрическом изображении комплексного числа $z = a + bi$ в виде точки $M(a; b)$ (или радиус-вектора $\overline{OM}$) аргумент φ — это числовое значение величины угла, который луч OM образует с положительным направлением оси Ox (см. рис. 174). Понятно, что этот угол можно определить только с точностью до $2\pi k$, где $k \in \boldsymbol{Z}$. Поэтому аргумент комплексного числа z имеет бесконечное множество значений, отличающихся друг от друга на число, кратное 2π. Отметим, что для комплексного числа $0 = 0 + 0i$ аргумент нельзя определить, поскольку $|0| = r = 0$ (в этом случае радиус-вектор $\overline{OM}$ превращается в точку — нуль-вектор — и мы не можем указать его направление.

Пример Запишите в тригонометрической форме число $\sqrt{3} - i$.

▶ Если $z = a + bi = \sqrt{3} - i$, то $a = \sqrt{3}$, $b = -1$. Найдем модуль этого комплексного числа: $r = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + (-1)^2} = \sqrt{3+1} = 2$. Аргумент φ найдем из соотношений: $\cos\varphi = \frac{a}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\varphi = \frac{b}{r} = -\frac{1}{2}$. Поскольку косинус φ положителен, а синус φ — отрицателен, то соответствующий угол φ находится в IV четверти и как одно из значений аргумента можно взять $\varphi = -\frac{\pi}{6}$ (или любое другое значение, отличающееся от него на $2\pi k$, где $k \in \mathbf{Z}$, например, $\varphi = -\frac{\pi}{6} + 2\pi = \frac{11\pi}{6}$). Тогда заданное комплексное число в тригонометрической форме записывается следующим образом:

$$z = \sqrt{3} - i = r\,(\cos\varphi + i\sin\varphi) = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\,\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right). \triangleleft$$

В простейших случаях тригонометрическую форму комплексного числа можно записывать, опираясь на изображение этого числа на координатной плоскости.

Например, для числа $1 = 1 + 0i$, изображаемого точкой $M\,(1; 0)$ (рис. 176), модуль $r = OM = 1$ и аргумент $\varphi = 0$ (угол между лучом OM и положительным направлением оси Ox равен 0). Тогда в тригонометрической форме число 1 можно записать так: $1 = 1\,(\cos 0 + i\sin 0)$.

Аналогично, для числа $i = 0 + 1i$, изображаемого точкой $N\,(0; 1)$ (см. рис. 176), модуль $r = ON = 1$ и аргумент $\varphi = \frac{\pi}{2}$ (угол между лучом ON и положительным направлением оси Ox равен $\frac{\pi}{2}$), тогда в тригонометрической форме число i можно записать так: $i = 1\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\,\sin\frac{\pi}{2}\right)$.

Напомним, что для действительных чисел геометрический смысл выражения $|a - b|$ — *это расстояние между соответствующими точками на числовой прямой*, то есть $|a - b| = AB$ (рис. 177).

Аналогично для комплексных чисел

геометрический смысл выражения $|z - w|$ — это расстояние между соответствующими точками на координатной (комплексной) плоскости.

Действительно, комплексное число z изображается вектором $\overline{OM}$ или точкой M, а комплексное число w — вектором $\overline{ON}$ или точкой N (рис. 178). Тогда комплексное число $z - w$ изображается разностью этих векторов, то есть вектором $\overline{MN}$. Число $|z - w|$ равно длине этого вектора, то есть расстоянию между точками M и N. ○

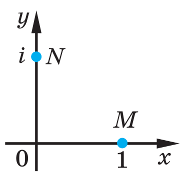


Рис. 176

Рис. 177

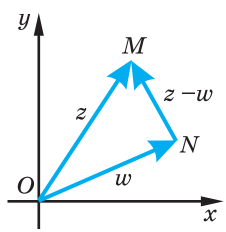


Рис. 178

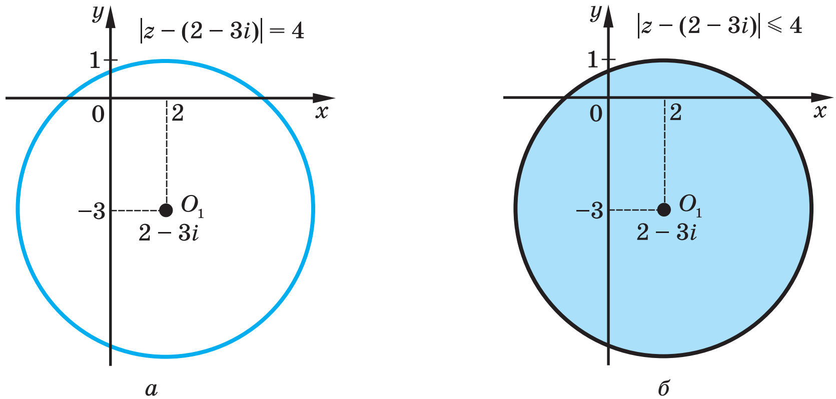


Рис. 179

Например, пусть необходимо изобразить множество точек z комплексной плоскости, для которых выполняется равенство

$$|z - 2 + 3i| = 4 \tag{1}$$

или неравенство

$$|z - 2 + 3i| \leqslant 4. \tag{2}$$

Для этого достаточно записать данные условия так: $|z - (2 - 3i)| = 4$; $|z - (2 - 3i)| \leqslant 4$ и использовать геометрический смысл модуля разности. Тогда множество точек, задаваемое равенством (1), — это окружность радиуса 4 с центром в точке O_1 (2; –3) (рис. 179, *а*), а множество точек, задаваемое неравенством (2) — это круг радиуса 4 с центром в точке O_1 (2; –3) (рис. 179, *б*).

Отметим, что в случае, когда два комплексных числа равны, они изображаются одной и той же точкой M на координатной плоскости. Но тогда их модули (расстояния до начала координат) равны, а аргументы (то есть углы, образованные лучом OM с положительным направлением оси Ox) или равны, или отличаются на целое число полных оборотов, то есть на $2\pi k$, где $k \in \boldsymbol{Z}$. И наоборот, если модули двух комплексных чисел равны, а аргументы или равны, или отличаются на $2\pi k$, то эти числа изображаются на координатной плоскости одной и той же точкой, следовательно, эти числа равны. Таким образом,

два комплексных числа, заданных в тригонометрической форме, равны тогда и только тогда, когда равны их модули, а аргументы или равны, или отличаются на $2\pi k$, где $k \in Z$.

То есть, если $z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$, $z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$, то равенство $z_1 = z_2$ выполняется тогда и только тогда, когда $r_1 = r_2$ и $\varphi_1 = \varphi_2$ (или φ_2 отличается от φ_1 на $2\pi k$, то есть $\varphi_2 = \varphi_1 + 2\pi k$, где $k \in \boldsymbol{Z}$).

2. Умножение, возведение в степень и деление комплексных чисел в тригонометрической форме.

Пусть заданы два комплексных числа в тригонометрической форме:

$$z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1), \qquad z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2).$$

Тогда $z_1z_2 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\cdot r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) =$
$= r_1r_2(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2 + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\varphi_1\sin\varphi_2))$.

Учитывая, что $\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2 = \cos(\varphi_1 + \varphi_2)$,
$\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\varphi_1\sin\varphi_2 = \sin(\varphi_1 + \varphi_2)$, получаем

$$z_1z_2 = r_1r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)). \qquad (3)$$

То есть **при умножении комплексных чисел в тригонометрической форме их модули перемножаются, а аргументы складываются.**

Возведение в натуральную степень комплексного числа **$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$** сводится к умножению одинаковых множителей, поэтому, используя несколько раз формулу (3), получаем

$$z^n = \underbrace{z\cdot z\cdot\ldots\cdot z}_{n\text{ раз}} = \underbrace{r\cdot r\cdot\ldots\cdot r}_{n\text{ раз}}\left(\cos(\underbrace{\varphi+\varphi+\ldots+\varphi}_{n\text{ раз}}) + i\sin(\underbrace{\varphi+\varphi+\ldots+\varphi}_{n\text{ раз}})\right).$$

Таким образом,

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi). \qquad (4)$$

То есть **при возведении комплексного числа в натуральную степень модуль возводится в эту степень, а аргумент умножается на показатель степени.**

Например, для нахождения i^{102} учтем, что в тригонометрической форме $i = 1\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$ (с. 369). Тогда, используя формулу (4), получаем

$$i^{102} = \left(1\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)\right)^{102} = 1^{102}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot 102\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot 102\right)\right) =$$
$$= 1(\cos 51\pi + i\sin 51\pi) = 1\cdot(-1 + i\cdot 0) = -1$$

(что совпадает с значением, полученным на с. 360 в алгебраической форме).

Поскольку деление — действие, обратное умножению, то при делении числа **$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$** на число **$z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$** (при $z_2 \neq 0$) модули необходимо разделить, а аргументы — вычесть:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)), \qquad (5)$$

То есть **при делении комплексных чисел их модули делятся, а аргументы вычитаются.**

По формуле (3) произведение числа $z_3 = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2))$ на число $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$ равно:

$$z_3z_2 = \frac{r_1}{r_2}\cdot r_2(\cos((\varphi_1 - \varphi_2) + \varphi_2) + i\sin((\varphi_1 - \varphi_2) + \varphi_2)) = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) = z_1.$$

Это и означает, что число z_3 является частным от деления числа z_1 на число z_2.

Замечание. Если $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, то по определению $z^{-n} = \frac{1}{z^n}$ (при $z \neq 0$). Поскольку $1 = 1 + 0i = 1(\cos 0 + i\sin 0)$, то, учитывая равенства (4) и (5) для $n \in \boldsymbol{N}$, имеем:

$$z^{-n} = \frac{1}{z^n} = \frac{1(\cos 0 + i\sin 0)}{r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)} = \frac{1}{r^n}(\cos(0 - n\varphi) + i\sin(0 - n\varphi)) =$$

$$= r^{-n}(\cos(-n\varphi) + i\sin(-n\varphi)).$$

Это равенство означает, что формулой (4) можно пользоватся не только для натуральных, но и для целых значений n при $z \neq 0$ (напомним, что $z^0 = 1$ при $z \neq 0$).

3. Извлечение корня из комплексного числа. Как и для действительных чисел, *корнем n-й степени из комплексного числа z* (где n — натуральное число) *называется такое комплексное число t, что $t^n = z$.*

Корень n-й степени из z обозначается $\sqrt[n]{z}$. Следовательно, если $t = \sqrt[n]{z}$, то $z = t^n$. Покажем, что из любого комплексного числа z можно извлечь корень n-й степени, причем, если $z \neq 0$, то $\sqrt[n]{z}$ принимает n различных значений. Для обоснования используем тригонометрическую форму рассмотренных комплексных чисел.

Пусть $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Число t будем искать в виде

$$t = R(\cos\alpha + i\sin\alpha).$$

если $t = \sqrt[n]{z}$, то $z = t^n$. Учитывая, что $t^n = R^n(\cos n\alpha + i\sin n\alpha)$, получаем

$$r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = R^n(\cos n\alpha + i\sin n\alpha).$$

Но два комплексных числа в тригонометрической форме равны тогда и только тогда, когда их модули равны, а аргументы или равны, или отличаются на $2\pi k$, где $k \in \boldsymbol{Z}$. Следовательно,

$$R^n = r, \qquad (6)$$

$$n\alpha = \varphi + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}. \qquad (7)$$

Поскольку $r \geqslant 0$ и число R должно быть неотрицательным, то из равенства (6) получаем

$$R = \sqrt[n]{r} \text{ (арифметическое значение)},$$

а из равенства (7)

$$\alpha = \frac{\varphi + 2\pi k}{n},\ k \in \boldsymbol{Z}. \qquad (8)$$

Таким образом,

$$\sqrt[n]{z} = t = R(\cos\alpha + i\sin\alpha) = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right),\ k \in \boldsymbol{Z}. \qquad (9)$$

Учитывая, что функции $\cos x$ и $\sin x$ является периодическими с наименьшим положительным периодом 2π, делаем вывод, что значения $\sqrt[n]{z}$, которые дает формула (9), могут повторяться только в том случае, когда значения α (см. формулу 8) будут отличаться на число, кратное 2π. Выясним, при каких значениях k_1 и k_2 это может быть. Для этого разность $\alpha_1 - \alpha_2 = \frac{\varphi + 2\pi k_1}{n} - \frac{\varphi + 2\pi k_2}{n} = \frac{2\pi(k_1 - k_2)}{n}$ должна быть кратной 2π, а разность $k_1 - k_2$ должна, в свою очередь, делиться на n. Отсюда следует, что при $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ формула (9) дает разные значения $\sqrt[n]{z}$. При $k = n$ получаем те же значения корня, что и при $k = 0$, при $k = n + 1$ — те же значения корня, что и при $k = 1$ и т. д. Следовательно, по формуле (9) мы всегда получим точно n различных значений $\sqrt[n]{z}$ (при $z \neq 0$). То есть

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right),\ k \in Z. \qquad (10)$$

(Всего получаем n различных значений при $k = 0, 1, 2, \ldots, n - 1$.) То есть **при извлечении корня n-й степени из комплексного числа из модуля извлекается арифметический корень n-й степени, а к аргументу прибавляется $2\pi k$ (где $k \in Z$) и результат делится на показатель корня.**

Пример Найдите все значения $\sqrt[4]{1}$.

Запишем подкоренное число в тригонометрической форме $1 = 1\,(\cos 0 + i\sin 0)$. Тогда по формуле (10):

$$t = \sqrt[4]{1} = \sqrt[4]{1\,(\cos 0 + i\sin 0)} = \sqrt[4]{1}\left(\cos\frac{0 + 2\pi k}{4} + i\sin\frac{0 + 2\pi k}{4}\right) = 1\left(\cos\frac{\pi k}{2} + i\sin\frac{\pi k}{2}\right).$$

Всего получаем 4 различных значения:

При $k = 0$ $\quad t_0 = 1\,(\cos 0 + i\sin 0) = 1\,(1 + i\cdot 0) = 1.$

При $k = 1$ $\quad t_1 = 1\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = 1\,(0 + i\cdot 1) = i.$

При $k = 2$ $\quad t_2 = 1\,(\cos\pi + i\sin\pi) = 1\,(-1 + i\cdot 0) = -1.$

При $k = 3$* $\quad t_3 = 1\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right) = 1\,(0 + i\cdot(-1)) = -i.$

Следовательно, $\sqrt[4]{1}$ имеет четыре различных значения: $1; -1; i; -i$. ◁

З а м е ч а н и е. Если записать формулу (10) следующим образом:

$$t_k = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n}\cdot k\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n}\cdot k\right)\right),\ k \in Z\ (k = 0, 1, 2, \ldots, n - 1),$$

то, учитывая геометрический смысл модуля, получаем, что все точки, изображающие числа t_k, лежат на окружности радиуса $\sqrt[n]{r}$ с центром в начале координат. Аргументы соседних точек отличаются на $\frac{2\pi}{n}$, поэтому указан-

* Как было обосновано выше, если подставлять другие целые значения k, то найденные значения будут повторяться: например, при $k = 4$ получаем $t = 1\,(\cos 2\pi + i\sin 2\pi) = 1\,(1 + i\cdot 0) = 1 = t_0$.

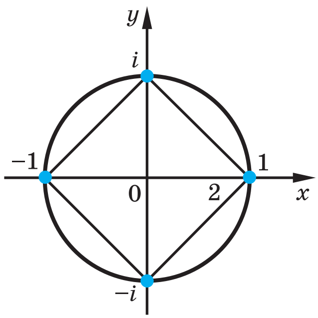


Рис. 180

ные точки делят окружность на n равных частей. То есть эти точки являются вершинами правильного n-угольника, вписанного в эту окружность . Например, точки, изображающие все значения $\sqrt[4]{1}$ (то есть ± 1 и $\pm i$), являются вершинами правильного четырехугольника, вписанного в окружность радиуса 1 с центром в начале координат (рис. 180).

Вопросы для контроля

1. Пользуясь геометрическим изображением комплексного числа, поясните смысл понятий модуль и аргумент комплексного числа.
2. Запишите формулы, по которым для комплексного числа $z = a + bi$ можно найти его модуль и аргумент. Приведите примеры.
3. Запишите общий вид комплексного числа в тригонометрической форме. Приведите примеры записи комплексных чисел в тригонометрической форме.
4. Объясните, в каком случае будут равными комплексные числа
$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) \text{ и } z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2).$$
5. Объясните и обоснуйте геометрический смысл модуля разности двух комплексных чисел. Изобразите множество точек z комплексной плоскости, для которых $|z - i| = 1$.
6. Объясните, как выполняются действия умножения, деления и возведения в степень над комплексными числами в тригонометрической форме. Запишите и докажите соответствующие формулы.
7. Запишите и докажите формулу для извлечения корня n-й степени из комплексного числа в тригонометрической форме.

Упражнения

1. Изобразите на координатной плоскости заданное комплексное число. Пользуясь соответствующим изображением, найдите его модуль и аргумент и запишите заданное число в тригонометрической форме:
1) $3i$; 2) 4; 3) $-5i$; 4) -7.

2. Представьте в тригонометрической форме комплексное число:
1) $\sqrt{3} + i$; 2) $2 + 2u$; 3) $3i$; 4) $-3 - 3i$;
5) -4; 6) $-1 - \sqrt{3}i$; 7) $-2 + 2\sqrt{3}i$.

3. Представьте в алгебраической форме число, заданное в тригонометрической форме:
1) $4\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$; 2) $6\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$; 3) $2\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$.

4. Изобразите на комплексной плоскости множество точек z, удовлетворяющих условию:
1) $|z-2-i|=2$; 2) $|z+i|\geqslant 3$; 3) $|z+1-i|\leqslant 2$; 4) $|z-3|=4$.

5. Найдите произведение и частное комплексных чисел z_1 и z_2, заданных в тригонометрической форме (результат запишите в тригонометрической и алгебраической формах):

1) $z_1=12\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$, $z_2=4\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$;

2) $z_1=6\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$, $z_2=3\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$.

6. Вычислите выражение, предварительно представив числитель и знаменатель в тригонометрической форме:

1) $\frac{\sqrt{3}+i}{1-i}$; 2) $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{3}i}{i-\sqrt{3}}$; 3) $\frac{1+i}{-1-i}$; 4) $\frac{-1+i}{\sqrt{3}-i}$.

7. Возведите комплексное число в степень, предварительно представив основание степени в тригонометрической форме:

1) $(1+i)^{16}$; 2) $(-\sqrt{3}+i)^{15}$; 3) $(\sqrt{3}+i)^{12}$; 4) $(1-i)^{20}$.

8. Найдите все значения корня n-й степени из комплексного числа:

1) $\sqrt[3]{i}$; 2) $\sqrt{-1+i\sqrt{3}}$; 3) $\sqrt[4]{-16}$; 4) $\sqrt[6]{-1}$.

9. Найдите все комплексные корни уравнения:
1) $z^3-27=0$; 2) $z^4+81=0$; 3) $z^6+64=0$; 4) $z^4-625=0$.

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ УПРАЖНЕНИЯ К РАЗДЕЛУ 3

1. Сколько существует трехзначных чисел, не содержащих в десятичной записи цифры 0?

2. Сколько существует четных четырехзначных чисел, не содержащих в десятичной записи цифры 0?

3. Сколько четырехзначных чисел, кратных 5, все цифры которых разные, можно записать, используя только цифры 5, 6, 7, 8 и 9?

4. Сколько четных четырехзначных чисел, все цифры которых разные, можно записать, используя только цифры 2, 3, 5, 7 и 8?

5. В классе, в котором 15 учеников, выбирают старосту и его заместителя. Сколькими способами это можно сделать?

6. В классе, в котором 18 учеников, выбирают трех делегатов на школьную конференцию. Сколькими способами это можно сделать?

7. Сколько трехзначных чисел, кратных трем, можно записать, используя только цифры 1, 2, 3, 4, 5 и 6?

8. Сколькими способами можно 4 черных и 8 белых шаров расположить в ряд так, чтобы два черных шара не оказались рядом?

9. Математическая энциклопедия содержит 5 томов. Сколькими способами их можно расположить на полке так, чтобы тома не были расположены один за другим в порядке возрастания их номеров?

10. Ученик имеет 6 разных учебников, по одному на каждый предмет. Сколькими способами их можно расположить на полке так, чтобы учебники по физике и химии не стояли рядом?

11. Сколько существует пятизначных натуральных чисел, которые одинаково читаются слева направо и справа налево?

12. В скольких точках пересекаются 11 прямых, если среди них только две параллельны, а никакие три из них не пересекаются в одной точке?

13. В скольких точках пересекаются 10 непареллельных прямых, если никакие три из них не пересекаются в одной точке?

14. На шахматном турнире сыграно 55 партий. При этом каждый участник сыграл с каждым из остальных участников одну партию. Сколько шахматистов принимало участие в турнире?

15. В шахматном турнире принимали участие 10 игроков. При этом каждый игрок сыграл с каждым из остальных игроков одну партию. Сколько всего было сыграно партий в турнире?

Решите уравнение **(16–18)**.

16. 1) $C_{x-3}^{2}=21;$ 2) $C_{x+4}^{2}=x^{2}-1;$

3) $C_{x}^{3}+C_{x}^{2}=15(x-1);$ 4) $C_{x+1}^{x-1}+C_{x}^{x-2}=9x+10.$

17. 1) $\dfrac{P_{x+2}}{A_{x}^{n}P_{x-n}}=132;$ 2) $\dfrac{P_{x-n}A_{x+1}^{n+1}}{P_{x-1}}=90;$

3) $\dfrac{P_{x-4}A_{x}^{4}}{P_{x-2}}=42;$ 4) $\dfrac{P_{x-n}A_{x+2}^{n+2}}{P_{x}}=110.$

18. 1) $C_{x+1}^{5}=\dfrac{3}{8}\cdot A_{x}^{3};$ 2) $C_{4x+9}^{4(x+1)}=5A_{4x+7}^{3};$

3) $C_{x+8}^{x+3}=5A_{x+6}^{3};$ 4) $C_{x+1}^{x-4}=\dfrac{7}{15}\cdot A_{x+1}^{3}.$

19. В стандартном виде многочлена $\left(x+\dfrac{2}{x}\right)^{6}$ найдите слагаемое, не содержащее переменной x.

20. В стандартном виде многочлена $\left(2x-\dfrac{1}{x}\right)^{5}$ найдите коэффициент при x.

21. В стандартном виде многочлена $\left(\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^{14}$ найдите коэффициент при x^{2}.

22. В стандартном виде многочлена $\left(\sqrt[3]{a^2}-\frac{1}{a}\right)^5$ найдите слагаемое, не содержащее переменной a.

23. Найдите средний член разложения $\left(a^{-2}\sqrt[4]{a}-\sqrt[5]{\frac{a^{-2}}{\sqrt{a}}}\right)^n$, если известно, что коэффициент пятого члена относится к коэффициенту третьего члена как 14 : 3.

24. Найдите член разложения бинома $\left(z\sqrt{z}+\frac{1}{\sqrt[3]{z}}\right)^m$, содержащий после упрощений z^5, если сумма биномиальных коэффициентов этого разложения равна 128.

25. Определите x при условии, что пятый член разложения бинома $\left(\sqrt{x}+x^{-1}\right)^6$ равен $\frac{5}{9}$.

26. Определите z при условии, что разность между пятым и третьим членами разложения бинома $\left(x+\sqrt{5}\right)^6$ равна 300.

27. Определите x при условии, что третий член разложения бинома $(x + x^{\lg x})^5$ равен 1 000 000.

28. Найдите рациональные члены разложения бинома:

1) $\left(\sqrt{x}-\sqrt[4]{x}\right)^5$; 2) $\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^{10}$; 3) $\left(1+\sqrt[4]{2}\right)^{15}$; 4) $\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)^8$.

29. Олег уже три месяца принимает участие в еженедельной лотерее, но ни одного раза не выиграл. Однако он продолжает играть, утверждая: «Лотерея — случайная игра, иногда выигрываешь, иногда проигрываешь. Я уже долго не выигрывал, поэтому уверен, что обязательно выиграю в одном из следующих розыгрышей». Согласны ли вы с соображениями Олега?

30. Учащиеся провели 100 экспериментов по подбрасыванию монеты. В результате «герб» выпал 46 раз, «число» — 54 раза. Учащиеся поспорили, что с большей вероятностью появится при следующем подбрасывании: «герб» или «число»? «Более вероятно появление «герба», — сказал Егор, — ведь до этого эксперимента он выпадал реже, чем «число», выходит теперь должен выпадать чаще». — «Вероятнее появление «числа», — сказал Виктор, — раз оно выпадало чаще, то и будет выпадать чаще». — «Появление «герба» и появление «числа» равновероятны, — сказала Наташа, — потому что результат каждого следующего случайного эксперимента не зависит от результатов предыдущих экспериментов». С кем бы вы согласились и почему?

31. За три года (2003—2005) на реке было два наводнения, последнее из которых произошло в 2005 году. С каким вариантом ответа на вопрос «Когда будет следующее наводнение?» вы согласны и почему?

а) в 2006 году; б) в 2007 году; в) наводнений не будет несколько лет, потому что в последнее время их уже было слишком много; г) не хватает данных, чтобы ответить на вопрос.

32. Во многих книгах встречается известный анекдот:

— Доктор, — спрашивает пациент, — есть ли у меня надежда на выздоровление?

— Безусловно, — отвечает врач. — Статистика говорит, что один пациент из ста выздоравливает при этой болезни.

— Но почему же именно я должен выздороветь?

— Поэтому что именно вы и есть мой сотый больной!

Верно ли рассуждает врач и каковы, по вашему мнению, шансы больного на выздоровление?

33. В лотерее принимает участие более 10 тысяч человек. Известно, что на каждые 100 билетов приходится один выигрышный. Сергей купил 100 билетов и уверен, что среди них наверно будет хотя бы один выигрышный. Согласны ли вы с его предположением?
Какие из следующих событий в этой ситуации являются возможными? достоверными? невозможными?
Среди купленных билетов:
а) нет ни одного выигрышного;
б) есть только один выигрышный;
в) есть три выигрышных;
г) есть 53 выигрышных.

34. В ящике есть 14 красных и 6 черных шаров. Какова вероятность того, что наугад вынутый шар будет красным?

35. Из слова «математика» наугад выбирают одну букву. Какова вероятность того, что выберут букву «а»?

36. Бросают три игральных кубика. Найдите вероятность того, что произведение выпавших чисел будет четным числом.

37. Бросают два игральных кубика. Найдите вероятность того, что произведение выпавших чисел будет четным числом.

38. Набирая номер телефона, абонент забыл последние две цифры и набрал их наугад, помня только то, что эти цифры четные и разные. Найдите вероятность того, что номер телефона набран правильно.

39. В ящике 6 белых, 1 красный и 3 черных шара. Какова вероятность того, что наугад вынутые два шара будут разного цвета?

40. Вероятность того, что Аленка решит задачу, равна 0,8; а вероятность того, что Остап решит задачу, — 0,7. Найдите вероятность того, что задачу не решит ни один из них.

41. Два стрелка стреляют в одну мишень. Вероятность попадания в мишень первым стрелком — 0,6; а вторым — 0,9. Найдите вероятность того, что в мишень попадет только один из них.

42. Ученик написал четыре поздравительные открытки и наугад вложил их в четыре подписанных конверта. Найдите вероятность того, что только двое из адресатов получат адресованные именно им поздравления.
43. Ученик написал четыре поздравительные открытки и наугад вложил их в четыре подписанных конверта. Найдите вероятность того, что ни один адресат не получит адресованного ему поздравления.
44. Для класса, в котором учатся 16 учащихся, выделены путевки для отдыха: 6 — в Крыму, 6 — в Карпатах и 4 — в Шацке. Найдите вероятность того, что двое друзей будут отдыхать вместе.

СВЕДЕНИЯ ИЗ ИСТОРИИ

Элементарные задачи, которые позднее были отнесены к стохастике, то есть к комбинаторике, теории вероятностей и математической статистике, ставились и решались еще во времена Древних Египта, Греции и Рима. Этот период так назваемой предыстории теории вероятностей заканчивается в XVI в. работами итальянских математиков Д. Кардано (1501–1576) «Книга о игре в кости», Н. Тарталья (1499–1557) «Общий трактат о числе и мере», Г. Галилея (1564–1642) «О выпадании очков при игре в кости» и др. В этих работах уже фигурирует понятие вероятности, используется теорема о вероятности произведения независимых событий, высказываются некоторые соображения относительно так называемого закона больших чисел.

В середине XVII в. вопросами теории вероятностей заинтересовались выдающиеся ученые, в частности французские математики П. Ферма (1601–1665) и Б. Паскаль (1623–1662) и нидерландский математик X. Гюйгенс (1629–1695). В своих работах они уже использовали теоремы сложения и умножения вероятностей, понятия зависимых и независимых событий, математического ожидания. X. Гюйгенс издал в 1657 г. первый трактат по теории вероятностей «О расчетах в азартных играх».

Следующие шаги в развитии теории вероятностей и математической статистики связаны с именами голландского математика Я. де Витта (1625–1672) и английского математика Э. Галлея (1656–1742), которые занимались вопросами страхования и составили первые таблицы смертности соответственно в 1671 г. и 1693 г.

Одними из первых исследователей в теории вероятностей и математической статистике были швейцарские математики Я. Бернулли (1654–1705), Н. Бернулли (1687–1759), Д. Бернулли (1700–1782) и российский математик Л. Эйлер (1707–1783).

* Сведения приведены по пособию: Жалдак М. І., Михалін Г. О. Елементи стохастики з комп'ютерною підтримкою: Посібник для вчителів.— К.: РННЦ «ДІНІТ», 2004.— 107 с.

Я. Бернулли написал книгу «Исскуство предположений», где, в частности, приводит так называемое биномиальное распределение вероятностей и закон больших чисел.

Н. Бернулли своей работой «Опыт применения исскуства предположений к правовым вопросам» (1711 г.) продолжил работу Я. Бернулли. Он применил вероятностные идеи и методы к оценке показаний свидетелей, подсчета рент, страхования жизни и товаров.

Д. Бернулли первым выдвинул идею применения бесконечно малых величин в задачах теории вероятностей. Главная его работа в теории вероятностей — «Опыт исследования применения исчисления бесконечно малых в исскустве предположений».

Л. Эйлер внес выдающийся вклад в применение теории вероятностей в демографии. Он фактически стал основоположником современной демографии.

Среди первых книг по теории вероятностей стоит отметить «Учение о случае», написанное в 1716 г. французским математиком А. де Муавром (1667–1754). В 1733 г. Муавр нашел функцию нормального распределения как приближение биномиального распределения.

Английским математиком Б. Байесом (1702–1761) написана работа «Опыт решения одной задачи учения о случае», изданная в 1763–1764 гг. В ней, в частности, приведен частный случай формулы, которая позднее была названа его именем. В 1777 г. французский математик Ж. де Бюффон (1707–1788) привел первый пример геометрической вероятности.

Значительный вклад в развитие теории вероятностей принадлежит французским математикам П. Лапласу (1749–1827) и С. Пуассону (1781–1840).

Лаплас издал в 1812 г. монументальное исследование «Аналитическая теория вероятностей», а в 1814 г. — популярную книгу «Философский опыт относительно вероятностей». В своих работах он подробно рассмотрел азартные игры, геометрическую вероятность, теорему Бернулли и ее связь с нормальным распределением вероятностей, теорию наименьших квадратов и т. д. Следует подчеркнуть, что только после работ Лапласа стало возможным широкое применение научно обоснованных методов в теории вероятностей. Больше того, много позднейших результатов, как будто открытых другими математиками, можно найти в работах Лапласа.

Главной работой Пуассона в области теории вероятностей является «Исследование вероятностей судебных приговоров в криминальных и гражданских делах», в которой содержится, в частности, и его теорема, связанная с законом распределения Пуассона.

Большую роль в распространении идей теории вероятностей и математической статистики в России и Украине сыграли выдающиеся российские математики украинского происхождения В. Я. Буняковский (1804–1889) и М. В. Остроградский (1801–1862).

Как считал известный российский математик Б. В. Гнеденко (1911–1995), увлечение теорией вероятностей в первой четверти XIX в. привело к огромному количеству работ, связанных с применением этой теории к разным проблемам естественных наук и общественной жизни. Многие из этих применений были мало обоснованными и воспринимались математиками как «математические скандалы». Поэтому это увлечение сменилось глубоким разочарованием и полным скептицизмом относительно применений теории вероятностей к научному познанию мира. Дальнейшее развитие теории вероятностей потребовало уточнения основных ее положений. Необходимо было установить предмет теории вероятностей, область ее применений, изучить и усилить ее специфические методы исследований. Большую работу в этом направлении провел выдающийся российский математик П. Л. Чебышёв (1821–1894). П. Л. Чебышёв оставил заметный вклад во многих разделах математики, в частности и в теории вероятностей, где он обобщил закон больших чисел, доказал так называемую центральную предельную теорему для суммы независимых случайных величин и получил много других результатов. Его курс теории вероятностей, который он читал в Петербургском университете, отличается четкостью формулировок и обоснованностью доказательств утверждений.

По мнению выдающегося российского математика А. Н. Колмогорова (1903–1987), благодаря П. Л. Чебышёву была создана российская математическая школа, которая стала лучшей в мире во многих разделах математики, в частности и в теории вероятностей.

Среди известнейших математиков, которые были учениками П. Л. Чебышёва, следует назвать А. А. Маркова (1857–1918) и А. М. Ляпунова (1857–1918), ставших выдающимися математиками именно благодаря своим исследованиям в теории вероятностей.

Книга А. А. Маркова «Исчисление вероятностей», первое издание которой вышло в 1900 г., а четвертое — в 1924 г., в течение многих лет была лучшей из тех, по которым учились российские математики. В этой книге, в частности, раскрывается, в каком понимании *статистическая вероятность* $P^*(A)$ *близка к вероятности* $P(A)$ *при больших* n: *вероятность значительного отклонения* $P_n^*(A)$ *от* $P(A)$ *близка к нулю, но это не означает, что значительные отклонения невозможны при больших* n.

Огромные достижения в теории вероятностей почти не применялись в математической статистике в конце XIX в. Это, в частности, видно из важных работ бельгийского математика А. Кетле (1796–1874) и английских математиков Ф. Гальтона (1822–1911) и К. Пирсона (1857–1936). Этот недостаток был устранен в начале XX в. Значительную роль в этом сыграли представители англо-американской школы У. Госсет (Стьюдент) (1876–1937), Э. Пирсон (1895–1980) и Э. Нейман (1894–1981), благодаря работам которых была создана теория статистической проверки гипотез.

В конце XIX в. французский математик Ж. Бертран (1822–1900) привел ряд парадоксов, связанных с теорией вероятностей, а выдающийся французский математик А. Пуанкаре (1854–1912) обобщил эти парадоксы, которые подчеркивали нечеткость и неточность некоторых определений и понятий теории вероятностей. Из того следовала необходимость соответствующих уточнений. Сделать это стало возможным благодаря аксиоматическому методу, который в начале XX в. начал применяться во многих отраслях математики.

В XX в. теория вероятностей также постепенно превращается в строгую аксиоматическуюну теорию. Это произошло благодаря работам многих математиков. Так, английский математик Р. Фишер (1890–1962) развил статистический, или эмпирический, подход к формированию понятия вероятности. Немецкий математик Р. Мизес (1883–1953) ввел понятие пространства элементарных событий. Российский математик С. Н. Бернштейн (1880–1968) в 1917 г. напечатал работу «Опыт аксиоматического обоснования теории вероятностей», а в 1927 г. издал книгу «Теория вероятностей», в которой вывел собственную аксиоматическую теорию вероятностей. Эта книга считается одной из лучших среди произведений мировой литературы по теории вероятностей.

Но действительно решающим этапом в развитии теории вероятностей стала работа А. Н. Колмогорова (1903–1987) «Основные понятия теории вероятностей» (изданная в 1937 г.), в которой он изложил свою аксиоматику теории вероятностей и после которой теория вероятностей заняла равноправное место среди других математических дисциплин.

Большие достижения в теории вероятностей и математической статистике имели также российские математики А. Я. Хинчин (1894–1959), Е. Е. Слуцкий (1880–1948), Б. В. Гнеденко (1911–1995) и многие другие, украинские математики И. И. Гихман (1918–1985), В. С. Михалевич (1930–1994), М. И. Ядренко (1932–2004), Ю. М. Ермольев (1936 г. р.), И. Н. Коваленко (1935 г. р.), В. С. Королюк (1925 г. р.), А. В. Скороход (1930 г. р.), А. Ф. Турбин (1940 г. р.) и другие.

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

Таблица 1

Разложение алгебраических выражений на множители

1. Формулы сокращенного умножения	
$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$	
$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$	$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$
$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ $(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$	$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ $(a-b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a-b)$
$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$	
2. Основные приемы разложения многочлена на множители	
Вынесение общего множителя за скобки	$8a^3 + 10a^2b^3 - 6ab = 2a(4a^2 + 5ab^3 - 3b)$
Способ группировки	$xy + 3yz - x^2 - 3xz =$ $= y(x+3z) - x(x+3z) =$ $= (x+3z)(y-x)$
Применение формул сокращенного умножения	$a^4 - 64 = (a^2)^2 - 8^2 = (a^2-8)(a^2+8)$
3. Разложение на множители квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$	
$ax^2 + bc + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, где x_1 и x_2 — корни квадратного трехчлена, то есть корни уравнения $ax^2 + bc + c = 0$	Поскольку $2x^2 + 3x - 5 = 0$ при $x_1 = 1$ и $x_2 = -\frac{5}{2}$, то $2x^2 + 3x - 5 = 2(x-1)\left(x + \frac{5}{2}\right) = (x-1)(2x+5)$
4. Обобщение некоторых формул сокращенного умножения	
$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + a^2b^{n-3} + ab^{n-2} + b^{n-1})$	
Примеры. $a^4 - b^4 = (a-b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)$ $a^5 - b^5 = (a-b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4)$ При $b = 1$ $a^n - 1 = (a-1)(a^{n-1} + a^{n-2} + a^{n-3} + \ldots + a^2 + a + 1)$	
Для **нечетных** натуральных n $a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \ldots + a^2b^{n-3} - ab^{n-2} + b^{n-1})$	
Примеры. $a^5 + b^5 = (a+b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4)$ При $b = 1$ (и $n = 2k+1$) $a^{2k+1} + 1 = (a+1)(a^{2k} - a^{2k-1} + a^{2k-2} - \ldots + a^2 - a + 1)$	

Таблица 2

Свойства корней *n*-й степени

Основные формулы корня n-й степени (только для неотрицательных значений a и b, то есть при $\begin{cases} a \geqslant 0, \\ b \geqslant 0 \end{cases}$)	Можно ли применять основные формулы для любых a и b из ОДЗ левой части формулы (если нельзя — дается обобщенная формула)	
	корень нечетной степени	корень четной степени
1. $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$	*можно*	*только для неотрицательных a*
2. $\sqrt[n]{a^n} = a$	*можно*	$\sqrt[2k]{a^{2k}} = \lvert a \rvert$
3. Корень из корня $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}$	*можно*	*можно*
4. Корень из произведения $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$	*можно*	$\sqrt[2k]{ab} = \sqrt[2k]{\lvert a \rvert}\ \sqrt[2k]{\lvert b \rvert}$
и произведение корней $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$		*можно*
5. Корень из частного $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ $(b \neq 0)$	*можно*	$\sqrt[2k]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[2k]{\lvert a \rvert}}{\sqrt[2k]{\lvert b \rvert}}$
и частное корней $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$		*можно*
6. Основное свойство корня: $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[nk]{a^{mk}}$ и наоборот	*можно*, если все корни нечетной степени (то есть переход *нечетная → нечетная*)	Переход *четная → четная* *можно* Переход *нечетная → четная* $\sqrt[n]{a^m} = \begin{cases} \sqrt[nk]{a^{mk}} \text{ при } a^m \geqslant 0, \\ -\sqrt[nk]{a^{mk}} \text{ при } a^m < 0 \end{cases}$
$\sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^m}$		$\sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{\lvert a^m \rvert}$
7. Вынесение множителя из-под знака корня $\sqrt[n]{a^n b} = a\sqrt[n]{b}$	*можно*	$\sqrt[n]{a^n b} = \lvert a \rvert \sqrt[n]{b}$
8. Внесение множителя под знак корня $a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}$	*можно*	$a\sqrt[n]{b} = \begin{cases} \sqrt[n]{a^n b} \text{ при } a \geqslant 0, \\ -\sqrt[n]{a^n b} \text{ при } a < 0, \end{cases}$ где $b \geqslant 0$

Таблица 3

Свойства логарифмов

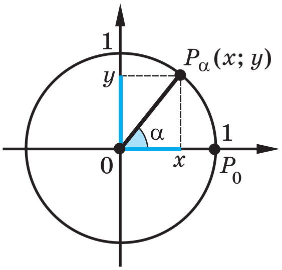
1. Логарифм числа	
Определение	Примеры
Логарифмом положительного числа b по основанию a ($a>0, a\neq 1$) называется показатель степени, в которую необходимо возвести a, чтобы получить b.	1) $\log_4 16 = 2$, поскольку $4^2 = 16$; 2) $\log_7 \sqrt{7} = \frac{1}{2}$, так как $7^{\frac{1}{2}} = \sqrt{7}$; 3) $\lg 1000 = 3$, поскольку $10^3 = 1000$.
2. Основное логарифмическое тождество	
$\boxed{a^{\log_a b} = b}$ $a>0,\ a\neq 1,\ b>0$	1) $3^{\log_3 5} = 5$; 2) $10^{\lg 2} = 2$.
3. Свойства логарифмов и формулы логарифмирования ($a>0,\ a\neq 1$)	
1) $\boxed{\log_a 1 = 0}$	2) $\boxed{\log_a a = 1}$
При $x>0,\ y>0$	Обобщения
3) $\boxed{\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y}$	При $xy>0$ $\boxed{\log_a (xy) = \log_a \lvert x\rvert + \log_a \lvert y\rvert}$
4) $\boxed{\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y}$	При $\frac{x}{y}>0$ $\boxed{\log_a \frac{x}{y} = \log_a \lvert x\rvert - \log_a \lvert y\rvert}$
5) $\boxed{\log_a x^n = n\log_a x}$	При $x\neq 0$ $\boxed{\log_a x^{2k} = 2k\log_a \lvert x\rvert}$
4. Формула перехода к логарифмам с другим основанием	
$\boxed{\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}}$ $a>0,\ a\neq 1,\ b>0,\ b\neq 1,\ x>0$	
Следствия	
$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$	$\log_a b = \log_{a^k} b^k$

Таблица 4

Тригонометрические формулы

1. Соотношения между тригонометрическими функциями одного аргумента

$$x^2 + y^2 = 1$$



$$\cos\alpha = x$$
$$\sin\alpha = y$$

Основное тригонометрическое тождество

$$\boxed{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1}$$

$$\boxed{\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}} \qquad \boxed{1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}}$$

$$\boxed{\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}} \qquad \boxed{1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}}$$

$$\boxed{\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1}$$

2. Тригонометрические функции двойного аргумента

$$\boxed{\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha} \qquad \boxed{\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}}$$

$$\boxed{\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1}$$

3. Значения тригонометрических функций некоторых аргументов

α	градусы	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
	радианы	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
sin α		0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
cos α		1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
tg α		0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	—	0	—	0
ctg α		—	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	—	0	—

4. Косинус разности и суммы

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

5. Синус суммы и разности

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$

6. Тангенс суммы и разности

$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\dfrac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$	$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\dfrac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$

7. Формулы суммы и разности тригонометрических функций

$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$	$\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}$
$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$	$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$
$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta=\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$	$\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta=\dfrac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$

8. Преобразование произведения тригонометрических функций в сумму

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta))$$

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta))$$

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}(\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta))$$

9. Формула преобразования выражения $a\sin\alpha + b\cos\alpha$

$$a\sin\alpha+b\cos\alpha=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\alpha+\varphi),$$

где аргумент φ определяется из соотношений

$$\cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad \sin\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

10. Решение уравнений $\sin x = a$ и $\cos x = a$

$\sin x = a$	$\cos x = a$
$\lvert a \rvert > 1$: **Корней нет**	$\lvert a \rvert > 1$: **Корней нет**
$\lvert a \rvert \leqslant 1$: $\boldsymbol{x = (-1)^n \arcsin a + \pi n,\ n \in Z}$	$\lvert a \rvert \leqslant 1$: $\boldsymbol{x = \pm \arccos a + 2\pi n,\ n \in Z}$

Частные случаи

$\sin x = 0 \quad x = \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$	$\cos x = 0 \quad x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$
$\sin x = 1 \quad x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$	$\cos x = 1 \quad x = 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$
$\sin x = -1 \quad x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$	$\cos x = -1 \quad x = \pi + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$

11. Решение уравнений $\operatorname{tg} x = a$ и $\operatorname{ctg} x = a$

$\boldsymbol{\operatorname{tg} x = a}$ $\boldsymbol{x = \operatorname{arctg} a + \pi n,\ n \in Z}$	$\boldsymbol{\operatorname{ctg} x = a}$ $\boldsymbol{x = \operatorname{arcctg} a + \pi n,\ n \in Z}$
Частный случай $\operatorname{tg} x = 0$ $x = \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$	Частный случай $\operatorname{ctg} x = 0$ $x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$

12. Схема решения более сложных тригонометрических уравнений

1. *Пробуем привести все тригонометрические функции* ***к одному аргументу.***
2. *Если удалось привести к одному аргументу, то пробуем все тригонометрические выражения привести* ***к одной функции.***
3. *Если к одному аргументу удалось привести, а к одной функции — нет, тогда пробуем привести уравнение* ***к однородному.***
4. *В других случаях переносим* ***все члены в одну сторону*** *и пробуем* ***получить произведение*** *или используем* ***специальные приемы решения.***

Таблица 5

Уравнения и неравенства

<table>
<tr><td colspan="2">1. Область допустимых значений (ОДЗ)</td></tr>
<tr><td>Областью допустимых значений (или областью определения) уравнения (или неравенства) называется общая область определения для функций $f(x)$ и $g(x)$, стоящих в левой и правой частях уравнения (или неравенства).</td><td>Для уравнения $\sqrt{x+2}=x$ ОДЗ: $x+2\geqslant 0$, то есть $x\geqslant -2$, так как область определения функции $f(x)=\sqrt{x+2}$ определяется условием: $x+2\geqslant 0$, а область определения функции $g(x)=x$ — множество всех действительных чисел.</td></tr>
<tr><td colspan="2">2. Уравнения-следствия</td></tr>
<tr><td>Если каждый корень первого уравнения является корнем второго, то второе уравнение называется следствием первого.
Если из правильности первого равенства следует правильность каждого последующего, то получаем уравнения-следствия.
При этом возможно появление посторонних корней. Поэтому при использовании уравнений-следствий проверка полученных корней подстановкой их в исходное уравнение является составной частью решения.</td><td>$\sqrt{x+2}=x.$
▶ Возведем обе части уравнения в квадрат:
$\left(\sqrt{x+2}\right)^2=x^2,$
$x+2=x^2,$
$x^2-x-2=0,$
$x_1=2,\ x_2=-1.$
Проверка. $x=2$ — корень; $x=-1$ — посторонний корень.
Ответ: 2. ◁</td></tr>
<tr><td colspan="2">3. Равносильные уравнения и неравенства</td></tr>
<tr><td>Определение</td><td>Простейшие теоремы</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Два уравнения (неравенства) называются равносильными на некотором множестве, если на этом множестве они имеют одни и те же решения.
То есть каждый корень первого уравнения является корнем второго уравнения и, наоборот, каждый корень второго уравнения является корнем первого. (Схема решения уравнений с помощью равносильных преобразований приведена в пунктах 4 и 6 этой таблицы.)</td><td>1. Если из одной части уравнения (неравенства) перенести в другую слагаемые с противоположным знаком, то получим уравнение (неравенство), равносильное заданному (на любом множестве).</td></tr>
<tr><td>2. Если обе части уравнения умножить или разделить на одно и то же число, не равное нулю (или на одну и ту же функцию, которая определена и не равна нулю на ОДЗ заданного уравнения), то получим уравнение, равносильное заданному (на ОДЗ заданного уравнения).</td></tr>
</table>

4. Схема поиска плана решения уравнений

Решение уравнений

с помощью **уравнений-следствий**	с помощью **равносильных преобразований**
1 ↓ 2 Преобразования, гарантирующие сохранение верного равенства	**Учесть ОДЗ исходного уравнения**
Проверка корней подстановкой в исходное уравнение	1 ↑↓ 2 Сохранять на ОДЗ верное равенство при прямых и обратных преобразованиях

применением свойств функций *

1 — исходное уравнение;

2 — уравнение, полученное в результате преобразования исходного;

↓, ↑ — символическое изображение направления выполненных преобразований

5. Замена переменных

Ориентир	Пример
Если в уравнение (неравенство или тождество) переменная входит в одном и том же виде, то удобно соответствующее выражение с переменной обозначить одной буквой (новой переменной).	$\sin^2 x - 2\sin x - 3 = 0$. ▶ *Замена:* $\sin x = t$. $t^2 - 2t - 3 = 0$, $t_1 = 3$, $t_2 = -1$. 1. При $t = 3$ имеем $\sin x = 3$ — корней нет, поскольку $\lvert 3 \rvert > 1$. 2. При $t = -1$ имеем $\sin x = -1$, тогда $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \mathbf{Z}$. *Ответ:* $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z$. ◁

* Применение свойств функций к решению уравнений рассмотрено в § 11.

6. Схема поиска плана решения неравенств

Решение неравенств

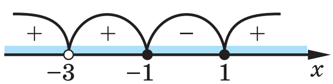
с помощью **равносильних преобразований**	**с помощью** **метода интервалов ($f(x) \gtrless 0$)**
Учесть ОДЗ исходного неравенства ① ↓↑ ② Сохранять на ОДЗ верное неравенство при прямых и обратных преобразованиях.	1. Найти ОДЗ. 2. Найти нули функции $f(x)=0$. 3. Отметить нули на ОДЗ и найти знак функции на каждом промежутке, на которые разбивается ОДЗ. 4. Записать ответ, учитывая знак заданного неравенства.

① — исходное неравенство;

② — неравенство, полученное в результате преобразования исходного;

↓, ↑ — символическое изображение выполненных преобразований (с указанием направления их выполнения)

7. Метод интервалов (решение неравенств вида $f(x) \gtrless 0$)

План	Пример
1. Найти ОДЗ. **2. Найти нули функции $f(x) = 0$.** **3. Отметить нули на ОДЗ и найти знак функции $f(x)$ на каждом промежутке, на которые разбивается ОДЗ.** **4. Записать ответ, учитывая знак заданного неравенства.**	Решите неравенство $\frac{x^2-1}{(x+3)^2} \geqslant 0$. ▶ Пусть $f(x)=\frac{x^2-1}{(x+3)^2}$. 1. ОДЗ: $(x+3)^2 \neq 0$, то есть $x \neq -3$. 2. Нули функции: $f(x)=0$. $\frac{x^2-1}{(x+3)^2}=0$, $x^2-1=0$, $x_1=-1$, $x_2=1$ (входят в ОДЗ). 3.  *Ответ:* $(-\infty; -3) \cup (-3; -1] \cup [1; +\infty)$. ◁

8. Теоремы о равносильности неравенств
2. Если обе части неравенства умножить или разделить на одно и то же положительное число *(или на одну и ту же функцию, которая определена и положительна на ОДЗ заданного неравенства)*, **не меняя знак неравенства, то получим неравенство, равносильное заданному (на ОДЗ заданного неравенства).**
3. Если обе части неравенства умножить или разделить на одно и то же отрицательное число (*или на одну и ту же функцию, которая определена и отрицательна на ОДЗ заданного неравенства***) и изменить знак неравенства на противоположный, то получим неравенство, равносильное заданному (на ОДЗ заданного неравенства).**

Таблица 6

Уравнения и неравенства с модулями

1. Решение уравнений и неравенств с модулями

по определению

$$|a| = \begin{cases} a, \text{ если } a > 0, \\ 0, \text{ если } a = 0, \\ -a, \text{ если } a < 0. \end{cases}$$

с использованием геометрического смысла

$|a|$ — *расстояние на числовой прямой от точки O до точки a*.

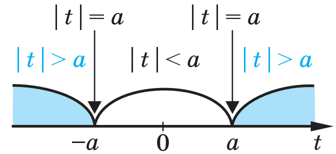
1. $|f(x)| = a$.
2. $|f(x)| = |g(x)|$.
3. $|f(x)| > a$.
4. $|f(x)| < a$.

по общей схеме

1. **Найти ОДЗ.**
2. **Найти нули всех подмодульных функций.**
3. **Отметить нули на ОДЗ и разбить ОДЗ на промежутки.**
4. **Найти решение в каждом промежутке (и проверить, входит ли это решение в рассматриваемый промежуток).**

с использованием специальных соотношений

2. Использование геометрического смысла модуля (при $a > 0$)



1. $|f(x)| = a \Leftrightarrow f(x) = a$ **или** $f(x) = -a$.
2. $|f(x)| = |g(x)| \Leftrightarrow f(x) = g(x)$ **или** $f(x) = -g(x)$.
3. $|f(x)| > a \Leftrightarrow f(x) < -a$ **или** $f(x) > a$.
4. $|f(x)| < a \Leftrightarrow -a < f(x) < a \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > -a, \\ f(x) < a. \end{cases}$

Обобщения

5. $|f(x)| = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geqslant 0, \\ f(x) = g(x) \text{ или } f(x) = -g(x). \end{cases}$
6. $|f(x)| > g(x) \Leftrightarrow f(x) < -g(x)$ **или** $f(x) > g(x)$.
7. $|f(x)| < g(x) \Leftrightarrow -g(x) < f(x) < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > -g(x), \\ f(x) < g(x). \end{cases}$

3. Использование специальных соотношений

1. $|u| = u \Leftrightarrow u \geqslant 0$.
2. $|u| = -u \Leftrightarrow u \leqslant 0$.
3. $|u| = |v| \Leftrightarrow u^2 = v^2$.
4. $|u| > |v| \Leftrightarrow u^2 > v^2$. **Тогда** $|u| - |v| > 0 \Leftrightarrow u^2 - v^2 > 0$; *знак разности модулей двух выражений совпадает со знаком разности их квадратов.*
5. $|u| + |v| = u + v \Leftrightarrow \begin{cases} u \geqslant 0, \\ v \geqslant 0. \end{cases}$
6. $|u| + |v| = -u - v \Leftrightarrow \begin{cases} u \leqslant 0, \\ v \leqslant 0. \end{cases}$
7. $|u| + |v| = |u + v| \Leftrightarrow uv \geqslant 0$.
8. $|u| + |v| = |u - v| \Leftrightarrow uv \leqslant 0$.
9. $|x - a| + |x - b| = b - a \Leftrightarrow a \leqslant x \leqslant b$, **где** $a < b$.

Таблица 7

Решение логарифмических уравнений

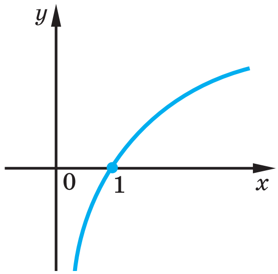
<table>
<tr><td colspan="2">1. Решение простейших логарифмических уравнений</td></tr>
<tr><td>Ориентир</td><td>Пример</td></tr>
<tr><td>Если a — число ($a > 0$ и $a \neq 1$), то
$\boxed{\log_a f(x) = c \Leftrightarrow f(x) = a^c}$
(используем определение логарифма)</td><td>▶ $\log_3(x-1) = 2$.
$x - 1 = 3^2$,
$x = 10$.
Ответ: 10. ◁</td></tr>
<tr><td colspan="2">2. Использование уравнений-следствий</td></tr>
<tr><td>Ориентир</td><td>Пример</td></tr>
<tr><td>Если из предположения, что первое равенство верно, следует, что каждое следующее верно, то гарантируем, что получаем уравнения-следствия. При использовании уравнений-следствий не происходит потери корней исходного уравнения, но возможно появление посторонних корней. Поэтому проверка полученных корней подстановкой в исходное уравнение является составной частью решения.</td><td>$\log_x(x+2) = 2$.
▶ По определению логарифма получаем
$x + 2 = x^2$,
$x^2 - x - 2 = 0$,
$x_1 = -1$, $x_2 = 2$.
Проверка. $x = -1$ — посторонний корень (в основании логарифма получаем отрицательное число);
$x = 2$ — корень ($\log_2(2+2) = 2$, $\log_2 4 = 2$, $2 = 2$).
Ответ: 2. ◁</td></tr>
<tr><td colspan="2">3. Равносильные преобразования логарифмических уравнений</td></tr>
<tr><td colspan="2">Замена переменных</td></tr>
<tr><td>Ориентир</td><td>Пример</td></tr>
<tr><td>Если в уравнение (неравенство или тождество) переменная входит в одном и том же виде, то удобно соответствующее выражение с переменной обозначить одной буквой (новой переменной).</td><td>$\lg^2 x - 2\lg x - 3 = 0$.
▶ Замена: $\lg x = t$,
$t^2 - 2t - 3 = 0$,
$t_1 = -1$, $t_2 = 3$.
Следовательно,
$\lg x = -1$ или $\lg x = 3$.
Тогда $x = 10^{-1} = 0{,}1$ или
$x = 10^3 = 1000$.
Ответ: 0,1; 1000. ◁</td></tr>
</table>

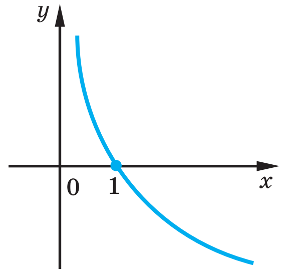
Продолж. табл. 7

<table>
<tr><td colspan="2">Уравнение вида $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ $(a > 0$ и $a \neq 1)$</td></tr>
<tr><td>Ориентир</td><td>Пример</td></tr>
<tr><td>$$\log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x), \\ \left.\begin{array}{l} f(x) > 0, \\ g(x) > 0 \end{array}\right| \text{ ОДЗ} \end{cases}$$
(учитываем ОДЗ и приравниваем выражения, стоящие под знаками логарифмов)</td><td>$\log_3(x^2 - 2) = \log_3(4x - 5)$.
ОДЗ: $\begin{cases} x^2 - 2 > 0, \\ 4x - 5 > 0. \end{cases}$
На этой ОДЗ данное уравнение равносильно уравнениям:
$x^2 - 2 = 4x - 5$, $x^2 - 4x + 3 = 0$,
$x_1 = 1$, $x_2 = 3$,
$x = 1$ — посторонний корень (не удовлетворяет условиям ОДЗ);
$x = 3$ — корень (удовлетворяет условиям ОДЗ).
Ответ: 3.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Равносильные преобразования уравнений в других случаях</td></tr>
<tr><td>Ориентир</td><td>Пример</td></tr>
<tr><td>1. **Учитываем ОДЗ** данного уравнения (и *избегаем преобразований, приводящих к сужению ОДЗ*).
2. Следим за тем, чтобы **на ОДЗ каждое преобразование можно было выполнить как в прямом, так и обратном направлениях с сохранением верного равенства.**</td><td>$\log_2(x + 1) = 3 - \log_2(x + 3)$.
ОДЗ: $\begin{cases} x + 1 > 0, \\ x + 3 > 0. \end{cases}$
На этой ОДЗ данное уравнение равносильно уравнениям:
$\log_2(x + 1) + \log_2(x + 3) = 3$,
$\log_2((x + 1)(x + 3)) = 3$,
$(x + 1)(x + 3) = 2^3$,
$x^2 + 4x - 5 = 0$,
$x_1 = 1$, $x_2 = -5$.
$x = 1$ — корень (удовлетворяет условиям ОДЗ);
$x = -5$ — посторонний корень (не удовлетворяет условиям ОДЗ).
Ответ: 1.</td></tr>
</table>

Таблица 8

Решение логарифмических неравенств

<table>
<tr><td colspan="2">1. График функции $y = \log_a x$ $(a > 0;\ a \neq 1)$</td></tr>
<tr><td>$a > 1$</td><td>$0 < a < 1$</td></tr>
<tr><td>

возрастает</td><td>

убывает</td></tr>
<tr><td colspan="2">2. Равносильные преобразования простейших логарифмических неравенств</td></tr>
<tr><td>$a > 1$</td><td>$0 < a < 1$</td></tr>
<tr><td>$$\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > g(x), \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$ $$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > g(x), \\ g(x) > 0. \end{cases}$$ Знак неравенства не меняется, и учитывается ОДЗ.</td><td>$$\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$ $$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) > 0. \end{cases}$$ Знак неравенства меняется, и учитывается ОДЗ.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Примеры</td></tr>
<tr><td>$$\log_2 (x - 5) > 3.$$ ▶ ОДЗ: $x - 5 > 0$, то есть $x > 5$. $$\log_2 (x - 5) > \log_2 2^3.$$ Функция $y = \log_2 t$ возрастающая, тогда $$x - 5 > 2^3,$$ $$x > 13.$$ Учитывая ОДЗ, имеем $x > 13$.
Ответ: $(13;\ +\infty)$. ◁</td><td>$$\log_{\frac{1}{2}} (x - 5) > 3.$$ ▶ ОДЗ: $x - 5 > 0$, то есть $x > 5$. $$\log_{\frac{1}{2}} (x - 5) > \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^3.$$ Функция $y = \log_{\frac{1}{2}} t$ убывающая, тогда $x - 5 < \left(\frac{1}{2}\right)^3$, $x < 5\frac{1}{8}$.
Учитывая ОДЗ, имеем $5 < x < 5\frac{1}{8}$.
Ответ: $\left(5;\ 5\frac{1}{8}\right)$. ◁</td></tr>
</table>

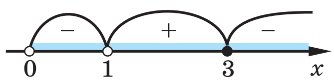
3. Решение более сложных логарифмических неравенств	
Ориентир	**Пример**
I. С помощью равносильных преобразований данное неравенство приводится к неравенству известного вида. *Схема равносильных преобразований неравенства:* 1. **Учитываем ОДЗ** заданного неравенства (и избегаем преобразований, приводящих к сужению ОДЗ). 2. Следим за тем, чтобы **на ОДЗ каждое преобразование можно было выполнить как в прямом, так и в обратном направлениях с сохранением верного неравенства.**	$\lg^2(10x) - \lg x \geqslant 3.$ ▶ ОДЗ: $x > 0$. На этой ОДЗ данное неравенство равносильно неравенствам: $(\lg 10 + \lg x)^2 - \lg x \geqslant 3$, $(1 + \lg x)^2 - \lg x \geqslant 3$. *Замена* $\lg x = t$. Тогда $(1 + t)^2 - t \geqslant 3$, то есть $t^2 + t - 2 \geqslant 0$. Решение этого неравенства $t \leqslant -2$ или $t \leqslant 1$ (см. рисунок).  Обратная замена дает $\lg x \leqslant -2$ или $\lg x \geqslant 1$. Тогда $\lg x \leqslant \lg 10^{-2}$ или $\lg x \geqslant \lg 10$. Учитывая, что функция $y = \lg x$ является возрастающей, получаем: $x \leqslant 10^{-2}$ или $x \geqslant 10$. С учетом ОДЗ имеем: $0 < x \leqslant 0{,}01$ или $x \geqslant 10$. *Ответ:* $(0;\ 0{,}01] \cup [10;+\infty)$. ◁
II. Применяется общий метод интервалов (данное неравенство приводится к неравенству $f(x) \gtrless 0$) и используется схема: 1. **Найти ОДЗ.** 2. **Найти нули $f(x)$.** 3. **Отметить нули функции на ОДЗ и найти знак $f(x)$ на каждом из промежутков, на которые разбивается ОДЗ.** 4. **Записать ответ, учитывая знак неравенства.**	$\log_x(2x + 3) < 2.$ ▶ Решим неравенство методом интервалов. Оно равносильно неравенству $\log_x(2x + 3) - 2 < 0.$ Обозначим $f(x) = \log_x(2x + 3) - 2$. 1. ОДЗ: $\begin{cases} 2x+3>0, \\ x>0, \\ x\neq 1, \end{cases}$ то есть $\begin{cases} x>0, \\ x\neq 1. \end{cases}$ 2. Нули функции: $f(x) = 0$. $\log_x(2x + 3) - 2 = 0$. Тогда $\log_x(2x + 3) = 2$. На ОДЗ это уравнение равносильно уравнению $2x + 3 = x^2$ (полученному по определению логарифма). То есть $x^2 - 2x - 3 = 0$, $x_1 = -1$, $x_2 = 3$. В ОДЗ входит только $x = 3$. Итак, $f(x)$ имеет единственный нуль функции $x = 3$. 3. Отмечаем нули функции на ОДЗ, находим знак $f(x)$ на каждом из промежутков, на которые разбивается ОДЗ, и записываем решения неравенства $f(x) < 0$.  *Ответ:* $x \in (0;\ 1) \cup (3;\ +\infty)$. ◁

Таблица 9

Системы уравнений

<table>
<tr><th colspan="2">1. Системы уравнений</th></tr>
<tr><th>Понятия системы и ее решений</th><th>Примеры</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Если ставится задача найти все общие решения двух (или больше) уравнений с одной или несколькими переменными, то говорят, что требуется решить систему уравнений. Записывают систему уравнений, объединяя их фигурной скобкой.
Решением системы называется такое значение переменной или такой упорядоченный набор значений переменных (если переменных несколько), которые удовлетворяют всем уравнениям системы.
Решить систему уравнений — значит найти все ее решения или доказать, что решений нет.
Если система не имеет решения, то ее называют несовместной.</td><td>$\begin{cases} x-y=4, \\ 2x+y=11 \end{cases}$ — система двух уравнений с двумя переменными.
Пара чисел (5; 1), то есть $\begin{cases} x=5, \\ y=1 \end{cases}$ — решение системы.</td></tr>
<tr><td>$\begin{cases} x^2-y+z=0, \\ xy+xz+yz=19, \\ x+y-z=2 \end{cases}$ — система трех уравнений с тремя переменными.
Тройка (1; 4; 3), то есть $\begin{cases} x=1, \\ y=4, \\ z=3 \end{cases}$ — одно из решений системы.</td></tr>
<tr><th colspan="2">2. Равносильность систем уравнений</th></tr>
<tr><td>Две системы уравнений называются равносильными на некотором множестве, если на этом множестве они имеют одинаковые решения (то есть каждое решение первой системы на этом множестве является решением второй и, наоборот, каждое решение второй системы является решением первой).
Если изменить порядок уравнений заданной системы, то получим систему, равносильную заданной.
Если одно из уравнений системы заменить на равносильное ему уравнение, то получим систему, равносильную заданной.</td><td>Областью допустимых значений (ОДЗ) системы называется общая область определения всех функций, входящих в запись этой системы.
Все равносильные преобразования систем выполняются на ОДЗ исходной системы.</td></tr>
</table>

3. Основные способы решения систем уравнений
Способ подстановки
Выражаем из одного уравнения системы одну переменную через другую (или через другие) и подставляем полученное выражение вместо соответствующей переменной во все другие уравнения системы (затем решаем полученное уравнение или систему и подставляем результат в выражение для первой переменной).
Пример. Решить систему $\begin{cases} 2x - y = 3, \\ x + y = 3. \end{cases}$ Решение. Из первого уравнения системы $y = 2x - 3$. Подставляем во второе уравнение системы и получаем $x + 2x - 3 = 3$. Отсюда $x = 2$. Тогда $y = 2x - 3 = 1$. *Ответ:* (2; 1).
Способ сложения
Если первое уравнение системы заменить суммой первого уравнения, умноженного на число $\alpha \neq 0$, и второго уравнения, умноженного на число $\beta \neq 0$ (а все остальные уравнения оставить без изменения), то получим систему, равносильную заданной.
Пример. Решить систему $\begin{cases} 5x - 3y = 9, \\ 3x + 2y = 13. \end{cases} \left\vert \begin{matrix} \cdot 2 \\ \cdot 3 \end{matrix} \right.$ Решение. Умножим обе части первого уравнения системы на 2, а второго — на 3 (чтобы получить как коэффициенты при переменной y противоположные числа) и почленно сложим полученные уравнения. Из последнего полученного уравнения находим значение x, подставляем результат в любое уравнение системы и находим значение y. $\begin{cases} 10x - 6y = 18, \\ 9x + 6y = 39. \end{cases} \Big\vert +$ $19x = 57,$ $x = 3.$ Тогда $3 \cdot 3 + 2y = 13$, $2y = 4$, $y = 2$. *Ответ:* (3; 2).

Графическое решение систем уравнений с двумя переменными

Выполняем равносильные преобразования заданной системы так, чтобы удобно было строить графики всех уравнений, входящих в систему. Затем строим соответствующие графики и находим координаты точек пересечения построенных линий — эти координаты и являются решениями системы.

Примеры

1. Решить графически систему $\begin{cases} 2x - y = 3, \\ x + y = 3. \end{cases}$

Решение. Заданная система равносильна системе $\begin{cases} y = 2x - 3, \\ y = 3 - x. \end{cases}$

Графиком каждого из уравнений системы является прямая.

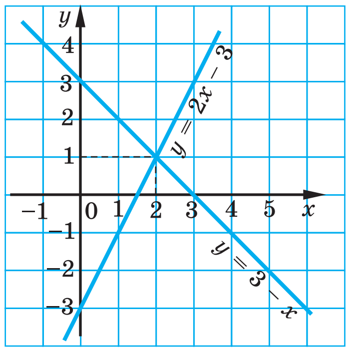
Для построения прямой достаточно построить две ее точки. Например, для

$y = 2x - 3$:

x	0	1
y	−3	−1

$y = 3 - x$:

x	0	1
y	3	2



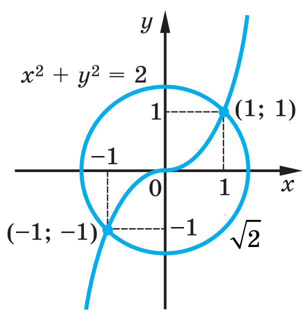
Графики пересекаются в единственной точке M (2; 1). Итак, пара чисел (2; 1) — единственное решение заданной системы.

Ответ: (2; 1).

2. Решить графически систему $\begin{cases} x^2 = 2 - y^2, \\ x^3 - y = 0. \end{cases}$

Решение. Заданная система равносильна системе $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2, \\ y = x^3. \end{cases}$

График первого уравнения — окружность радиуса $\sqrt{2}$ с центром в начале координат, а график второго — кубическая парабола $y = x^3$.



Эти два графика пересекаются в двух точках с координатами (−1; −1) и (1; 1).

Ответ: (−1; −1), (1; 1) — решение системы.

ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ К УПРАЖНЕНИЯМ

Раздел 1

§ 1. 5. 1) $-1\frac{2}{3}$; 1; 2) −1; 2; 3) 0; ±2; 4; 4) −5,5; −0,5; ±2,5. **6.** 1) [3; 4]; 2) $(-\infty; -4) \cup \left(\frac{2}{3}; +\infty\right)$; 3) (−∞; −0,5] ∪ [1,5; +∞); 4) (−5,5; −3,5) ∪ (0; 2).

§ 2. 3. 1) −3; 2) 9; 3) 0; 4) 1. **4.** 1) 11; 2) 1; 3) $\frac{1}{6}$; 4) −8. **5.** 1) (0; 1] ∪ [2; +∞); 2) (−∞; 0) ∪ (0,5; +∞); 3) (1; 2); 4) [1; 3] ∪ (4; +∞). **6.** 1) (−1; 0] ∪ (1; +∞); 2) [0,5; 1) ∪ (1; +∞); 3) $\left(-\infty; -\sqrt{3}\right] \cup [-1; 1] \cup \left[\sqrt{3}; +\infty\right)$ или $x = 1{,}5$; 4) (1; 2) ∪ ∪ (2; +∞).

§ 3. 1. 1) 6; 2) 7; 3) 5. **2.** 1) $3\Delta x$; 2) $3x_0\Delta x(x_0+\Delta x)+(\Delta x)^3$; 3) $\Delta x(2x_0+\Delta x-1)$; 4) $\Delta x+\frac{1}{x_0+\Delta x}-\frac{1}{x_0}$. **5.** а) $f'(x_1)=\sqrt{3}$; $f'(x_2) = 1$; б) $f'(x_1)=\frac{1}{\sqrt{3}}$; $f'(x_2) = 0$; в) $f'(x_1) = 0$; $f'(x_2) = 0$; г) $f'(x_1) = 0$; $f'(x_2)=-\frac{1}{\sqrt{3}}$. **6.** 1) 6; 2) 1; 3) −1; 4) 1. **7.** 1) $y = 2x - 1$; 2) $y = 0$; 3) $y = x - 0{,}25$; 4) $y = -6x - 9$. **8.** 1) $y = 0{,}5x + 0{,}5$; 2) $y = x + 0{,}25$; 3) $y = 0{,}25x + 3$; 4) $y=\frac{1}{6}x+1\frac{1}{2}$. **9.** 1) 1; 2) 13; 3) 75; 4) 0,25.

§ 4. 1. 1) $8x^7$; 2) $-5x^{-6}$; 3) $\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$; 4) $20x^{19}$; 5) $-20x^{-21}$; 6) $-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$. **2.** 1) 1; 2) $5x^4 - 1$; 3) $-\frac{1}{x^2}-3x^2$; 4) $2x+\frac{1}{2\sqrt{x}}$. **3.** 1) $6x^2 + 3$; 2) $2x + 5$; 3) $4x^3 - 4x$; 4) $\frac{1}{\sqrt{x}}+12x^2$. **4.** 1) $6x^2 + 6x^5$; 2) $-6x^2 + 2x + 2$; 3) $-4x^3 + 6x^2 - 3$; 4) $\frac{15x^2-3x}{2\sqrt{x}}$. **5.** 1) $\frac{x^2+6x}{(x+3)^2}$; 2) $-\frac{7}{(3x-2)^2}$; 3) $-\frac{11}{(5x+1)^2}$; 4) $\frac{2x^2-2x}{x^4}$. **6.** 1) $f'(-2) = -2$; $f'\left(\frac{1}{2}\right)=3$; 2) $f'(2) = 28$; $f'(-1) = -8$; 3) $f'(0)=-\frac{5}{9}$; $f'(-3)=-\frac{5}{81}$; 4) $f'\left(-\sqrt{2}\right)=1{,}5$; $f'(0{,}1) = 101$. **7.** 1) 1; 2) −2; 0; 3) ±0,5; 4) 0,25. **8.** 1) (1; +∞); 2) (−2; 0); 3) (−2; 0) ∪ (0; 2); 4) (−∞; −1) ∪ (1; +∞). **9.** 1) $f(u)=\sqrt{u}$; $u(x)=\sin x$; 2) $f(u)=u^5$; $u(x)=2x+x^2$; 3) $f(u)=\sqrt{u}$; $u(x)=x^3-x$; 4) $f(u)=\cos u$; $u(x)=2x-\frac{\pi}{4}$. **10.** 1) $\boldsymbol{R}$; 2) [−3; +∞); 3) (4; +∞); 4) (−∞; −2) ∪ (2; +∞); 5) $[2\pi k; \pi + 2\pi k]$, $k \in \boldsymbol{Z}$; 6) (0; 0,5]; 7) $\left[\frac{\pi}{3}+2\pi k; \frac{5\pi}{3}+2\pi k\right]$, $k\in \boldsymbol{Z}$; 8) [0,1; 10]. **11.** 1) $3(x^2 - x)^2(2x - 1)$;

2) $-10\,(2x-1)^{-6}$; 3) $4\left(x-\frac{1}{x}\right)^3\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$; 4) $\frac{5-2x}{2\sqrt{5x-x^2}}$; 5) $\frac{3}{4\sqrt{3x\left(2+\sqrt{3x}\right)}}-\frac{4}{(2x-1)^3}$.

12. 1) $y=7x-4$; 2) $y=26x+54$; 3) $y=-0{,}5x+1{,}5$; 4) $y=7x+6$.

§ 5. 1. 1) $-\sin x$; 2) $2\cos x-3$; 3) $\frac{1}{\cos^2 x}-\frac{1}{\sin^2 x}$; 4) $3x^2+\frac{1}{\sin^2 x}$.

2. 1) $\operatorname{tg} x+\frac{x}{\cos^2 x}$; 2) $\operatorname{ctg} x-\frac{x}{\sin^2 x}$; 3) $\sin x\left(1+\frac{1}{\cos^2 x}\right)$; 4) $-\cos x\left(1+\frac{1}{\sin^2 x}\right)$.

3. 1) $\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}$; 2) $\frac{\cos x+x\sin x}{\cos^2 x}$; 3) $\sin 2x$; 4) $-\sin 2x$. **4.** 1) $\cos x$; 2) $2\cos 2x$; 3) $-6\sin 6x$; 4) $-4\sin 4x$. **5.** 1) $\frac{\cos x}{2\sqrt{1+\sin x}}$; 2) $-2x\sin x^2$; 3) $-\sin x\cos(\cos x)$; 4) $\frac{3}{\cos^2 6x\sqrt{\operatorname{tg} 6x}}$. **6.** 1) $3e^x$; 2) $e^x-\frac{1}{x}$; 3) $-e^{-x}+5x^4$; 4) $\frac{2}{2x-1}$. **7.** 1) $e^{5x}(5\cos x-$ $-\sin x)$; 2) $\frac{1-\ln x}{x^2}$; 3) $\frac{\lg x}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{x}\ln 10}$; 4) $x^2\left(3\log_2 x+\frac{1}{\ln 2}\right)$. **8.** 1) 0; 2) 2; 3) -1; 4) -8. **9.** 1) 4; 2) 1,5; 3) 0; 4) 0. **10.** 1) Нет; 2) $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k$, $k\in \boldsymbol{Z}$; 3) $\frac{\pi k}{4}$, $k\in \boldsymbol{Z}$; 4) $\frac{\pi}{2}+\pi k$; $(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k$, $k\in \boldsymbol{Z}$. **11.** 1) -2; 2) 0; 3) e; 4) $-\frac{\pi}{4}+\pi k$, $k\in \boldsymbol{Z}$. **12.** 1) $(0{,}5\ln 0{,}5;\ +\infty)$; 2) $(-\infty;\ 0)\cup(0{,}5;\ +\infty)$; 3) $\left(\frac{1}{e};\ +\infty\right)$; 4) $(1{,}5;\ +\infty)$. **13.** 1) а) $\frac{1}{\sqrt{e}}$; б) $\left(\frac{1}{\sqrt{e}};+\infty\right)$; в) $\left(0;\ \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$; 2) а) 1; б) $(1;\ +\infty)$; в) $(0;\ 1)$; 3) а) e; б) $(0;\ e)$; в) $(e;\ +\infty)$; 4) а) e^{-2}; б) $(e^{-2};\ +\infty)$; в) $(0;\ e^{-2})$. **14.** 1) $y=-\frac{1}{\sqrt{2}}x+\frac{\pi+4}{4\sqrt{2}}$; 2) $y=4x+1-\frac{\pi}{2}$; 3) $y=2$; 4) $y=-1$. **15.** 1) $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}$, $k\in \boldsymbol{Z}$; 2) 1; 3) 0. **16.** $y=5x+2$. **17.** $y=3x-1$.

§ 6. <u>Пункт 6.1.</u> 1. а) Возрастает на $[-6;\ -4]$ и $[-2;\ 2]$; убывает на $[-4;\ -2]$ и $[2;\ 6]$; б) возрастает на $[-7;\ -4]$ и $[-2;\ 2]$; убывает на $[-4;\ -2]$ и $[2;7]$. **2.** Возрастает на $(-\infty;\ -5]$ и $[5;\ +\infty)$; убывает на $[-5;\ 5]$. **3.** Возрастает на $[-3;\ -1]$; убывает на $(-6;\ -3]$ и $[-1;\ 3)$. **6.** 1) Возрастает на $[1;\ +\infty)$; убывает на $(-\infty;\ 1]$; 2) возрастает на $\left(-\infty;-2\sqrt{2}\right]$ и $\left[2\sqrt{2};+\infty\right)$; убывает на $\left[-2\sqrt{2};2\sqrt{2}\right]$; 3) возрастает на $[-1;\ 0]$ и $[1;\ +\infty)$; убывает на $(-\infty;\ -1]$ и $[0;\ 1]$; 4) возрастает на $(-\infty;\ -1]$ и $[1;\ +\infty)$; убывает на $[-1;\ 0)$ и $(0;\ 1]$. **7.** 1) Возрастает на $[0;\ +\infty)$; убывает на $(-\infty;\ 0)$; 2) возрастает на $(1;\ +\infty)$; убывает на $(0;\ 1)$; 3) возрастает на $\left[-\frac{7\pi}{6}+2\pi k;\ \frac{\pi}{6}+2\pi k\right]$, $k\in \boldsymbol{Z}$; убывает на $\left[\frac{\pi}{6}+2\pi k;\ \frac{5\pi}{6}+2\pi k\right]$, $k\in \boldsymbol{Z}$; 4) возрастает на $\left[\frac{\pi}{3}+2\pi k;\ \frac{5\pi}{3}+2\pi k\right]$, $k\in \boldsymbol{Z}$; убывает на $\left[-\frac{\pi}{3}+2\pi k;\ \frac{\pi}{3}+2\pi k\right]$, $k\in \boldsymbol{Z}$. **8.** 1) $(-\infty;\ 0]$;

2) $[1; +\infty)$; 3) $[0; 9]$. **9.** 1) 1; 2) 0; 3) π; 4) 1. **12.** 1) Возрастает на $(-\infty; -2]$ и $[1; +\infty)$; убывает на $[-2; 1]$; 2) $x = -2$ — точка максимума; $x = 1$ — точка минимума. **16.** 1) Возрастает на $[3; +\infty)$; убывает на $(-\infty; 3]$; $x = 3$ — точка минимума; $f(3) = -4$; 2) возрастает на $[-1; 0]$ и $[1; +\infty)$; убывает на $(-\infty; -1]$ и $[0; 1]$; $x = \pm 1$ — точки минимума; $f(-1) = f(1) = -1$; $x = 0$ — точка максимума; $f(0) = 0$; 3) возрастает на $(-\infty; -2]$ и $[2; +\infty)$; убывает на $[-2; 0)$ и $(0; 2]$; $x = -2$ — точка максимума; $f(-2) = -4$; $x = 2$ — точка минимума; $f(2) = 4$; 4) возрастает на $[1; 2]$; убывает на $[2; 3]$; $x = 2$ — точка максимума; $f(2) = 2$. **17.** 1) Возрастает на $[e; +\infty)$; убывает на $(0; 1)$ и $(1; e]$; $x = e$ — точка минимума; $f(e) = e$; 2) возрастает на $[-0{,}5; 0]$ и $[0{,}5; +\infty)$; убывает на $(-\infty; -0{,}5]$ и $[0; 0{,}5]$; $x = \pm 0{,}5$ — точки минимума; $f(-0{,}5) = f(0{,}5) = -1{,}25$; $x = 0$ — точка максимума; $f(0) = -1$; 3) возрастает на $(-\infty; 1]$ и $[1; +\infty)$; 4) возрастает на $\left[-\frac{\pi}{3} + 2\pi k; \frac{\pi}{3} + 2\pi k\right]$, $k \in \boldsymbol{Z}$; убывает на $\left[\frac{\pi}{3} + 2\pi k; \frac{5\pi}{3} + 2\pi k\right]$, $k \in \boldsymbol{Z}$; $x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$, — точки минимума; $f\left(-\frac{\pi}{3} + 2\pi k\right) = -\frac{3\sqrt{3}}{4}$, $k \in \boldsymbol{Z}$; $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$, — точки максимума; $f\left(\frac{\pi}{3} + 2\pi k\right) = \frac{3\sqrt{3}}{4}$, $k \in \boldsymbol{Z}$. **Пункт 6.2.** **4.** 1) б) $(-\infty; -4] \cup [4; +\infty)$; в) при $a < -4$, $a > 4$ — два; при $a = \pm 4$ — один; при $-4 < a < 4$ — нет; 2) б) $[-2; +\infty)$; в) при $a < -2$ — нет; при $a = -2$, $a > 0$ — один; при $-2 < a \leqslant 0$ — два; 3) а) график функции изображен на рис. 180; б) $\left[-\frac{2}{e}; +\infty\right)$; в) при $a < -\frac{2}{e}$ — нет; при $a = -\frac{2}{e}$, $a \geqslant 0$ — один; при $-\frac{2}{e} < a < 0$ — два; 4) а) график функции изображен на рис. 181; б) $(-\infty; 0) \cup [e; +\infty)$; в) при $a < 0$, $a = e$ — один; при

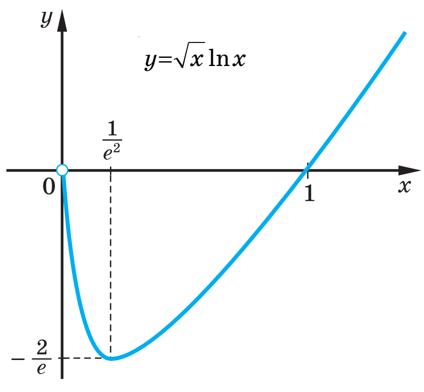


Рис. 180

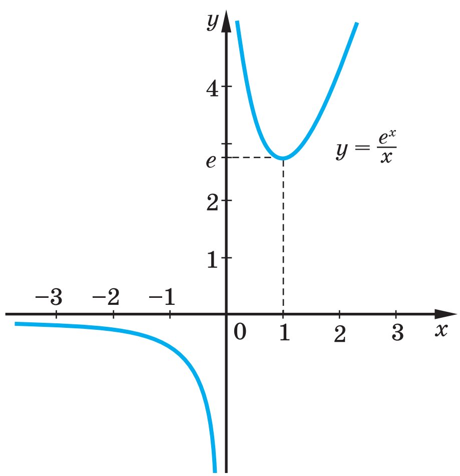


Рис. 181

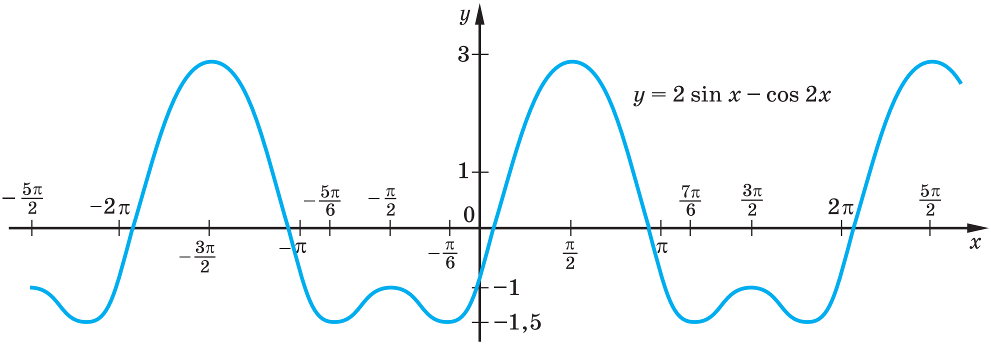


Рис. 182

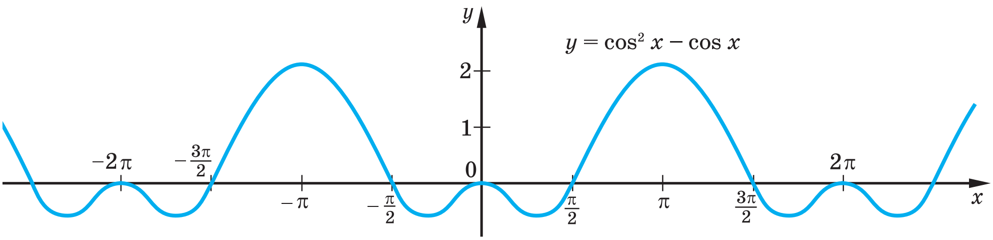


Рис. 183

$0 \leqslant a < e$ — нет; при $a > e$ — два. **5.** 1) 1; 2) 2; 3) 1; 4) 3. **6.** 3), 4) Графики функций изображены на рис. 182 и 183. **7.** $\left(\frac{e}{6}\right)^6$. **<u>Пункт 6.3.</u>** **1.** 1) $f_{\max} = 9$, $f_{\min} = 5$; 2) $f_{\max} = 5$, $f_{\min} = -4$; 3) $f_{\max} = 6$, $f_{\min} = -2$; 4) $f_{\max} = 1$, $f_{\min} = -31$. **2.** 1) $f_{\max} = 4$, $f_{\min} = -4$; 3) $f_{\max} = 1 - \frac{\pi}{4}$, $f_{\min} = -\pi$. **3.** 2) $f_{\max} = 1$, $f_{\min} = -3$; 4) $f_{\max} = \ln 2 + 5$, $f_{\min} = \ln 4 - 2$. **4.** 1) $f_{\max} = 5$, $f_{\min} = -52$; 4) $f_{\max} = 78$, $f_{\min} = -58$. **5.** 5; 5. **6.** 3,5; 0,5. **7.** 0; 8. **8.** Квадрат со стороной 5 см. **9.** $\frac{a}{6}$. **12.** 4. **13.** Равнобедренный треугольник с боковой стороной $\frac{a}{2}$ и углом α при вершине. **14.** $\frac{\pi R^3}{\sqrt{2}}$. **16.** 13. **17.** 367. **18.** $14 + 2\pi$. **19.** К точке отрезка AB, удаленной от B на 1 км.

§ 7. **4.** 1) -3; 2) ± 2; 3) 2; 4) -3; 1. **5.** 1) -3; 2) 25; 3) $-\frac{5}{6}$; 4) 14; 5) 5; 6) -3; 7) 0,25; 8) $2\sqrt{2}$; 9) 3; 10) 2; 11) 0; 12) $-1\frac{5}{7}$; 13) $\frac{a}{b}$; 14) 1; 15) 1,25; 16) $4\frac{2}{3}$. **6.** 1) $(-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$ или $x = 1$; 3) $(-3; -2] \cup [3; 4)$; 5) $(-\infty; -1] \cup (8; +\infty)$; 8) $[-2; 3]$.

§ 10. **1.** 1) $6x-6$; 2) $12x^2 \ln x + 7x^2$; 3) $-2\sin x - x\cos x$; 4) $(2-x^2)\sin x + 4x\cos x$. **2.** 1) Выпуклая вниз на $(-\infty; -1)$ и $(1; +\infty)$; выпуклая вверх на $(-1; 1)$; $x = \pm 1$ — точки перегиба; 2) выпуклая вниз на $\left(-\frac{3\pi}{4}; -\frac{\pi}{4}\right)$ и $\left(\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right)$; выпуклая вверх на $\left(-\pi; -\frac{3\pi}{4}\right)$, $\left(-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right)$ и $\left(\frac{3\pi}{4}; \pi\right)$; $x=\pm\frac{\pi}{4}$, $x=\pm\frac{3\pi}{4}$ — точки перегиба; 3) выпуклая вниз на $(-\infty; -1)$ и $(0;1)$; выпуклая вверх на $(-1; 0)$ и $(1; +\infty)$; $x = 0$ — точка перегиба; 4) выпуклая вниз на $\left(e\sqrt{e}; +\infty\right)$; выпуклая вверх на $(0; e\sqrt{e})$; $x=e\sqrt{e}$ — точка перегиба.

§ 11. **<u>Пункт 11.1.</u>** **1.** 1) 3; 2) 5. **2.** 1) ± 1; 2) 0. **3.** 1) 2; 2) 0; 3) 2. **4.** 1) 0; 2) 0; 3) 1. *Указание.* При $x < 0$ выполнить оценку значений левой и правой частей уравнения. **5.** 1) 1; 2; 2) 1; 3; 3) -2; 0. **6.** 1) 0; 1; 3; 2) 0; 1; 2; 3) 0; ± 1.

Дополнительные упражнения. **2.** 1) 8; 2) 6. **3.** 1) 8. **9.** 1) 0,25. **27.** 7) *Указание.* Прологарифмировать равенство $y=(\operatorname{tg} x)^{\operatorname{ctg} x}$ по основанию e и взять производную от обеих частей полученного равенства (учитывая, что $\ln y$ — сложная функция), затем из последнего равенства найти y'.

Раздел 2

§ 14. **4.** 1) Нет; 2) да; 3) да; 4) нет. **5.** 1) Да; 2) да; 3) нет; 4) да. **6.** 1) $2x-\frac{x^5}{5}+C$; 2) $\frac{x^2}{2}+\sin x+C$; 3) $2x^2+C$; 4) $-8x+C$; 5) $\frac{x^7}{7}+C$; 6) $-\frac{1}{2x^2}-2x+C$; 7) $x+\frac{1}{3x^3}+C$; 8) $\frac{x^4}{4}+C$. **7.** 1) $2x-\frac{x^4}{4}-\frac{1}{2x^2}+C$; 2) $\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2x^4}+\sin x+C$; 3) $-\frac{1}{x}+\cos x+C$; 4) $\frac{5}{3}x^3-x+C$; 5) $\frac{1}{12}(2x-8)^6+C$; 6) $-\frac{3}{2}\cos 2x+C$; 7) $-\frac{1}{40}(4-5x)^8+C$; 8) $-\frac{1}{3}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+C$; 9) $\frac{1}{15(4-15x)^3}+C$; 10) $-2\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}-x\right)+C$; 11) $-\frac{4}{3(3x-1)}+C$; 12) $\frac{1}{2x^4}+\frac{1}{3}\operatorname{tg}(3x-1)+C$. **8.** 1) $x-\frac{1}{3}\sin 3x+2\cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right)+C$; 2) $-\frac{1}{4}\operatorname{ctg} 4x-2\sqrt{2-x}-x^3+C$; 3) $\frac{1}{3}\operatorname{tg}(3x+1)-3\cos(4-x)+x^2+C$; 4) $\frac{1}{4(3-2x)^2}+\frac{6}{5}\sqrt{5x-2}+2\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)+C$. **9.** 1) $-\frac{1}{x}-10$; 2) $\operatorname{tg} x-1$; 3) $\frac{x^4}{4}+1\frac{3}{4}$; 4) $-\cos x-2$. **10.** 1) x^2+x; 2) x^3-x^2+4; 3) $\frac{x^2}{2}+2x+\frac{1}{2}$; 4) $-\frac{x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}-4\frac{1}{3}$. **11.** 1) $2\sin x+3$; 2) $x-\frac{x^3}{3}+3$; 3) $-\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-2$; 4) $-\frac{1}{3x^3}+5\frac{2}{3}$. **12.** 1) $2x^2-\frac{1}{x}+1$; 2) $\frac{x^4}{4}+2x+3$;

3) $x-x^2+8$; 4) $-\frac{1}{x}-2x^5+3x+5$. **13.** $\frac{t^3}{3}+t^2-t$. **14.** $4\sin\frac{t}{2}+2$. **15.** t^4+2t^2+2t+7.

§ 15. **<u>Пункт 15.1.</u>** **1.** 1) 6,6; 2) 1; 3) 20; 4) 1; 5) $\frac{1}{15}$; 6) 6; 7) 0,9; 8) 0,5. **3.** 1) 3; 2) 2; 3) $9\sqrt{3}$; 4) 4; 5) $\frac{2\pi}{3}+1$; 6) 78; 7) $\frac{\pi+3}{12}$; 8) 9,5. **4.** 1) 0,4; 2) 1,6; 3) $9\frac{1}{3}$; 4) $10\frac{2}{3}$. **5.** 1) 0,75; 2) 2; 3) $7\frac{1}{3}$; 4) $5\frac{1}{3}$. **6.** 1) 4,25; 2) $2\sqrt{3}-\frac{2\pi}{3}$; 3) $2\frac{2}{3}$; 4) $\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$. **<u>Пункт 15.2.</u>** **7.** $5\frac{1}{3}$. **8.** 4,5. **9.** 2) $\frac{15\pi}{2}$; 3) $\frac{\pi}{2}$; 4) $\frac{16\pi}{15}$. **10.** 1) $\frac{2\pi}{5}$; 2) 11π; 3) $\frac{50\pi}{3}$; 4) $\frac{\pi}{6}$.

§ 16. **1.** 1) 68 м; 2) $21\frac{1}{3}$. **2.** 1) $y = 3x - 2x^2 + C$; 2) $y = 2x^3 - 4x^2 + x + C$; 3) $y = 1{,}5e^{2x} + C$; 4) $y = 2\sin 2x + C$. **3.** 1) $y = 1 - \cos x$; 2) $y = 2\sin x + 1$; 3) $y = x^3 + 2x^2 - x - 4$; 4) $y = 2x + x^2 - x^3 + 2$; 5) $y = e^x + 1 - e$; 6) $y = -e^{-x} + 3$.

Раздел 3

§ 17. **13.** 34. **14.** 80 %.

§ 18. **<u>Пункт 18.1.1.</u>** **1.** 12. **2.** 1) 16; 2) 60. **3.** 1) 2052; 2) яблоко. **4.** 1680. Указание. Целесообразно в качестве мест выбрать экзамены и размещать по ним заданные дни. **5.** 24. **6.** 870. **7.** 336. **8.** 210. **9.** 2730. **10.** $26\cdot25\cdot24\cdot23\cdot22$. **11.** 120. **12.** 96. **13.** 544 320. **14.** 1) 24; 2) 12. **15.** 1) 5; 2) 6. **<u>Пункт 18.1.2.</u>** **1.** 24. **2.** 5040. **3.** 120. **4.** 6. **5.** 1) 720; 2) 600. **6.** 1) 6; 2) 6. **7.** 384. **8.** 240. **9.** $5!\cdot7!\cdot8$. **10.** $10!$; $(5!)^2$. **<u>Пункт 18.1.3.</u>** **1.** 21. **2.** 56. **3.** 210. **4.** 1) 55; 2) 165. **5.** 400 400.

§ 19. **<u>Пункт 19.1.</u>** **1.** 1) Случайное; 2) невозможное; 3) случайное; 4) невозможное; 5) достоверное; 6) достоверное; 7) случайное; 8) невозможное; 9) достоверное; 10) случайное; 11) случайное. **4.** 1) 0,42; 2) 0,51; 3) 0,49. **5.** 1) 0,43; 2) 0,1; 3) 0,9. **6.** 0,03. **7.** 0,002. **8.** 0,998. **9.** 0. **10.** 1. **11.** 1) 1; 2) 0. **<u>Пункт 19.2.</u>** **4.** 1) $A_1\cdot A_2\cdot A_3$; 2) $\overline{A_1}\cdot\overline{A_2}\cdot\overline{A_3}$; 3) $A_1\cdot A_2\cdot A_3+A_1\cdot A_2\cdot\overline{A_3}+A_1\cdot\overline{A_2}\cdot A_3+\overline{A_1}\cdot A_2\cdot A_3+A_1\cdot\overline{A_2}\cdot\overline{A_3}+\overline{A_1}\cdot A_2\cdot\overline{A_3}+\overline{A_1}\cdot\overline{A_2}\cdot A_3=\overline{\overline{A_1}\cdot\overline{A_2}\cdot\overline{A_3}}$; 4) $A_1\cdot\overline{A_2}\cdot\overline{A_3}$; 5) $\overline{A_1}\cdot A_2\cdot A_3$. **5.** A и B; A и C; B и M; C и D; C и M; C и T; D и K; D и M; D и T. **6.** A и B; C и D; C и M; D и M; K и M. **7.** 1) 0,71; 2) 0,71; 3) 0,51; 4) 0,49; 5) 0,96; 6) 1. **8.** 1) 0,53; 2) 0,9; 3) 0,47; 4) 0,76. **9.** 1) 0,91; 2) 0,09. **10.** 1) 0,25; 2) 0,75. **11.** $P(A) = 0{,}8$; $P(\overline{A}) = 0{,}2$. **<u>Пункт 19.3.</u>** **1.** $\frac{1}{24}$. **2.** $\frac{1}{1250}$. **3.** 0,04. **4.** 0,75. **5.** 1) $\frac{1}{12}$; 2) $\frac{1}{3}$. **6.** 0,95. **7.** 1) 0,5; 2) 0,5; 3) $\frac{2}{3}$. **8.** Выигрыши равновозможные. **9.** Юра не прав. **10.** Нет. **11.** 1) Красное; 2) 1; 3) 0; 4) 0,4; 5) 0,52. **12.** Любую.

13. 1 красная, 5 желтых. **14.** Зеленая, $p=\frac{1}{6}$. **15.** 1) $\frac{4}{15}$; 2) 0; 3) $\frac{1}{3}$; 4) 11. **16.** 0,5. **17.** $\frac{1}{36}$. **18.** $\frac{2}{3}$. **19.** $\frac{1}{120}$. **Пункт 19.4.** **1.** Шансы одинаковы. **2.** В кино. **3.** Шансы одинаковы. **4.** $\frac{2}{\pi}$. **5.** $\frac{2\sqrt{3}}{3\pi}$. **6.** 0,5. **7.** 0,4375. **Пункт 19.5.** **1.** 1) $\frac{1}{3}$; 2) $\frac{4}{9}$; 3) $\frac{4}{30}$; 4) $\frac{1}{3}$. **2.** 1) 0,5; 2) 0,625. **3.** 0,2375. **4.** 0,2. **5.** $\frac{8}{203}$. **Пункт 19.6.** **1.** 0,64. **2.** $\frac{1}{12}$. **3.** 0,0012. **5.** 1) 0,42; 2) 0,985; 3) 0,14; 4) 0,425. **6.** 0,714. **7.** 0,126. **8.** 0,5. **9.** $n \geqslant 4$. **Пункт 19.7.** **4.** 1) Три из четырех; 2) не меньше пяти из восьми. **Пункт 19.8.**

1.

X	1	2	3	4	5	6
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

2.

X	1	2
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6}$

Y	1	2
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

Z	1	2
P	0,5	0,5

3.

X	0	1	2
P	0,25	0,5	0,25

4.

X	0	1	2	3
P	0,125	0,375	0,375	0,125

5.

X	34	35	36	37	38	39	40
M	1	3	4	6	3	2	1
W	0,05	0,15	0,2	0,3	0,15	0,1	0,05

6.

X	40	42	44	46	48	50	52	54
M	1	2	5	8	12	12	9	1
W	0,02	0,04	0,1	0,16	0,24	0,24	0,18	0,02

Пункт 19.9. **3.** 1) Вторник и среда; четверг и пятница; пятница и суббота; 2) четверг и пятница; 3) понедельник и вторник; суббота и воскресенье. **5.** 1) 12; 2) 33–38 лет.

§ 20. **Пункт 20.1.** **2.** 240.

3.

Цвет	черный	красный	синий	серый	белый	желтый	зеленый
Количество кепок	9600	6000	4800	4200	3300	1500	600

4.

Жирность	0	0,5	1	1,5	2,5	3,5	5
Количество литров	400	240	160	200	480	280	240

Пункт 20.2. **1.** 1) $R = 4$; $Mo = 2$; $Me = 2$; $\overline{X}=2\frac{2}{3}$; 2) $R = 8$; $Mo = 2$; $Me = 1$; $\overline{X}=0{,}6$. **2.** 1) $R = 3$; $Mo = 3$; $Me = 3$; $\overline{X}=3\frac{4}{11}$; 2) $R = 8$; $Mo_1 = 4$; $Mo_2 = 5$; $Me = 4$; $\overline{X}=3\frac{4}{7}$. **3.** $Mo_1 = 135$; $Mo_2 = 140$; $Me = 135$; $\overline{X}=129\frac{6}{11}$. **Пункт 20.3.** **1.** 1) 3,5; 2) 2,5; 3) 1,2; 4) 9,2. **2.** 1) 2,56; 2) 4,96. **5.** 1) 1,67; 2) 1,9.

§ 21. **Пункт 21.2.** **1.** 1) 28 560; 2) 180 000. **2.** 2 980 000. **3.** 140 625. **4.** 1) 504; 2) 16 848; 3) 34 992; 4) 6561. **5.** 1) 40; 2) 48. Указание. Учесть остатки от деления заданных цифр на 3. **6.** 2520. **7.** 16^{100}. **8.** 91. **9.** 1) C_{19}^5; 2) C_{25}^5. **10.** C_{n-1}^{k-1}.

§ 22. **Пункт 22.1.** **2.** 1) $x = 3$; $y = -4$; 2) $x = 3$; $y = 8$; 3) $x = -3$; $y = -2$; 4) $x = 1$; $y = 0$. **3.** 1) $8 - 2i$; 2) $-2 + i$; 3) $3 - 4i$; 4) 4. **4.** 1) $4 - 5i$; 2) $2 + 19i$; 3) $-11 - 5i$; 4) $6 + 4i$. **5.** 1) $18 + 16i$; 2) $-16 - 28i$; 3) $-18 + 14i$; 4) 65. **6.** 1) $3 - 4i$; 2) $5 + i$; 3) $2{,}96 - 0{,}28i$; 4) $0{,}5 - 0{,}5i$. **7.** 1) i; 2) i; 3) 1; 4) 0. **8.** 1) $-5 - 12i$; 2) $-2 - 2i$; 3) $-7 + 24i$; 4) $2 + 11i$. **10.** 1) $2 \pm i\sqrt{5}$; 2) $0{,}5 \pm 0{,}5i$; 3) $\frac{-1 \pm i\sqrt{7}}{2}$; 4) $\frac{-5 \pm i\sqrt{11}}{6}$.

Пункт 22.2. **2.** 1) $2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$; 2) $2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$; 3) $3\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$; 4) $3\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$; 5) $4(\cos\pi + i\sin\pi)$; 6) $2\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$; 7) $4\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$. **3.** 1) $2\sqrt{3} + 2i$; 2) $-3 + 3\sqrt{3}i$; 3) $-\sqrt{2} - i\sqrt{2}$. **5.** 1) $z_1z_2 = 48\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right) = -24\sqrt{3} - 24i$; $\frac{z_1}{z_2} = 3\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = 3i$; 2) $z_1z_2 = 18\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = 18i$; $\frac{z_1}{z_2} = 2(\cos\pi + i\sin\pi) = -2$. **6.** 1) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}-1}{2} + \frac{\sqrt{3}+1}{2}i$; 2) $\sqrt{\frac{3}{2}}\left(\cos\left(-\frac{7\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\frac{7\pi}{12}\right)\right) = \frac{\sqrt{3}-3}{4} - \frac{\sqrt{3}+3}{4}i$; 3) $\cos\pi + i\sin\pi = -1$; 4) $\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{11\pi}{12} + i\sin\frac{11\pi}{12}\right) = -\frac{\sqrt{3}+1}{4} + \frac{\sqrt{3}-1}{4}i$. **7.** 1) 256; 2) $32\,768i$; 3) 4096; 4) -1024. **8.** 1) $\pm\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$; $-i$; 2) $-\frac{1}{\sqrt{2}} - i\sqrt{\frac{3}{2}}$; $\frac{1}{\sqrt{2}} + i\sqrt{\frac{3}{2}}$; 3) $\pm\sqrt{2} \pm i\sqrt{2}$; 4) $\pm i$; $\pm\frac{\sqrt{3}}{2} \pm \frac{1}{2}i$. **9.** 1) $\frac{-3 \pm 3\sqrt{3}i}{2}$; 2) $3\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}} \pm \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)$. 3) $\pm 2i$; $\pm 3 \pm i$; 4) $\pm i$; $\pm 5i$.

Дополнительные упражнения. **1.** 729. **2.** 2916. **3.** 24. **4.** 48. **5.** 210. **6.** 816. **7.** 72. Указание. Учесть остатки от деления заданных цифр на 3. **8.** 90. **10.** 480. **11.** 900. **12.** 54. **13.** 45. **14.** 11. **29.** Нет. **30.** С Наташей. **31.** г). **32.** Вероятность выздороветь не больше 0,01. **33.** Нет. а)–г) возможны.

Обозначения, встречающиеся в учебнике

$\boldsymbol{N}$ — множество всех натуральных чисел
$\boldsymbol{Z}$ — множество всех целых чисел
$\boldsymbol{Z}_0$ — множество всех неотрицательных целых чисел
$\boldsymbol{Q}$ — множество всех рациональных чисел
$\boldsymbol{R}$ — множество всех действительных чисел, числовая прямая
$\boldsymbol{R}_+$ — множество всех положительных действительных чисел
$[a; b]$ — отрезок (замкнутый промежуток) с концами a и b, $a < b$
$(a; b)$ — интервал (открытый промежуток) с концами a и b, $a > b$
$(a; b]$, $[a; b)$ — полуоткрытые промежутки с концами a и b, $a < b$
$(a; +\infty)$, $[a; +\infty)$, $(-\infty; b]$, $(-\infty; b)$ — бесконечные промежутки
$(-\infty; +\infty)$ — бесконечный промежуток, числовая прямая
$(a-\delta, a+\delta)$ — δ-окрестность точки a
$|x|$ — модуль (абсолютная величина) числа x
$[x]$ — целая часть числа x
$\{x\}$ — дробная часть числа x
$f(x)$ — значение функции f в точке x
$D(f)$ — область определения функции f
$E(f)$ — область значений функции f

Δx — приращение аргумента x
$\Delta f(x_0)$, Δf — приращение функции f в точке x_0
$f'(x_0)$ — производная функции f в точке x_0
sin — функция синус
cos — функция косинус
tg — функция тангенс
ctg — функция котангенс
arcsin — функция арксинус
arccos — функция арккосинус
arctg — функция арктангенс
arcctg — функция арккотангенс
$\sqrt{a}$ — арифметический корень из числа a
$\sqrt[2k]{a}$ — арифметический корень $2k$-й степени из числа a $(k \in \boldsymbol{N})$
$\sqrt[2k+1]{a}$ — корень $(2k+1)$-й степени из числа a $(k \in \boldsymbol{N})$
$\log_a$ — логарифм с основанием a
lg — десятичный логарифм (логарифм с основанием 10)
ln — натуральный логарифм (логарифм с основанием e)
$\max\limits_{[a;b]} f$ — наибольшее значение функции f на отрезке $[a; b]$
$\min\limits_{[a;b]} f$ — наименьшее значение функции f на отрезке $[a; b]$
$\int f(x)dx$ — неопределенный интеграл функции f
$\int\limits_a^b f(x)dx$ — определенный интеграл функции f в пределах от a до b

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Оглавление

Навчальне видання

НЕЛІН Євген Петрович
ДОЛГОВА Оксана Євгенівна

АЛГЕБРА І ПОЧАТКИ АНАЛІЗУ

Дворівневий підручник
для 11 класу загальноосвітніх навчальних закладів

російською мовою

Відповідальний за випуск *К. В. Новак*; художній редактор *С. Е. Кулинич*;
комп'ютерна верстка *І. В. Чернуха*; коректор *Н. С. Дорохіна*

Свідоцтво ДК № 457 від 22.05.2001
Підписано до друку 24.05.06. Формат 66×90/16. Гарнітура шкільна.
Папір офсетний. Друк офсетний. Умов. друк. арк. 28,6

НМЦ «Світ дитинства» ТОВ
Україна, 61050, м. Харків, вул. Руставелі, 4/20.

Відгуки і пропозиції прохання надсилати на адресу видавництва